TD 6 – Préparation à l'oral *Correction*

Mercredi 5 juin

Annales de concours

Exercice 1 : Nickelage du fer [oral banque PT]

1 Les espèces électroactives présentes sont Ni, Ni^{2+} et H_2O. Le but étant de recouvrir la pièce de fer, celui-ci ne doit pas intervenir. Ainsi,

▷ l'électrode de fer est forcément le lieu d'une réduction : celle de Ni^{2+} en Ni

$$\mathrm{Ni}^{2+} + 2e^- \longrightarrow \mathrm{Ni}$$

▷ par conséquent, l'électrode de platine est le lieu d'une oxydation, et comme le seul réducteur présent à cette électrode est l'eau il ne peut s'agir que de

$$2\,\mathrm{H_2O} \longrightarrow \mathrm{O_2} + 4\,\mathrm{H^+} + 4e^- \,.$$

2 Si aucun facteur cinétique n'est à prendre en compte, la tension seuil d'électrolyse est égale à la différence des potentiel de Nernst des électrodes.

$$\begin{cases} E_{\mathrm{Ni}} = E°(\mathrm{Ni}^{2+}/\mathrm{Ni}) + \dfrac{0{,}06}{2}\log[\mathrm{Ni}^{2+}] = -0{,}32\,\mathrm{V} \\ E_{\mathrm{Pt}} = E°(\mathrm{O_2}/\mathrm{H_2O}) + \dfrac{0{,}06}{4}\log(p_{\mathrm{O_2}}\,[\mathrm{H^+}]^4) = E°(\mathrm{O_2}/\mathrm{H_2O}) - 0{,}06\,\mathrm{pH} = 0{,}93\,\mathrm{V}\,. \end{cases}$$

La tension thermodynamique serait donc

$$\boxed{U_{\mathrm{thermo}} = 1{,}25\,\mathrm{V}\,.}$$

3 La surtension U_r décrit la chute ohmique, liée à la résistance intrinsèque du système. La tension totale à appliquer vaut

$$\boxed{U = U_{\mathrm{thermo}} + \eta_{\mathrm{a}} - \eta_{\mathrm{c}} + U_r = 2{,}1\,\mathrm{V}\,.}$$

4 Un courant $I = 1{,}8\,\mathrm{A}$ pendant $\Delta t = 3600\,\mathrm{s}$ permet le passage d'une charge

$$Q = I\,\Delta t = 6480\,\mathrm{C}$$

ce qui donne une quantité de matière d'électrons échangée

$$n_e = \frac{Q}{F} = 6{,}7\cdot 10^{-2}\,\mathrm{mol}\,.$$

D'après l'équation électrochimique cathodique, il faut 2 mol d'électrons pour déposer 1 mol de nickel. La quantité de matière de nickel déposée en une heure vaut donc

$$n_{\mathrm{Ni}} = \frac{n_e}{2} = 3{,}4\cdot 10^{-2}\,\mathrm{mol}\,,$$

ce qui donne une masse

$$\boxed{m_{\mathrm{Ni}} = n_{\mathrm{Ni}}\,M_{\mathrm{Ni}} = 2{,}0\,\mathrm{g}\,.}$$

5 La branche EF est une oxydation qui se termine par un mur, ce ne peut donc être que

$$2\,\mathrm{H_2O} \longrightarrow \mathrm{O_2} + 4\,\mathrm{H^+} + 4e^- \,.$$

La branche CD est une réduction qui se finit par un palier de diffusion, c'est donc celle d'un soluté, en l'occurrence

$$\mathrm{Ni}^{2+} + 2e^- \longrightarrow \mathrm{Ni}\,.$$

Enfin, la branche AB est une réduction se finissant par un mur :

$$2\,\mathrm{H^+} + 2e^- \longrightarrow \mathrm{H_2}\,.$$

Exercice 2 : Balourd [oral banque PT]

1 Deux types de mouvement sont possibles :

▷ si m est suffisamment faible, alors le poids du balourd suffit à compenser celui de la masse et il existe une position d'équilibre ;

▷ si m est trop élevée, alors le poids de la masse entraîne le cylindre en rotation et le fil se déroule complètement.

