TD 9 et 10 – Préparation à l'oral *Correction*

Vendredi 14 juin

Résolution de problème

Exercice 1 : Décollage d'une montgolfière [oral CCP]

Modélisation de la montgolfière par une sphère, de rayon estimé à 9 m à partir de la photo.

Estimons la masse d'air m_{air} contenue dans la montgolfière. L'air est à la température intérieure T_{int} Faute de précisions à ce sujet, on considère que la pression dans la montgolfière est égale à la pression atmosphérique. D'après la loi des gaz parfaits,

$$m_{\text{air}} = \frac{MPV}{RT_{\text{int}}} = 3 \cdot 10^3\,\text{kg}\,.$$

> *Oublier de calculer la masse d'air intérieur conduit à un résultat final aberrant (la montgolfière pourrait soulever 4 tonnes), en nette contradiction avec le nombre de passagers qu'on peut distinguer sur la photo. Il est attendu du candidat qu'il s'en apperçoive.*

Lorsqu'elle est en vol, la montgolfière est soumise à son poids et à la poussée d'Archimède.

- ▷ Poids : vertical vers le bas de norme $(M_0 + m_{\text{air}} + m)g$ (m est la charge de la montgolfière) ;
- ▷ Poussée d'Archimède : verticale vers le haut de norme $\rho_{\text{air,ext}} V g$.

Attention, la masse volumique à considérer dans l'expression de la poussée d'Archimède est celle de l'air *extérieur*, à température $T_{\text{ext}} \neq T_{\text{int}}$. La montgolfière décolle si la poussée d'Archimède l'emporte sur le poids, c'est-à-dire si

$$\rho_{\text{air,ext}} V g > (M_0 + m_{\text{air}} + m)g \qquad \text{soit} \qquad m < \rho_{\text{air,ext}} V - M_0 - m_{\text{air}}\,.$$

Numériquement, en prenant $\rho_{\text{air,ext}} = 1{,}3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ (ordre de grandeur à connaître, qu'on peut retrouver en prenant un ordre de grandeur de T_{ext}) :

$$\boxed{m < 700\,\text{kg}\,.}$$

Cela correspondrait à un nombre de passagers compris avec leur équipement (sacs, appareil photo, etc.) compris entre cinq et dix, ce qui semble raisonnable compte tenu de la photo.

Exercices

Exercice 2 : Transport du méthane

1 Bilan de matière dans l'état final :

$$n_{\text{gaz,f}} = n_{\text{CH}_4,\text{f}} + n_{\text{H}_2,\text{f}} = (n - \xi_\text{f}) + 2\xi_\text{f} = n + \xi_\text{f}$$

2 Bilan de matière et $n_{\text{gaz,f}}$ déterminé à la question précédente :

$$p_{\text{CH}_4} = \frac{n-\xi_\text{f}}{n+\xi_\text{f}} P = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} P \qquad \text{et} \qquad p_{\text{H}_2} = \frac{2\xi_\text{f}}{n+\xi_\text{f}} P = \frac{2\alpha}{1+\alpha} P$$

> *Autre méthode (plus longue) : passer par la loi des GP, mais attention, c'est la pression qui est constante et pas le volume, donc appliquer la loi des GP dans l'état initial ne donne rien d'intéressant car $V_i \neq V_f$*

3 Compte tenu de la valeur de $K^\circ \ll 1$, on peut supposer la réaction très peu déplacée et approximer

$$p_{\text{CH}_4} \simeq P \qquad \text{et} \qquad p_{\text{H}_2} \simeq 2\alpha\, P$$

D'après la loi d'action des masses,

$$K^\circ = \frac{1 \times \left(\dfrac{p_{H_2}}{p^\circ}\right)^2}{\dfrac{p_{CH_4}}{p^\circ}} = \frac{4\alpha^2\, P}{p^\circ}$$

d'où on déduit

$$\alpha = \sqrt{\frac{K^\circ p^\circ}{4P}} = 2 \cdot 10^{-6}\,.$$

On récupère la quasi-totalité du méthane en sortie du gazoduc, ce qui est souhaitable du point de vue industriel.

