TD 3 – Préparation à l'oral *Correction*

Lundi 27 mai

Annales de concours

Exercice 1 : Oscillateur RLC à ALI [oral banque PT]

Raisonnons avec les notations de la figure 1.

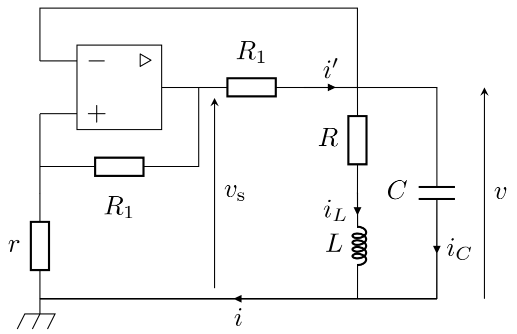

Figure 1 – Oscillateur RLC à ALI.

1 Il existe une rétroaction sur la borne ⊖ de l'ALI.

2 Étudions le bloc contenant l'ALI et les résistances r et R_1. D'après la loi des mailles,

$$v_s = v + R_1 i' \,.$$

L'ALI étant idéal, ses courants de polarisation sont nuls, donc la loi des nœuds indique

$$i' = 0 + i_L + i_C = i \qquad \text{d'où} \qquad v_s = v + R_1 i \,. \tag{1}$$

Par ailleurs, on peut identifier un pont diviseur de tension, qui donne

$$\frac{v_+}{v_s} = \frac{r}{r + R_1}$$

et comme l'ALI fonctionne par hypothèse en régime linéaire alors

$$v_+ = v_- = v \qquad \text{d'où} \qquad v = \frac{r}{r+R_1} v_s \,.$$

En éliminant v_s grâce à la relation (1), on obtient

$$(r + R_1)v = r(v + R_1 i) \qquad \text{soit} \qquad R_1 v = r R_1 i$$

et finalement

$$\boxed{v = ri} \,.$$

> **Attention !** *Il y a un énorme piège avec la définition de i ! La tension aux bornes de la résistance r **N'EST PAS** égale à ri à cause de la masse. La masse est placée par un fil, duquel peut sortir un courant non nul mais inconnu ... dont il faut se méfier comme de la peste.*

3 D'après la loi des mailles,

$$v = R i_L + L \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

et d'après la loi des nœuds $i_L = i - i_C$ donc

$$v = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - Ri_C - L\frac{\mathrm{d}i_C}{\mathrm{d}t}\,.$$

Comme $i = v/r$ et d'après la loi de comportement du condensateur,

$$v = \frac{R}{r}v + \frac{L}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - RC\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - LC\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}\,.$$

En réorganisant,

$$LC\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \left(RC - \frac{L}{r}\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \left(1 - \frac{R}{r}\right)v = 0\,,$$

ce que l'on peut réécrire sous forme canonique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}\left(RC - \frac{L}{r}\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}\left(1 - \frac{R}{r}\right)v = 0\,.}$$

4 On obtient des auto-oscillations sinusoïdales si l'équation différentielle ci-dessus s'identifie à celle d'un oscillateur harmonique. Cela nécessite donc

▷ d'une part que le préfacteur du premier ordre soit nul, donc

$$RC - \frac{L}{r} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{r = \frac{L}{RC}\,,}$$

▷ d'autre part que le préfacteur du terme d'ordre 0 soit strictement positif, soit

$$1 - \frac{R}{r} > 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{r > R\,.}$$

Dans ce cas, la pulsation ω_0 des oscillations est telle que

$${\omega_0}^2 = \frac{1}{LC}\left(1 - \frac{R}{r}\right) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}\left(1 - \frac{R}{r}\right)}\,.}$$

5 Pour que les oscillations démarrent, l'équation différentielle doit être instable : il faut pour cela que les préfacteurs soient de signe différent. Celui de l'ordre 2 étant égal à 1, on peut donc avoir ou bien

$$RC - \frac{L}{r} < 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{r < \frac{L}{RC}}$$

ou bien

$$1 - \frac{R}{r} < 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{r < R\,.}$$

L'amplitude des oscillations **augmente alors exponentiellement** (équation différentielle d'ordre 2), mais elle ne va pas diverger pour autant en raison de la **saturation de la tension de sortie de l'ALI** qui contraint l'amplitude des oscillations.