Le moment du poids du balourd est maximal pour $\theta = \pi/2$, voir figure 1. Dans cette situation, en utilisant les bras de levier pour calculer les moments par rapport à Ox,

$$\mathcal{M}_{\mathrm{b,max}} + \mathcal{M}_m = -Mgd + m_{\mathrm{c}}ga = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{m_{\mathrm{c}} = M\frac{d}{a}\,.}$$

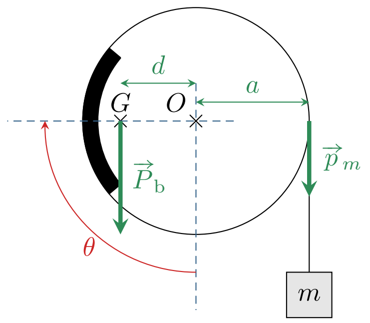

Figure 1 – Position d'équilibre lorsque $m = m_{\mathrm{c}}$.

En appliquant le théorème de la résultante cinétique à la masse m puis en supposant que le fil transmet parfaitement les efforts, on peut montrer que la force exercée par le fil sur le cylindre vaut en fait

$$\vec{F} = m\vec{g} + m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

avec $\vec{v}$ la vitesse de la masse m. On suppose ici son accélération suffisamment faible devant $\vec{g}$ pour la négliger.

2 Évidemment, on suppose $m < m_{\mathrm{c}}$. Le point d'application de $\vec{p}_{\mathrm{m}}$ ne dépend pas de θ, donc son moment par rapport à (Ox) vaut toujours

$$\mathcal{M}_m = mga\,.$$

Le moment du poids du balourd vaut

$$\mathcal{M}_{\mathrm{b}} = (\overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}_{\mathrm{b}}) \cdot \vec{e}_x = -Mgd\sin\theta$$

Dans la position d'équilibre, ces deux moments se compensent donc

$$-Mgd\sin\theta_{\mathrm{e}} + mga = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\theta_{\mathrm{e}} = \arcsin\frac{ma}{Md}\,.}$$

On retrouve la condition d'existence de la position d'équilibre : pour qu'elle soit définie, il faut

$$ma < Md \qquad \text{soit} \qquad m < \frac{Md}{a} = m_c\,.$$

3 D'après le théorème du moment cinétique,

$$J\ddot{\theta} = -Mgd\sin\theta + mga$$

On se place au voisinage de la position d'équilibre : on pose donc

$$\theta = \theta_{\mathrm{e}} + \varepsilon \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon \ll 1\,.$$

On peut alors faire un développement limité du sinus :

$$\sin(\theta_{\mathrm{e}} + \varepsilon) = \sin\theta_{\mathrm{e}} + \varepsilon\,\cos\theta_{\mathrm{e}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\,.$$

> *Il s'agit ni plus ni moins de la formule de Taylor,*
> $$f(a+h) = f(a) + h\,f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \dots$$
> *Attention au développement limité : ce n'est pas l'angle θ qui est faible, mais bien l'écart ε. Il est donc a priori faux de faire un développement limité par rapport à θ.*

L'équation différentielle devient

$$J\ddot\varepsilon + Mgd\cos\theta_e\,\varepsilon = -Mgd\sin\theta_e + mga\,,$$

et compte tenu de l'expression de $\sin\theta_e$ obtenue à la question précédente on obtient

$$\ddot\varepsilon + \frac{Mgd\cos\theta_e}{J}\varepsilon = 0\,.$$

> *Il est normal de trouver un second membre nul : l'équation différentielle porte sur l'écart à la position d'équilibre, qui est par définition nul lorsque le système est à l'équilibre.*

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$${\omega_0}^2 = \frac{Mgd\cos\theta_e}{J} = \frac{Mgd\sqrt{1-\left(\frac{ma}{Md}\right)^2}}{Ma^2} = \frac{g}{Ma^2}\sqrt{M^2d^2 - m^2a^2}$$

d'où on déduit la période des oscillations

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{Ma^2}{g\sqrt{M^2d^2-m^2a^2}}}\,.}$$

Exercice 3 : Astable compact [oral banque PT]

1 À l'aide d'un GBF, on impose en entrée un signal sinusoïdal d'amplitude suffisante (il faut pouvoir atteindre les tensions $\pm V_1$). On enregistre les deux tensions u_e et u_s à l'oscilloscope, que l'on affiche en mode XY.

Le montage est un **comparateur à hystérésis inverseur**. L'ALI fonctionne en régime de saturation. S'il est en état de saturation haute, il y reste tant que $u_e < V_1$; et s'il est en état de saturation basse, il y reste tant que $u_e > -V_1$.

