



# Jeudi 6 juin

## Annales de concours

### Exercice 1 : Étude expérimentale d'un filtre

[adapté oral banque PT]

1 Le signal créneau a une amplitude 5 V, une période de 2 ms soit une fréquence de 500 Hz et une valeur moyenne nulle.

2 Dans la limite des basses fréquences,

$$\underline{H} \sim \frac{-2H_0\xi jx}{1} \rightarrow 0,$$

et dans la limite haute fréquence

$$\underline{H} \sim \frac{-2H_0\xi jx}{-x^2} = \frac{2H_0\xi j}{x} \rightarrow 0,$$

ce qui correspond bien aux comportements asymptotiques d'un passe bande.

Le module de la fonction de transfert est tel que

$$|\underline{H}| = \frac{2H_0\xi x}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4\xi^2 x^2}}.$$

Il est maximal en  $x = 1$  où il vaut

$$|\underline{H}|_{\max} = H_0.$$

Les pulsations de coupure  $x_c$  sont définies par

$$|\underline{H}(x=x_c)| = \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}}$$

et sont donc solution de l'équation

$$\frac{2\xi x}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4\xi^2 x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{soit} \quad \frac{(1-x^2)^2}{4\xi^2 x^2} + 1 = 2$$

que l'on peut encore écrire

$$\frac{(1-x^2)^2}{4\xi^2 x^2} = 1 \quad \text{d'où} \quad \frac{1-x^2}{2\xi x} = \pm 1$$

ce qui s'écrit sous forme de deux équations polynômiales

$$x^2 \pm 2\xi x - 1 = 0$$

dont on cherche les racines positives. Les deux polynômes ont même discriminant  $4\xi^2 + 4 = 4(1 + \xi^2)$ , et leurs racines positives sont respectivement

$$x_+ = \frac{-2\xi + 2\sqrt{1 + \xi^2}}{2} \quad \text{et} \quad x_- = \frac{2\xi + 2\sqrt{1 + \xi^2}}{2}$$

La bande passante vaut donc

$$\Delta x = x_- - x_+ = 2\xi$$

soit enfin

$$\Delta f = 2\xi f_0 = 150 \text{ Hz.}$$

3 Pour  $x = 1$ ,

$$\underline{H}(x=1) = -H_0 \quad \text{donc} \quad \arg \underline{H}(x=1) = -1.$$

Pour  $x = 1/3$ ,

$$\underline{H}(x = 1/3) = -\frac{2H_0\xi j/3}{8/9 + 2j\xi/3} = -\frac{6H_0j\xi}{8 + 6j\xi} = -\frac{0,6 j}{8 + 0,3j}$$

ce qui ne se simplifie pas du tout.

4 On constate que le signal créneau est impair,  $v_e(-t) = -v_e(t)$ , soit en termes de développement de Fourier

$$-\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2\pi kft) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(2\pi kft) = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2\pi kft) - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(2\pi kft)$$

d'où on déduit finalement

$$\boxed{\forall k, B_k = 0.}$$

Le spectre présente des pics à 500 Hz (amplitude  $A$ ), 1,5 kHz (amplitude  $A/3$ ), 2,5 kHz (amplitude  $A/5$ ), etc.

5 Si on modélise le signal de sortie par une unique sinusoïde, celle-ci aurait une période égale à un tiers de la période du créneau (soit une fréquence  $3f$ ) et une amplitude que l'on peut estimer égale à 1 V, en tenant compte de l'échelle différente.

6 On constate que la troisième harmonique du signal créneau correspond exactement à la fréquence centrale du filtre, ce qui explique qu'elle domine le signal de sortie. L'autre sinusoïde à considérer serait le fondamental du créneau, de fréquence  $f = f_0/3$  : les variations d'amplitude de la sinusoïde dominante semblent avoir la même période que le signal créneau. Cependant, cette sinusoïde est très atténuée car elle est hors de la bande passante du filtre.

Le rapport des amplitudes de ces sinusoïdes dans le signal de sortie est donné par

$$\frac{A_{1,s}}{A_{3,s}} = \frac{|\underline{H}(1/3)| A_{1,e}}{|\underline{H}(1)| A_{3,e}} = \frac{|\underline{H}(1/3)|}{|\underline{H}(1)|} \frac{A_{1,e}}{A_{3,e}} = 0,075 \times 3$$

ce qui donne finalement

$$\boxed{\frac{A_{1,s}}{A_{3,s}} = 0,2.}$$

## Exercice 2 : Cycle de Hirn

[exemple officiel banque PT]

1 Voir figure ??.

2 Cf. cours pour la démonstration. Le premier principe industriel s'écrit

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = w_i + q \quad \text{ou} \quad D_m (\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p) = \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_{th},$$

où la notation  $\Delta$  désigne la différence de la grandeur d'état massique entre la sortie et l'entrée de l'organe étudié,  $w_i$  (resp.  $\mathcal{P}_i$ ) désigne le travail massique (resp. la puissance) indiqué et  $q$  (resp.  $\mathcal{P}_{th}$ ) le transfert thermique massique (resp. la puissance thermique) reçus par le fluide dans l'organe étudié.