Exercice 2 : Ballon d'eau chaude [oral banque PT]

Compte tenu des symétries du problème, le vecteur densité de flux thermique dans la paroi cylindrique s'écrit

$$\vec{j} = j_r(r,t)\,\vec{e}_r\,.$$

1 Raisonnons sur une couche cylindrique comprise entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$

- **Bilan thermique :** pendant un intervalle de temps $\mathrm{d}t$,

▷ Par la face située en r, elle reçoit le transfert thermique

$$\delta Q_\mathrm{e} = \phi_\mathrm{e}\,\mathrm{d}t = \iint \vec{j}(r,t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}\,\mathrm{d}t = 2\pi r\,h\,j_r(r,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

▷ Par la face située en $r+\mathrm{d}r$, elle cède le transfert thermique

$$\delta Q_\mathrm{s} = \phi_\mathrm{s}\,\mathrm{d}t = 2\pi(r+\mathrm{d}r)h\,j_r(r+\mathrm{d}r,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

- **Premier principe :** entre t et $t+\mathrm{d}t$,

$$\mathrm{d}H = \delta Q_\mathrm{e} - \delta Q_\mathrm{s}\,,$$

donc en utilisant la loi de Joule avec c la capacité thermique massique de l'acier

$$\underbrace{\rho\times 2\pi r\,h\,\mathrm{d}r}_{\text{masse}}\times c\,\mathrm{d}T = 2\pi\,h\,\mathrm{d}t\,[r j_r(r,t) - (r+\mathrm{d}r)j_r(r+\mathrm{d}r,t)]$$

$$2\pi r h\,\mathrm{d}r\,\rho c\,\mathrm{d}T = 2\pi h\frac{\partial}{\partial r}\left(r j_r\right)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t$$

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r j_r\right)\,.$$

- **Loi de Fourier :** compte tenu des symétries du problème,

$$\vec{j} = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T \qquad \text{donne} \qquad j_r = -\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\,.$$

Ainsi,

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\,.$$

- **Conclusion :** on obtient finalement

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) - \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \qquad \text{avec} \qquad D = \frac{\lambda}{\rho c}\,.}$$

2 En régime permanent l'équation se simplifie en

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = 0\,.$$

- **Intégration :** Une première intégration donne

$$r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = A \qquad \text{avec} \qquad A = \text{cte}\,,$$

ce qui se réécrit

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \frac{A}{r}\,.$$

Une deuxième intégration permet ensuite d'aboutir à

$$T = A\ln r + B\,.$$

- **Détermination des constantes :** en utilisant les conditions aux limites,

▷ au contact de l'eau chaude,

$$T(r\!=\!\ell)\underbrace{=}_{\text{CL}}T_\mathrm{int}\underbrace{=}_{\text{sol}}A\ln\ell + B$$

▷ au contact de l'air extérieur,

$$T(r\!=\!\ell+e)\underbrace{=}_{\text{CL}}T_\mathrm{ext}\underbrace{=}_{\text{sol}}A\ln(\ell+e) + B$$

En soustrayant ces deux équations, on obtient

$$T_\mathrm{int} - T_\mathrm{ext} = A\left[\ln\ell - \ln(\ell+e)\right] = A\ln\frac{\ell}{\ell+e} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{A = \frac{T_\mathrm{int}-T_\mathrm{ext}}{\ln\dfrac{\ell}{\ell+e}}\,.}$$

On peut alors en déduire

$$\boxed{B = T_\mathrm{int} - \frac{T_\mathrm{int}-T_\mathrm{ext}}{\ln\dfrac{\ell}{\ell+e}}\ln\ell\,.}$$

Étienne Thibierge, 19 mai 2019, www.etienne-thibierge.fr

> *Comme il n'y a pas d'autre simplification, inutile d'aller plus loin dans le calcul.*

3 Raisonnons sur une couche cylindrique comprise entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$, et effectuons un bilan thermique entre t et $t + \mathrm{d}t$.

▷ par la face située en r, elle reçoit le transfert thermique

$$\delta Q_\mathrm{e} = \phi(r)\,\mathrm{d}t\,;$$

▷ par la face située en $r + \mathrm{d}r$, elle cède le transfert thermique

$$\delta Q_\mathrm{s} = \phi(r + \mathrm{d}r)\,\mathrm{d}t\,.$$

D'après le premier principe en régime stationnaire,

$$\mathrm{d}H \underbrace{=}_{\text{stat}} 0 \underbrace{=}_{\text{1erP}} \delta Q_\mathrm{e} - \delta Q_\mathrm{s} \qquad \text{d'où} \qquad \phi(r) - \phi(r + \mathrm{d}r) = 0$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = 0$$

ce qui indique bien que le flux sortant d'un cylindre de rayon r est indépendant du rayon du cylindre.