2 On a $v_- = u_e$, et par un pont diviseur de tension,

$$\frac{v_+}{u_s} = \frac{R_1}{R_1+R_2}\,.$$

V_1 est la tension de basculement haut $\to$ bas. On suppose donc l'ALI en saturation haute, et il bascule lorsque

$$v_+ = v_- \qquad \text{soit} \qquad \frac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat} = u_e$$

d'où on déduit directement

$$\boxed{V_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2}V_{sat}\,.}$$

3 La courbe en traits pleins correspond à u_C : en raison de la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, la courbe en traits pointillés ne peut convenir. Celle-ci représente donc u_s : l'ALI fonctionne en régime de saturation. On observe une succession de phases de charge et de décharge du condensateur qui font basculer l'ALI lorsque $u_C = \pm V_1$.

4 Pendant la première phase, l'ALI est en saturation haute : $u_s = +V_{sat}$.

Équation différentielle : d'après la loi des mailles,

$$u_C + R_3 i_3 = +V_{sat} \qquad \text{soit} \qquad R_3C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = V_{sat}\,.$$

Solutions :

$$u_C(t) = V_{\text{sat}} + A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{avec} \qquad \tau = R_3 C$$

Condition initiale :

$$u_C(0^+) \underbrace{=}_{\text{courbe}} -V_1 \underbrace{=}_{\text{sol}} V_{\text{sat}} + A \qquad \text{d'où} \qquad A = -V_1 - V_{\text{sat}} = -\frac{2R_1 + R_2}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}\,.$$

Durée de la première phase : il y a basculement à l'instant t_1 tel que

$$u_C(t_1) \underbrace{=}_{\text{sol}} -\frac{2R_1 + R_2}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}\,\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + V_{\text{sat}} \underbrace{=}_{\text{basculement}} V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}$$

On résout donc

$$-\frac{2R_1 + R_2}{R_1 + R_2}\,\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + 1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad \text{soit} \qquad -(2R_1 + R_2)\,\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + R_1 + R_2 = R_1 \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{e}^{-t_1/\tau} = \frac{R_2}{2R_1 + R_2}$$

ce qui donne enfin

$$t_1 = \tau \ln \frac{2R_1 + R_2}{R_2}$$

On procède de même pour la deuxième phase, qui dure un temps $t_2 = t_1$ et on en déduit la période des oscillations $T = t_1 + t_2$, qui vaut

$$T = 2\tau \ln \frac{2R_1 + R_2}{R_2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{T = 2R_3 C \ln\left(1 + 2\frac{R_1}{R_2}\right)\,.}$$

Exercice 4 : Cycle de Lenoir

L'énoncé indique que l'on raisonne sur 1 kg de gaz, c'est pourquoi j'ai systématiquement adopté les notations massiques dans ce corrigé. On peut tout aussi bien choisir d'introduire une nouvelle notation m pour la masse.

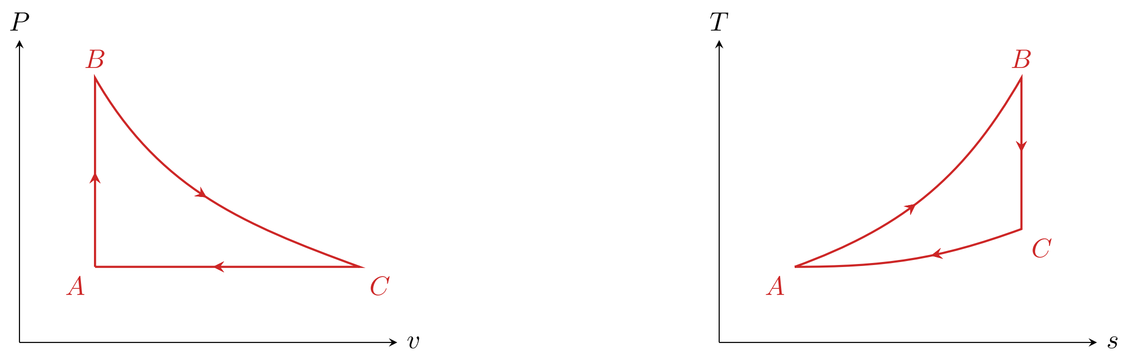

Figure 2 – Cycle de Lenoir. Représentation dans le diagramme de Clapeyron (à gauche) et dans le diagramme entropique (à droite).

$\boxed{1}$ Voir figure 2.

