



Lundi 3 juin

Annales de concours

Exercice 1 : Rails de Laplace couplés

[d'après oraux banque PT]

Notons x_1 et x_2 les abscisses des deux barreaux, et v_1 et v_2 leurs vitesses algébriques.

1 • **Équation électrique** : la surface du circuit est $a(x_2 - x_1)$ et le champ est uniforme, donc le flux magnétique vaut

$$\phi = a(x_2 - x_1)B$$

d'où on déduit la f.é.m. induite,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -a(v_2 - v_1)B.$$

Le circuit équivalent contient deux résistances R montées en série, équivalentes à une unique résistance $2R$, et le générateur induit. La loi d'Ohm donne alors

$$e = 2Ri \quad \text{soit} \quad -a(v_2 - v_1)B = 2Ri.$$

• **Équations mécaniques** : les deux équations mécaniques s'obtiennent par application du théorème de la résultante cinétique aux deux tiges, en mouvement par rapport au référentiel du laboratoire, que l'on suppose galiléen. Ces tiges sont soumises à leur poids et à une force de réaction qui se compensent ainsi qu'à la force de Laplace. En orientant l'intensité dans le sens trigonométrique sur la figure de l'énoncé, la force de Laplace s'écrit

$$\vec{F}_1 = i(-a\vec{e}_y) \wedge (B\vec{e}_z) = -iaB\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 = i(+a\vec{e}_y) \wedge (B\vec{e}_z) = iaB\vec{e}_x$$

Le TRC projeté sur \vec{e}_x donne alors

$$m\frac{dv_1}{dt} = -iaB \quad \text{et} \quad m\frac{dv_2}{dt} = +iaB.$$

• **Bilan** : en combinant avec l'équation électrique,

$$\begin{cases} m\frac{dv_1}{dt} = \frac{(aB)^2}{2R}(v_2 - v_1) \\ m\frac{dv_2}{dt} = -\frac{(aB)^2}{2R}(v_2 - v_1) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \boxed{\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{2\tau}(v_2 - v_1) \\ \frac{dv_2}{dt} = -\frac{1}{2\tau}(v_2 - v_1) \end{cases}}$$

2 Sans indication, la question est un peu ardue ... Il faut découpler ces équations couplées en prenant la somme et la différence.

• **Différence** : posons $\delta = v_2 - v_1$. Des équations précédentes, on déduit

$$\frac{d\delta}{dt} + \frac{1}{\tau}\delta = 0$$

qui s'intègre en

$$\delta(t) = Ae^{-t/\tau}.$$

À l'instant initial,

$$\delta(0) \underbrace{=} A \underbrace{=} v_2(0) - v_1(0) = -v_0$$

si bien que

$$\delta(t) = -v_0 e^{-t/\tau}.$$

- **Somme** : posons maintenant $\sigma = v_1 + v_2$. À partir du système d'équations couplées, il vient

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad \text{d'où} \quad \sigma = \text{cte.}$$

La constante se détermine à l'instant initial,

$$\sigma = v_1(0) + v_2(0) = v_0.$$

- **Retour aux vitesses des barreaux** : en inversant,

$$v_1(t) = \frac{\sigma - \delta}{2} \quad \text{et} \quad v_2(t) = \frac{\sigma + \delta}{2}$$

soit

$$\boxed{v_1(t) = \frac{v_0}{2} (1 + e^{-t/\tau}) \quad \text{et} \quad v_2(t) = \frac{v_0}{2} (1 - e^{-t/\tau}) .}$$

- 3** Raisonnons sur la première des deux équations couplées traduite en représentation complexe,

$$j\omega v_1 = \frac{1}{2\tau} (v_2 - v_1)$$

qui donne

$$\underline{v}_2 = (1 + 2j\tau\omega) \underline{v}_1.$$

On en déduit l'amplitude,

$$|v_2| = \sqrt{1 + 4\tau^2\omega^2} |v_1| = \sqrt{1 + 4\tau^2\omega^2} V_0$$

et le déphasage

$$\varphi = \arg(1 + 2j\tau\omega) = \arctan(2\tau\omega).$$

Ainsi,

$$\boxed{v_2(t) = \sqrt{1 + 4\tau^2\omega^2} V_0 \cos[\omega t + \arctan(2\tau\omega)] .}$$