4 Dans le cadre de la conduction ohmique, l'intensité I correspond au flux de charge induit par une différence de potentiel ΔV et la loi d'Ohm s'écrit en convention récepteur

$$\Delta V = R\,I\,.$$

Ici, le flux thermique ϕ est induit par la différence de température ΔT et on définit la résistance thermique R_th par

$$\Delta T = R_\mathrm{th}\,\phi\,.$$

• **En utilisant le profil de température :** en raisonnant sur un cylindre de rayon r en régime permanent et d'après la loi de Fourier,

$$\phi = \iint \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} 2\pi\, r\, h$$

avec

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \frac{A}{r} = -\frac{T_\mathrm{int} - T_\mathrm{ext}}{r\,\ln\left(1 + \dfrac{e}{\ell}\right)} \qquad \text{d'où} \qquad \phi = 2\pi\, h\, \lambda \frac{T_\mathrm{int} - T_\mathrm{ext}}{\ln\left(1 + \dfrac{e}{\ell}\right)}\,.$$

Le flux est (conventionnellement et depuis le début de l'exercice) orienté de l'intérieur vers l'extérieur, pour être en convention récepteur la différence de température doit donc être prise en sens inverse. Il vient alors

$$T_\mathrm{int} - T_\mathrm{ext} = \frac{1}{2\pi h\,\lambda} \ln\left(1 + \frac{e}{\ell}\right)\,\phi\,,$$

et on identifie

$$\boxed{R_\mathrm{th} = \frac{1}{2\pi h\,\lambda} \ln\left(1 + \frac{e}{\ell}\right) = 1{,}0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}\,.}$$

• **En utilisant la conservation du flux :** on repart de l'expression

$$\phi = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} 2\pi\, r\, h$$

que l'on intègre par séparation des variables entre l'intérieur et l'extérieur du chauffe-eau,

$$\mathrm{d}T = -\frac{\phi}{2\pi\,\lambda\, h} \frac{\mathrm{d}r}{r} \qquad \text{d'où} \qquad T_\mathrm{ext} - T_\mathrm{int} = -\frac{\phi}{2\pi\,\lambda\, h} \ln \frac{\ell + e}{\ell}$$

et en tenant compte de la convention récepteur on retrouve

$$\boxed{R_\mathrm{th} = \frac{1}{2\pi h\,\lambda} \ln\left(1 + \frac{e}{\ell}\right) = 1{,}0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}\,.}$$

5 La nouvelle couche isolante est également cylindrique, sa résistance thermique est donc donnée par une expression analogue,

$$R' = \frac{1}{2\pi h\,\lambda} \ln\left(1 + \frac{e'}{\ell + e}\right) = 1{,}2\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}\,.$$

et de même
$$R'' = 0{,}39\,\mathrm{K}\cdot\mathrm{W}^{-1}\,.$$
Les deux résistance sont montées en série, donc
$$R_\mathrm{tot} = R + R'\,.$$

6 On consstate que $R' > R''$, l'isolation par la laine de verre est donc plus efficace que celle par le polyester : le flux est moindre pour une même différence de température.

Exercice 3 : Supraconducteur [exemple officiel banque PT]

1 Les quatre équations de Maxwell s'écrivent
$$\begin{cases} \operatorname{div}\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div}\overrightarrow{B} = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} \underbrace{=}_{\text{stat}} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\,\overrightarrow{\jmath} + \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} \underbrace{=}_{\text{stat}} \mu_0\,\overrightarrow{\jmath} \end{cases}$$
Soit une surface $\mathcal{S}$ s'appuyant sur un contour fermé $\mathcal{C}$. On se place en régime stationnaire.
$$\begin{aligned} \iint_\mathcal{S} \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} &\underbrace{=}_{\text{MA}} \mu_0 \iint_\mathcal{S} \overrightarrow{\jmath}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mu_0 I_\mathrm{enl} \\ &\underbrace{=}_{\text{Stokes}} \oint \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}\,, \end{aligned}$$
où I_enl est le courant enlacé par le contour $\mathcal{C}$. Ainsi,
$$\boxed{\oint_\mathcal{C} \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mu_0 I_\mathrm{enl}\,.}$$

2 D'après l'équation de Maxwell-Ampère,
$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{B}) = \mu_0\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\jmath} &\underbrace{=}_{\text{London}} -\frac{1}{\lambda^2}\overrightarrow{B} \\ = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}\overrightarrow{B}) - \Delta\overrightarrow{B} &\underbrace{=}_{\text{MT}} -\Delta\overrightarrow{B}\,. \end{aligned}$$
En identifiant on en déduit
$$\Delta\overrightarrow{B} - \frac{1}{\lambda^2}\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}\,.$$

