



# Mercredi 22 mai

## Résolution de problème

### Exercice 1 : Oscillations d'une sphère

[oral CCP PSI]

• **Système** : Étudions le mouvement de la sphère dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  supposé galiléen. On introduit un axe  $z$  vertical vers le bas.

• **Bilan des forces** :

▷ La sphère est soumise à son poids,

$$\vec{P} = m\vec{g} = +mg\vec{e}_z.$$

▷ En supposant le fil qui attache la sphère au ressort inextensible, alors la longueur du ressort est reliée à l'altitude  $z$  du centre de masse de la sphère par

$$\ell = z + a$$

avec  $a$  une longueur constante. Ainsi, la sphère subit de la part du ressort une force

$$\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z = -k(z + a - \ell_0)\vec{e}_z.$$

▷ Enfin, dans le second cas seulement, il faut également prendre en compte la force de Stokes

$$\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v} = -6\pi\eta R\dot{z}\vec{e}_z.$$

• **Principe fondamental de la dynamique** : l'équation du mouvement s'écrit

$$m \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{F}_r + \vec{F}$$

donc en projection sur  $\vec{e}_z$

$$m\ddot{z} = mg - k(z + a - \ell_0) - 6\pi\eta R\dot{z}$$

ce qui se met sous la forme

$$\ddot{z} + \frac{6\pi\eta R}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = g - \frac{k}{m}(a - \ell_0).$$

• **Premier cas** : tout se passe formellement comme si  $\eta = 0$ , on reconnaît alors une équation d'oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{soit} \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

• **Deuxième cas** : sous forme canonique, cette équation s'écrit

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = g - \frac{k}{m}(a - \ell_0) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{k/m} \\ Q = \frac{\sqrt{km}}{6\pi\eta R} \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique a pour discriminant

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) < 0$$

car on observe des oscillations. Les racines du polynôme sont donc

$$r_{\pm} = \frac{1}{2} \left( -\frac{\omega_0}{Q} \pm i\omega_0 \sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}} \right) = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

La pseudo-pulsation des oscillations est donnée par la partie imaginaire des racines,

$$\Omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad \text{d'où} \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}.$$

• **Conclusion** : des deux études précédentes on déduit

$$\begin{aligned} \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 &= 1 - \frac{1}{4Q^2} \\ \frac{1}{4Q^2} &= 1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \\ \frac{1}{4 \times \frac{km}{36\pi^2 \eta^2 R^2}} &= 1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \\ \frac{9\pi^2 \eta^2 R^2}{km} &= 1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \\ R &= \sqrt{\frac{km}{9\pi^2 \eta^2 R^2} \left[1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2\right]}. \end{aligned}$$

## Annales de concours

### Exercice 2 : Échangeur thermique

[oral banque PT reconstitué]

1 Par conservation du débit, on a immédiatement

$$D_{m2} = D_{m1} = 1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad D_{m3} = D_{m4}.$$

L'échangeur est globalement calorifugé et les fluides n'y reçoivent aucun travail indiqué. Le premier principe en régime permanent appliqué à l'échangeur en entier donne donc

$$D_{m1}(h_2 - h_1) + D_{m3}(h_4 - h_3) = \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{\text{th,ext}} = 0.$$

D'après la loi de Joule,  $\Delta h = c \Delta T$  d'où

$$D_{m1}c(T_2 - T_1) + D_{m3}c(T_4 - T_3) = 0$$

et ainsi

$$D_{m3} = \frac{c(T_1 - T_2)}{c(T_4 - T_3)} D_{m1}$$

d'où

$$D_{m3} = \frac{T_1 - T_2}{T_4 - T_3} D_{m1} = 1,5 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 L'expression de la fonction d'état entropie n'est pas donnée : il faut donc la retrouver à partir de l'identité thermodynamique, qui s'écrit ici

$$dh = T ds + v dP \quad \text{soit} \quad c dT = T ds + 0$$

en utilisant la loi de Joule et l'hypothèse d'écoulement isobare. On en déduit

$$ds = c \frac{dT}{T}$$

et ainsi en intégrant

$$s_2 - s_1 = c \ln \frac{T_2}{T_1} = -398 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1} \quad \text{et} \quad s_4 - s_3 = c \ln \frac{T_4}{T_3} = 269 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Penser à vérifier qualitativement la cohérence des signes : si la température diminue, alors l'entropie massique diminue aussi.

**3** Procédons à un bilan d'entropie pour chacun des deux flux. Comme l'échangeur est globalement calorifugé, les seuls échanges d'entropie sont internes.