- 4** Les équations mécaniques s'écrivent

$$m \frac{dv_1}{dt} = -iaB \quad \text{et} \quad m \frac{dv_2}{dt} = +iaB$$

donc en les multipliant respectivement par v_1 et v_2 on obtient

$$mv_1 \frac{dv_1}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_1^2 \right) = -iaBv_1 \quad \text{et} \quad mv_2 \frac{dv_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_2^2 \right) = iaBv_2.$$

Prenons maintenant l'équation électrique, et multiplions-là par i ,

$$-a(v_2 - v_1)B = 2Ri \quad \text{soit} \quad -a(v_2 - v_1)Bi = 2Ri^2.$$

En combinant on en déduit

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_2^2 \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_1^2 \right) = 2Ri^2$$

ou encore

$$\underbrace{-\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_1^2 \right)}_{\text{énergie cinétique perdue par 1}} = \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_2^2 \right)}_{\text{énergie cinétique gagnée par 2}} + \underbrace{2Ri^2}_{\text{effet Joule}}.$$

Ainsi, l'énergie cinétique perdue par le barreau 1 est entièrement récupérée par le barreau 2 ou dissipée par effet Joule.

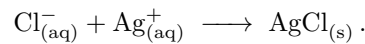
La méthode est générale et à retenir : pour obtenir le bilan énergétique en présence d'induction, il faut multiplier les équations électrique et mécanique par la bonne grandeur pour obtenir une puissance. Le TRC implique des forces, une puissance s'obtient en multipliant par la vitesse ; la loi des mailles implique des tensions qu'il faut multiplier par l'intensité pour obtenir une puissance. Il reste ensuite à sommer les deux équations, ce qui a le bon goût d'éliminer le terme en champ magnétique, et interpréter le résultat.

Exercice 2 : Titrage d'un sérum physiologique**[exemple officiel banque PT]**

1 En approximant la masse volumique de la solution à celle de l'eau distillée, 1 L de solution a une masse de 1 kg. Ainsi, le sérum physiologique à 9 pour 1000 contient 9 g de NaCl par litre de solution, ce qui correspond à une concentration

$$c_{\text{annoncée}} = \frac{9}{23 + 35,5} = 0,15 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

2 La réaction de titrage est



Comme toute réaction de titrage, elle est quantitative. Les nombres stœchiométriques des réactifs sont égaux, donc à l'équivalence ils ont été apportés en quantité de matière identiques,

$$n_{\text{Cl}^-} = n_{\text{Ag}^+} \quad \text{donc} \quad c_f V_f = c_0 V_{\text{éq}}$$

avec $c_0 = 0,010 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ la concentration de la solution titrante et $V_f = 5 \text{ mL}$ le volume titré. Comme la solution commerciale a été diluée cinq fois avant d'être dosée, on en déduit sa concentration

$$c = 5c_f = \frac{5c_0 V_{\text{éq}}}{V_f}.$$

Le volume équivalent correspond au maximum de la dérivée dU/dV , soit $V_{\text{éq}} = 16 \text{ mL}$, et ainsi

$$c = 0,16 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1},$$

ce qui est parfaitement compatible avec la valeur attendue compte tenu de l'incertitude sur l'estimation du volume équivalent.