3 Sur le diagramme, on lit les enthalpies massiques

$$h_B = 3500 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \quad \text{et} \quad h_C = 2400 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

En négligeant les variations d'énergie cinétique et potentielle dans la turbine, et comme elle est adiabatique, le premier principe donne

$$\boxed{\mathcal{P}_m = -\mathcal{P}_i = D_m(h_B - h_C) = 93 \text{ kW}.}$$

4 La donnée du titre en vapeur permet de placer le point  $C'$  sur la figure 1. On lit alors l'entropie massique  $s_{C'} = 7 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $s_C = 6,7 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ , ce qui permet d'en déduire le taux de production d'entropie

$$\boxed{\sigma = D_m(s_{C'} - s_C) = 25,5 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}.}$$

La création d'entropie est due aux inhomogénéités de toute sorte dans la turbine. L'enthalpie massique en sortie de turbine vaut désormais  $h_{C'} = 2500 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ , d'où on déduit

$$\boxed{\mathcal{P}'_m = D_m(h_B - h_{C'}) = 85 \text{ kW}.}$$

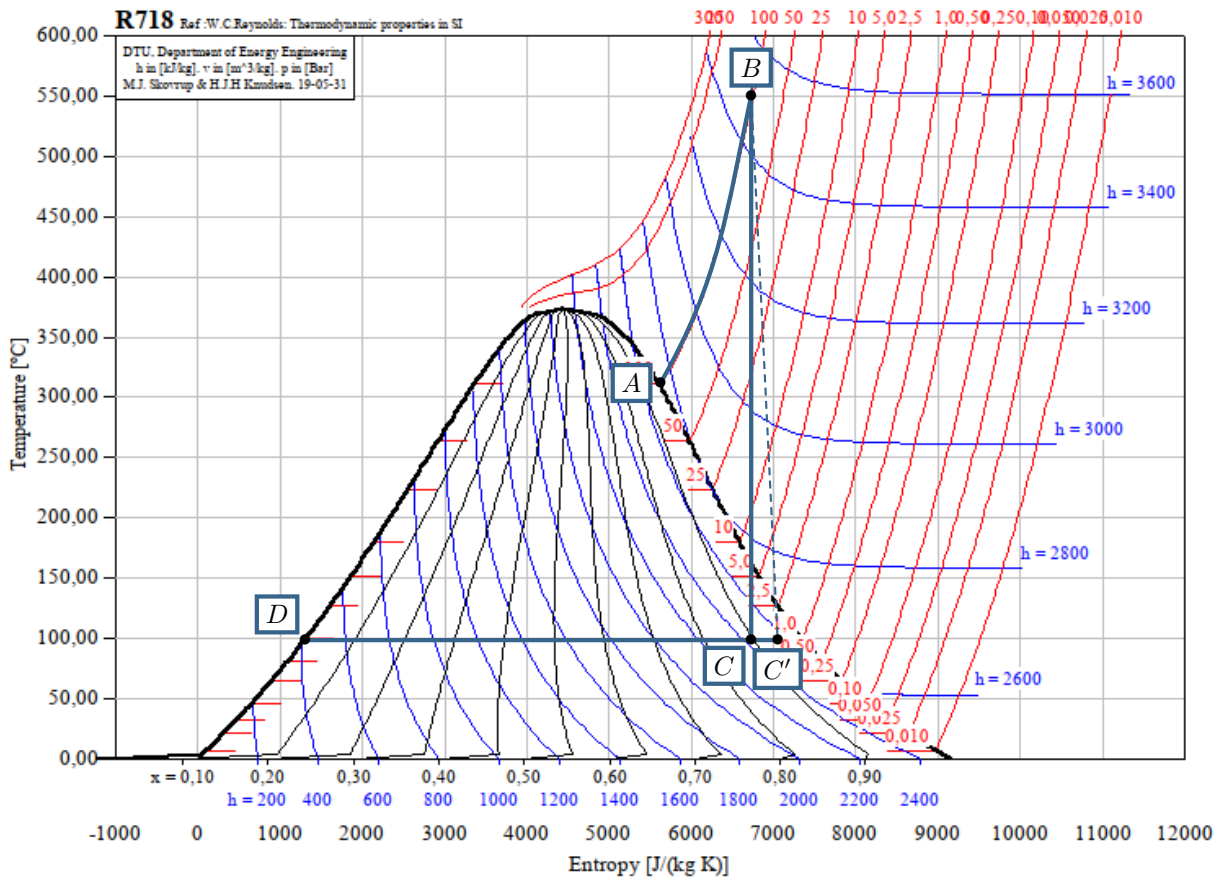


Figure 1 – Diagramme entropique complété.