▷ Bilan d'entropie pour le flux ① → ② :

$$D_{m1} dt (s_2 - s_1) = \delta S_{\text{éch},34 \rightarrow 12} + \delta S_{\text{cr},12}$$

▷ Bilan d'entropie pour le flux ③ → ④ :

$$D_{m3} dt (s_4 - s_3) = \delta S_{\text{éch},12 \rightarrow 34} + \delta S_{\text{cr},34}$$

avec  $\delta S_{\text{éch},12 \rightarrow 34} = -\delta S_{\text{éch},34 \rightarrow 12}$

Le bilan d'entropie s'écrit de manière équivalente à un bilan d'enthalpie par unité de masse traversante

$$\delta m = D_m dt, \quad \delta m (h_s - h_e) = \delta W_i + \delta Q \quad \longleftrightarrow \quad \delta m (s_s - s_e) = \delta S_{\text{éch}} + \delta S_{\text{cr}}.$$

En sommant, on obtient alors

$$D_{m3} dt (s_4 - s_3) + D_{m1} dt (s_2 - s_1) = \delta S_{\text{cr},12} + \delta S_{\text{cr},34}$$

d'où on en déduit l'entropie créée par unité de temps

$$\sigma = \frac{\delta S_{\text{cr},12} + \delta S_{\text{cr},34}}{dt} = D_{m3} (s_4 - s_3) + D_{m1} (s_2 - s_1) = 6,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}.$$

### Exercice 3 : Réflexion d'une onde électromagnétique

[oral banque PT]

**1** Il s'agit d'une onde plane progressive harmonique polarisée linéairement selon  $\vec{u}_x$  et se propageant dans le sens des  $z$  croissants.

**2** L'onde réfléchi se propage dans le sens des  $z$  décroissants, son amplitude peut différer de celle de l'onde incidente et elle peut être déphasée. On la suppose de même polarisation que l'onde incidente. On la cherche donc sous la forme

$$\vec{E}_r = E'_0 \cos(\omega t + kz + \varphi) \vec{u}_x.$$

Ainsi, l'onde totale dans le demi-espace  $z < 0$  s'écrit

$$\vec{E}_{\text{tot}} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x + E'_0 \cos(\omega t + kz + \varphi) \vec{u}_x.$$

Les champs sont nuls dans un conducteur parfait, donc en  $z > 0$  on a  $\vec{E}_c = \vec{0}$ .

L'interface est de normale  $\vec{u}_z$ , la composante selon  $\vec{u}_x$  est bien tangentielle, et la relation de passage s'écrit à tout instant

$$\vec{E}_{\text{tot}}(z=0, t) = \vec{E}_c(z=0, t) \quad \text{soit} \quad E_0 \cos(\omega t) + E'_0 \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

On en déduit  $\varphi = 0$  (si  $\omega t = \pi/2$  alors  $\omega t + \varphi = \pi/2$  aussi car  $E'_0$  est non nul) puis  $E'_0 = -E_0$ . Ainsi,

$$\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kz) \vec{u}_x.$$

**3** L'onde totale s'écrit

$$\vec{E}_{\text{tot}} = E_0 [\cos(\omega t - kz) - \cos(\omega t + kz)] \vec{u}_x.$$

soit en utilisant la relation trigonométrique donnée

$$\vec{E}_{\text{tot}} = -2E_0 \sin(\omega t) \sin(-kz) \vec{u}_x = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kz) \vec{u}_x.$$

Ainsi, le champ total s'annule lorsque  $\sin(kz) = 0$  soit ( $n$  entier)

$$kz = n\pi \quad \text{d'où} \quad z = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\lambda}{2}.$$

La période spatiale des annulations est donc  $\pi/k = \lambda/2$ .

**4** Numériquement,

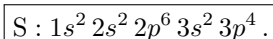
$$\frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f} = 0,5 \text{ mm}.$$

Le champ s'annule donc tous les 500  $\mu\text{m}$ .

**5** Le capteur fonctionne visiblement selon un phénomène d'induction : la grandeur mesurée est donc le **flux au travers du cadre du champ magnétique** de l'onde.

**Exercice 4 : Le soufre****[oral CCP MP]**

1 Compte tenu de la place du soufre dans la classification périodique, on sait d'une part que sa sous-couche en cours de remplissage est en  $np^4$  et d'autre part que la valeur maximale de  $n$  impliquée dans sa configuration est  $n = 3$ . Les éléments du bloc  $p$  ne posant pas de difficulté (au contraire de ceux du bloc  $d$ ), on en déduit la configuration



2 Les électrons de valence du soufre sont ceux de la couche  $n = 3$ , associés au nombre quantique secondaire valant  $\ell = 0$  (sous-couche  $s$ ) et  $\ell = 1$  (sous-couche  $p$ ).

3 Le soufre est situé sur la droite de la classification alors que le lithium est un alcalin, situé dans la colonne la plus à gauche : **le soufre est donc plus électronégatif que le lithium**. Le soufre et le chlore appartiennent à la même période, le soufre se trouvant à gauche du chlore : **le soufre est donc moins électronégatif que le chlore**. Le soufre et l'oxygène appartiennent à la même famille, le soufre se trouvant sous l'oxygène : **le soufre est donc moins électronégatif que l'oxygène**.

4 Les ions monoatomiques les plus chargés sont ceux qui conduisent à remplir ou vider complètement la couche de valence. En supposant que seule la couche  $p$  peut être vidée, les ions les plus chargés sont respectivement  $\text{S}^{4+}$  et  $\text{S}^{2-}$ . L'ion le plus fréquent est celui pour lequel la charge est en valeur absolue la plus petite, soit  $\text{S}^{2-}$ .