3 L'énoncé n'est pas des plus clair ... il suppose implicitement qu'il y a invariance par translation selon x et y, et surtout qu'il y a continuité du champ magnétique en $x = 0$, ce qui n'est pas forcément le cas. Sous ces hypothèses, l'équation devient
$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{B}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{1}{\lambda^2}\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}\,.$$
Le polynôme caractéristique s'écrit
$$r^2 - \frac{1}{\lambda^2} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad r = \pm\frac{1}{\lambda}$$
et les solutions sont donc de la forme
$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{K}_1\,\mathrm{e}^{-x/\lambda} + \overrightarrow{K}_2\,\mathrm{e}^{+x/\lambda}$$
avec $\overrightarrow{K}_1$ et $\overrightarrow{K}_2$ deux constantes vectorielles. En admettant que le champ magnétique ne diverge pas lorsque $x \to +\infty$, on trouve
$$\overrightarrow{K}_2 = \overrightarrow{0}\,.$$

Enfin, en supposant la continuité du champ magnétique en $x=0$ on obtient $\overrightarrow{K}_1 = \overrightarrow{B}_1$ d'où finalement

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}_1\,\mathrm{e}^{-x/\lambda}\,.}$$

4 Raisonnons sur la figure 2 : le tore est supposé de rayon moyen R, sa section circulaire de rayon a, et il est bobiné par $N \gg 1$ spires réparties continûment. Soit M un point quelconque de l'espace.

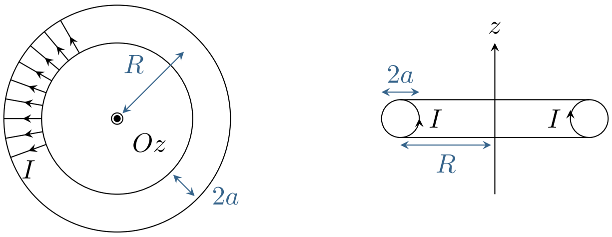

Figure 2 – Bobine torique.

• **Symétries :** le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ (plan de la figure de droite de l'énoncé) est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\overrightarrow{B}(M)$ est orthogonal à ce plan.

$\leadsto$ $\overrightarrow{B}(M) = B(M)\vec{e}_\theta$.

• **Invariances :** comme les spires sont supposées réparties continûment, alors la distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe Oz. Le champ $\overrightarrow{B}(M)$ ne dépend donc pas de θ, d'où

$$\boxed{\overrightarrow{B}(M) = B(r,z)\,\vec{e}_\theta\,.}$$

• **Théorème d'Ampère :**

▷ On raisonne sur un cercle passant par M et d'axe Oz, orienté par la règle de la main droite selon l'axe Oz.

▷ Circulation :

$$\oint \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \oint B(r,z)\,\vec{e}_\theta\cdot \mathrm{d}\ell\,\vec{e}_\theta = 2\pi r B(r,z)\,.$$

▷ Courant enlacé : en raisonnant sur les schémas on peut facilement comprendre que le courant enlacé vaut

$$I_\mathrm{enl} = \begin{cases} NI & \text{si } M \in \text{tore} \\ 0 & \text{si } M \notin \text{tore}\end{cases}$$

> *Il faut toujours se méfier du signe des courants enlacés, par règle de la main droite avec l'orientation du contour : ici c'est positif.*

▷ Conclusion : d'après le théorème d'Ampère,

$$2\pi r B(r,z) = \begin{cases} \mu_0 NI & \text{si } M \in \text{tore} \\ 0 & \text{si } M \notin \text{tore}\end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\overrightarrow{B}(M) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}\,\vec{e}_\theta & \text{si } M \in \text{tore} \\ \vec{0} & \text{si } M \notin \text{tore}\end{cases}}$$

Les lignes de champ sont donc des cercles.

Je ne suis pas sûr de comprendre la suite de la question ... Si l'on envoie des électrons au travers du tore, ils ne voient aucun champ magnétique et donc ne doivent pas être déviés par la force de Lorentz.

La suite de la question est complètement hors de portée d'un candidat en PT : l'expérience de Tonomura a permis de vérifier un effet de mécanique quantique appelé effet Aharonov-Bohm qui indique que même si le champ magnétique est nul les électrons ressentent son effet via le potentiel vecteur ... qui est hors programme en PT.

5 Le champ magnétique à l'intérieur du tore est donné par l'expression précédente. Le flux au travers d'une spire est vaut

$$\varphi = \iint \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi}\times a \times \int_R^{R+a}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 NIa}{2\pi}\ln\frac{R+a}{R}\,.$$

Le flux propre du tore est

$$\phi = N\varphi = \frac{\mu_0 N^2 Ia}{2\pi}\ln\frac{R+a}{R}$$

et par définition $L = \phi/I$ d'où

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{R}\right)\,.}$$