Le rendement isentropique vaut donc

$$\eta_S = \frac{P'_m}{P_m} = 91\%.$$

5 Supposons le changement d'état total dans le condenseur pour placer le point *D* sur le diagramme. Le débit massique se conserve, le débit volumique en sortie du condenseur est donc

$$D_V = \frac{D_m}{\rho} = 85 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}.$$

L'enthalpie massique en *D* vaut  $h_D = 400 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  : la puissance thermique cogénérée est donc

$$P_{co} = D_m(h_{C'} - h_D) = 180 \text{ kW}.$$

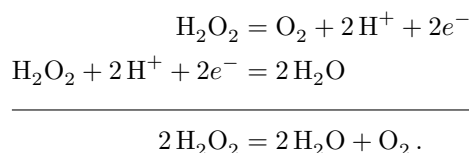
Le coefficient de cogénération est donc

$$c = \frac{P_{co}}{P'_m} = 47\%.$$

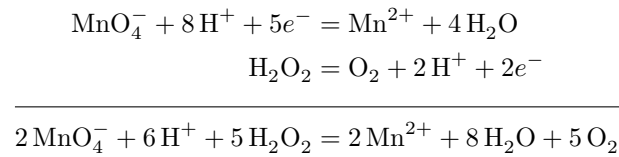
### Exercice 3 : Décomposition de l'eau oxygénée

[oral banque PT]

L'énoncé est pour le moins vague pour permettre au candidat d'identifier la réaction ! Il faut deviner qu'il s'agit d'une dismutation de l'eau oxygénée. La donnée permet d'identifier les couples : il faut une molécule ne contenant que O et H pour laquelle O est au NO 0, c'est-à-dire  $O_2$ , et une autre où O est au NO -II, c'est-à-dire  $H_2O$ . Bonne chance ... La réaction dont on suit la cinétique s'écrit donc



À un instant donné, la concentration en eau oxygénée est mesurée grâce à un titrage par du permanganate (on parle de « manganimétrie »). La réaction de titrage s'écrit



**1** Ne pas oublier qu'il faut deux électrodes dans un montage potentiométrique, une électrode de travail et une électrode de référence.

**2** D'après le bilan de matière et la loi de vitesse postulée,

$$v = \underbrace{\frac{d\xi}{dt}}_{\text{BM}} = -\frac{1}{2} \underbrace{\frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]}{dt}}_{\text{LV}} = k[\text{H}_2\text{O}_2].$$

Par séparation des variables et intégration,

$$\frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]}{[\text{H}_2\text{O}_2]} = -2k dt \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ln[\text{H}_2\text{O}_2] - \ln[\text{H}_2\text{O}_2]_0 = -2kt.}$$

Comme le volume équivalent est proportionnel à la concentration en eau oxygénée, tracer  $f(V_E) = \ln V_E$  au cours du temps donne une droite d'équation

$$\boxed{f(V_E) = \ln V_E = -2kt + \ln V_{E,0}}$$

**3** Par lecture graphique, la droite tracée a une pente

$$a = \frac{1,75 - 3,5}{40 - 0} = -4 \cdot 10^{-2}$$

ce qui donne une constante de vitesse

$$\boxed{k = -\frac{a}{2} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ min}^{-1}.}$$

La concentration initiale en  $\text{H}_2\text{O}_2$  étant donnée, on en déduit

$$\boxed{v_0 = k[\text{H}_2\text{O}_2]_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}}$$

**4** Notons  $C$  la concentration en permanganate. À l'équivalence du titrage, le permanganate et l'eau oxygénée sont limitants tous les deux. En notant  $\xi_E$  l'avancement de la réaction de titrage à l'équivalence,

$$\begin{cases} CV_{E,0} - 2\xi_E = 0 \\ [\text{H}_2\text{O}_2]_0 V_0 - 5\xi_E = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \xi_E = \frac{CV_{E,0}}{2} = \frac{[\text{H}_2\text{O}_2]_0 V_0}{5}$$

et ainsi

$$\boxed{C = \frac{2}{5} \frac{V_0}{V_{E,0}} [\text{H}_2\text{O}_2]_0 = 3,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.}$$