$\boxed{2}$ • **Isochore :** pour une isochore d'un gaz parfait, d'après l'identité thermodynamique,

$$\mathrm{d}u = T\,\mathrm{d}s - P\,\mathrm{d}v \qquad \text{donc} \qquad c_V\,\mathrm{d}T = T\,\mathrm{d}s \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{1}{c_V}\mathrm{d}s$$

et en intégrant à partir d'un point de référence noté 0

$$\ln \frac{T}{T_0} = \frac{1}{c_V}(s - s_0)$$

ce qui donne

$$\boxed{T_{\text{iso-V}} = T_0\,\mathrm{e}^{(s-s_0)/c_V}\,.}$$

Une isochore est donc une branche d'exponentielle croissante.

- **Isobare :** de même, en raisonnant sur l'enthalpie,

$$\mathrm{d}h = T\,\mathrm{d}s + v\,\mathrm{d}P \qquad \text{donc} \qquad c_P\,\mathrm{d}T = T\,\mathrm{d}s$$

ce qui conduit à

$$\boxed{T_{\text{iso-P}} = T_0\,\mathrm{e}^{(s-s_0)/c_P}\,.}$$

On obtient également une branche d'exponentielle croissante.

- **Allure du cycle :** voir figure 2.

3 Il y a production de travail lorsque le volume varie.

- **Étape BC :** il s'agit d'une adiabatique d'un gaz parfait, donc d'après le premier principe appliqué au gaz,

$$\Delta u_{BC} = w_{BC} + 0 \qquad \text{d'où} \qquad w_{BC} = c_V(T_C - T_B)$$

> *Pour calculer le travail échangé au cours d'une adiabatique, il est presque toujours beaucoup (beaucoup) plus simple d'utiliser le premier principe et la loi de Joule plutôt que de se lancer dans un calcul d'intégrale avec la loi de Laplace.*

- **Étape CA :** il s'agit d'une isobare d'un gaz parfait, donc d'après le premier principe et l'équation d'état,

$$w_{CA} = -\int_{\widehat{CA}} P\,\mathrm{d}v = -P_A v_A + P_C v_C = r(T_C - T_A)$$

> *Rappelons que l'équation d'état massique d'un gaz parfait s'écrit*
>
> $$P\frac{V}{m} = \frac{n}{m}RT = \frac{R}{M}T \qquad \textit{soit} \qquad Pv = rT\,.$$

- **Bilan :** sur l'ensemble du cycle,

$$w = w_{BC} + w_{CA} = c_V(T_C - T_B) + r(T_C - T_A)$$

et comme $c_V = r/(\gamma - 1)$ on a finalement

$$\boxed{w = \frac{r}{\gamma - 1}(T_C - T_B) + r(T_C - T_A)\,.}$$

4 Un transfert thermique est reçu de la part de la source chaude au cours de l'étape AB (un transfert thermique est cédé à la source froide au cours de CA). D'après le premier principe,

$$\Delta u_{AB} = 0 + q_\text{c} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{q_\text{c} = \frac{r}{\gamma - 1}(T_B - T_A)\,.}$$

5 Le rendement d'un moteur est défini par

$$\eta = -\frac{w}{q_\text{c}}$$

ce qui donne

$$\eta = \frac{T_B - T_C}{T_B - T_A} + (\gamma - 1)\frac{T_A - T_C}{T_B - T_A} = \frac{T_B - T_A - \gamma(T_C - T_A)}{T_B - T_A} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\eta = 1 - \gamma\frac{T_C - T_A}{T_B - T_A}\,.}$$

D'après la loi de Laplace au cours de l'étape isentropique BC,

$$T_B v_B^{\gamma-1} = T_C v_C^{\gamma-1} \qquad \text{soit} \qquad T_B = T_C\,\tau^{\gamma-1}$$

D'après l'équation d'état au cours de l'étape isobare CA,

$$\begin{cases} Pv_C = rT_C \\ Pv_A = rT_A \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad \frac{T_A}{v_A} = \frac{T_C}{v_C} \qquad \text{soit} \qquad T_A = \frac{T_C}{\tau}\,.$$

Finalement,

$$\eta = 1 - \gamma\frac{T_C - T_C/\tau}{T_C\,\tau^{\gamma-1} - \frac{T_C}{\tau}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\eta = 1 - \gamma\frac{\tau - 1}{\tau^\gamma - 1}\,.}$$