3 La tension mesurée correspond à la différence du potentiel de Nernst entre les deux électrodes,

$$U = E_{\text{Ag}} - E_{\text{Hg}_2\text{SO}_4}.$$

Le potentiel de l'électrode de référence est constant (sinon ce ne serait pas une électrode de référence!!) et celui de l'électrode d'argent est donné par la loi de Nernst, soit

$$U = E^\circ(\text{Ag}^+/\text{Ag}) + 0,06 \log[\text{Ag}^+] - E(\text{Hg}_{(l)}/\text{Hg}_2\text{SO}_{4(s)}) = 0,18 + 0,06 \log[\text{Ag}^+].$$

4 À la demi-équivalence, la moitié des ions chlorure ont été consommés et les ions argent sont présents en concentration infinitésimale. La concentration en chlorure vaut alors

$$[\text{Cl}^-]_{\text{éq}/2} = \frac{c_f V_f / 2}{V_0 + V_{\text{éq}}/2} = 7,4 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

Comme le précipité est présent, la concentration en Ag^+ se déduit de la loi d'action des masses,

$$[\text{Ag}^+][\text{Cl}^-] = K_s \quad \text{d'où} \quad [\text{Ag}^+] = \frac{K_s}{[\text{Cl}^-]}.$$

En combinant ce résultat avec celui de la question précédente,

$$U_{\text{éq}/2} = 0,18 + 0,06 \log \frac{K_s}{[\text{Cl}^-]_{\text{éq}/2}} = 0,18 - 0,06 \text{p}K_s - 0,06 \log[\text{Cl}^-]_{\text{éq}/2}$$

et finalement

$$\text{p}K_s = \frac{1}{0,06} (0,18 - 0,06 \log[\text{Cl}^-]_{\text{éq}/2} - U_{\text{éq}/2}) = 9,8,$$

ce qui est tout à fait compatible avec la valeur tabulée compte tenu des imprécisions de lecture.

Exercice 3 : Chariot de parc d'attraction**[oral banque PT]**

- 1** ▷ Par simple lecture des unités, on déduit que **la courbe 4 correspond à la force de réaction R_n** .
 ▷ La courbe 1 est la seule courbe monotone, ce qui ne peut pas être le cas de l'énergie cinétique ni de l'énergie potentielle lorsque le chariot fait des tours complets de looping : **la courbe 1 représente l'énergie mécanique totale du chariot**. Comme elle est décroissante, cela signifie que **la simulation prend en compte des sources de dissipation**.
 ▷ La courbe 2 part d'un maximum et commence par décroître : ce n'est donc pas l'énergie cinétique, car le chariot accélère dans la pente. Cela est confirmé car elle atteint ensuite périodiquement la même valeur, à chaque tour accompli par le chariot. On en déduit que **la courbe 2 représente l'énergie potentielle du chariot**.
 ▷ Enfin, la courbe 3 part d'une valeur nulle qui commence par croître, puis présente des oscillations : **il s'agit de l'énergie cinétique** du chariot. Le fait que sa valeur maximale diminue à chaque tour est dû aux frottements.

2 À l'instant $t = 0$, $\mathcal{E}_{c,0} = \frac{1}{2}mV_0^2 = 0$ d'où on déduit directement

$$V_0 = 0.$$

À ce même instant initial, $\mathcal{E}_{p,0} = 6,5 \cdot 10^6 \text{ J}$ d'où on déduit

$$h = \frac{\mathcal{E}_{p,0}}{mg} = 65 \text{ m}.$$

Enfin, la valeur maximale d'énergie cinétique vaut $\mathcal{E}_{c,\max} = 5,5 \cdot 10^6 \text{ J}$ d'où

$$V_{\max} = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_{c,\max}}{m}} = 33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- 3** Le chariot quitte le looping lorsque la force de réaction exercée par le looping sur le chariot s'annule, c'est-à-dire **au bout de 33 s environ**.
4 Avant que le chariot ne décolle, la courbe d'énergie potentielle atteint deux fois son maximum avant de revenir à la valeur nulle. On en déduit qu'il **parcourt deux tours complets avant de décoller**.
5 Appliquons le théorème de la résultante cinétique au chariot en mouvement dans le référentiel terrestre.