4 D'après le bilan de matière,

$$2\xi_f = n_{H_2} = x_{H_2}(n + \xi_f) \simeq 2\alpha n$$

et

$$n_C = \xi_f = \alpha n$$

Une masse $m_{CH_4} = 1 \cdot 10^6$ g correspond à $n = \dfrac{m_{CH_4}}{M_{CH_4}} = 6{,}2 \cdot 10^4$ mol, et donne donc

$$n_C = 0{,}12\,\text{mol} \qquad \text{soit} \qquad m_C = 1{,}4\,\text{g}\,.$$

Exercice 3 : Mesure d'impédance par détection synchrone [adapté oral TPE-EIVP MP]

1 Passe-bas, qui peut éliminer les hautes fréquences du spectre d'un signal ou agir en moyenneur et intégrateur sur les signaux hautes fréquences. Cf. cours pour la suite.

2 Comme l'impédance d'entrée du multiplieur est infinie, alors $\underline{Z}$ et R_0 sont traversés par le courant i, donc

$$v_1(t) = R_0 i = R_0 I_0 \cos(\omega t)$$

et

$$\underline{V_2} = \underline{Z} I_0\, e^{j\omega t} \qquad \text{soit} \qquad v_2(t) = \operatorname{Re} \underline{V_2} = X I_0 \cos(\omega t) - Y I_0 \sin(\omega t)\,.$$

3 Des formules de trigonométrie permettent de montrer que

$$\cos(\omega t)\cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}\left[\cos(2\omega t + \varphi) + \cos\varphi\right]$$

$$\operatorname{Re}\left(e^{j\omega t}\, e^{j(\omega t + \varphi)}\right) = \cos(2\omega t + \varphi)$$

Ainsi, on ne peut pas calculer des produits en représentation complexe :

$$\underline{V_3} \neq k \underline{V_1}\, \underline{V_2}$$

> *Un produit est une opération non-linéaire, source d'enrichissement spectral.*

4 On déduit de ce qui précède

$$v_3(t) = k v_1(t) v_2(t) = k R_0 X {I_0}^2 \cos^2(\omega t) - k R_0 {I_0}^2 Y \cos(\omega t)\sin(\omega t)\,.$$

Or $\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2\omega t)\right)$ et $\cos(\omega t)\sin(\omega t) = \frac{1}{2}\sin(2\omega t)$, d'où

$$v_3(t) = \frac{1}{2} k R_0 X {I_0}^2 + \frac{1}{2} k R_0 X {I_0}^2 \cos(2\omega t) - \frac{1}{2} k R_0 {I_0}^2 Y \sin(2\omega t)\,.$$

Son spectre est donc composé d'un pic à fréquence nulle et d'un pic à la pulsation 2ω (dont il n'est pas immédiat de déterminer l'amplitude).

5 Si la pulsation de coupure $1/R_1C_1 \ll 2\omega$ alors le signal de sortie s_s ne conserve que la composante continue. Comme tout est connu, une mesure de son amplitude permet de déterminer X.

6 Si on met un condensateur C_0 à la place de R_0, alors

$$\underline{V_2} = \frac{1}{jC_0\omega} I_0\, e^{j\omega t} = \frac{I_0}{C\omega}\, e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

ce qui permet d'écrire

$$v_2(t) = \frac{I_0}{C\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{I_0}{C\omega}\sin(\omega t)\,.$$

On a alors

$$v_3(t) = \frac{k X {I_0}^2}{C\omega}\cos(\omega t)\sin(\omega t) - \frac{Y {I_0}^2}{C\omega}\sin^2(\omega t)\,.$$

La logique est la même que précédemment, puisque $\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\omega t)\right)$.