- **Bilan des forces :**

- ▷ Poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$;
- ▷ Réaction normale du rail $\vec{R}_n = -R_n \vec{e}_r$;
- ▷ Force de frottements \vec{F} , dont on ne sait rien mais que l'on peut supposer colinéaire à la vitesse, c'est-à-dire $\vec{F} = -F \vec{e}_\theta$.

- **Application du TRC :** Comme le mouvement est circulaire, alors

$$\overrightarrow{O'M} = R\vec{e}_r \quad \rightsquigarrow \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \rightsquigarrow \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

Le TRC s'écrit ainsi

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - R_n \\ mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - F \end{cases}$$

- **Condition de liaison :** Pour que la force de réaction soit bien de norme positive, il faut

$$g \cos \theta + R\dot{\theta}^2 > 0$$

et comme le cas le plus contraignant est celui où $\cos \theta = -1$, soit $\theta = \pi$, ce qui correspond au sommet du looping, on en déduit qu'il faut avoir

$$R\dot{\theta}^2 > g$$

Cela donne une borne inférieure sur l'énergie cinétique au sommet du looping,

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2) > \frac{1}{2}mgR = 1 \cdot 10^6 \text{ J},$$

car le looping est haut de 40 m donc son rayon mesure 20 m.

• **Conclusion** : Il me semble ensuite assez difficile de conclure avec les courbes données : on peut estimer qu'à l'instant où le chariot décolle il lui manque $\Delta\mathcal{E} = 0,1 \text{ MJ}$ par rapport à la borne que l'on vient de déterminer. Pour combler ce manque, il faudrait un surplus de hauteur initiale

$$\Delta h = \frac{\Delta\mathcal{E}}{mg} = 1 \text{ m.}$$

Cependant, compte tenu des frottements, le chariot ne manquerait pas de décoller au tour suivant ...

Exercice 4 : Observation de franges d'interférences

[oral banque PT]

1 Les franges sont rectilignes, parallèles aux fentes, incluses à l'intérieur de la figure de diffraction par une fente seule.

2 Cf. cours :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi bx}{\lambda D} \right) \right]$$

avec x une abscisse orthogonale à la direction des franges.

3 L'interfrange, c'est-à-dire la distance entre deux franges brillantes consécutives, ou encore la période spatiale de la figure d'interférences, vaut

$$i = \frac{\lambda D}{b} = 50 \mu\text{m}$$

On peut donc estimer qu'une frange a une extension spatiale $i/2$. En plaçant l'œil le plus proche possible des franges, elle est vue sous un angle

$$\theta = \frac{i/2}{PP} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ rad.}$$

Sachant que $1' = 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$, les franges **ne sont pas visibles à l'œil nu**.

Rappelons que $1' = 1/60^\circ$, soit

$$1' = \frac{1}{60} \times \frac{\pi}{180} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad.}$$

4 Si l'image des franges est à l'infini alors elles sont dans le plan focal objet de la lentille. En raisonnant sur la figure 1, on constate qu'en présence de la lentille les franges sont vues sous un angle

$$\theta' \simeq \frac{i/2}{f'}$$

Pour qu'elles puissent être vues par l'observateur, il faut alors avoir

$$\theta' > \alpha \quad \text{soit} \quad f' < \frac{i}{2\alpha} = 8,3 \text{ cm.}$$

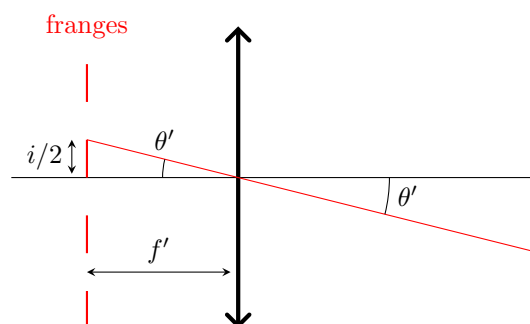


Figure 1 – Observation des franges au travers d'une lentille.