Exercice 4 : Expérience de Rüchart [oral banque PT]

1 La bille est soumise sur le dessus à la pression atmosphérique et sur le dessous à la pression intérieure au flacon. Lorsqu'elle s'enfonce, elle comprime l'air intérieur du flacon, ce qui créée une surpression qui tend à faire remonter la bille et réciproquement lorsqu'elle est trop haute elle subit une dépression qui la fait redescendre. La présence d'oscillations montre que les frottements sont faibles.

Initialement, la pression dans le flacon est égale à la pression atmosphérique (1 bar) et la tension est de 150 mV : le coefficient d'étalonnage est donc

$$\boxed{k = 150\,\mathrm{mV}\cdot\mathrm{bar}^{-1}\,.}$$

2 Dans l'état final la bille est à l'équilibre sous l'effet de son poids et des forces de pression, donc en projetant la condition d'équilibre sur l'axe vertical

$$0 = mg + P_{\mathrm{atm}}S - P_{\text{éq}}S \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P_{\text{éq}} = P_{\mathrm{atm}} + \frac{mg}{S} = 1{,}01\,\mathrm{bar}\,,}$$

ce qui correspond à une tension de 151,5 mV, conforme à la courbe donnée.

3 Le temps caractéristique de diffusion au travers des parois du flacon d'épaisseur e est de

$$\boxed{\tau = \frac{e^2}{D} = 450\,\mathrm{s}\,.}$$

Ce temps est très supérieur à la durée totale de l'expérience, qui peut donc être considérée comme adiabatique. Les frottements étant faibles, et en supposant les inhomogénéités faibles également, la transformation est donc isentropique.

4 D'après la loi de Laplace,

$$PV^\gamma = \mathrm{cte} \qquad \text{soit} \qquad \ln P + \gamma \ln V = \mathrm{cte}\,,$$

et en différentiant

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} + \gamma\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0\,.$$

Les variations de volume et de pression étant très faibles devant les valeurs d'équilibre, on peut réécrire cette relation sous la forme

$$\frac{P - P_{\text{éq}}}{P_{\text{éq}}} + \gamma\frac{V - V_0}{V_0} = 0\,.$$

En posant $V = V_0 - Sz$ (axe z orienté vers le bas) on obtient

$$\frac{P - P_{\text{éq}}}{P_{\text{éq}}} - \gamma\frac{Sz}{V_0} = 0$$

ce qui devient

$$\boxed{P - P_{\text{éq}} = \gamma\frac{SP_{\text{éq}}}{V_0}z\,.}$$

5 En reprenant les mêmes forces que précédemment,

$$m\ddot{z} = mg + P_{\mathrm{atm}}S - \left(P_{\text{éq}} + \gamma\frac{SP_{\text{éq}}}{V_0}z\right)S$$

$$m\ddot{z} = -\gamma\frac{S^2P_{\text{éq}}}{V_0}z$$

$$\boxed{\ddot{z} + \gamma\frac{S^2P_{\text{éq}}}{mV_0}z = 0\,.}$$

La pression étant proportionnelle à l'altitude z, l'équation en pression s'écrit simplement

$$\boxed{\ddot{P} + \gamma\frac{S^2P_{\text{éq}}}{mV_0}P = \gamma\frac{S^2P_{\text{éq}}^2}{mV_0}\,.}$$

6 On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, de pulsation propre telle que

$$ {\omega_0}^2 = \gamma \frac{S^2 P_{\text{éq}}}{m V_0} \,. $$

L'indice isentropique γ est donc relié à la période des oscillations par

$$ \boxed{\gamma = \frac{4\pi^2}{{T_0}^2} \frac{m V_0}{S^2 P_{\text{éq}}} = 1{,}36 \,,} $$

proche de la valeur de 1,4 attendue pour un gaz parfait diatomique comme l'air.

Exercice 5 : Autour du manganèse [oral banque PT]

Ça se fait de tête !

Étienne Thibierge, 13 juin 2019, www.etienne-thibierge.fr