Préparation à l'oral — *Correction*

Problèmes ouverts

Exercice 1 : Dipôles masqués — oral CCINP MP | 3 | 1

▷ *Problème ouvert.*

▷ Comme le courant dans le circuit est non nul en régime continu, alors le condensateur est forcément monté en parallèle d'un autre dipôle ;
▷ Comme la tension de sortie est nulle en basse fréquence, elle est forcément mesurée aux bornes de la bobine ;
▷ Comme la tension de sortie est nulle en haute fréquence, elle est forcément mesurée aux bornes du condensateur.

⇝ Le dipôle D_2 est nécessairement une association parallèle entre la bobine et le condensateur ;

⇝ Le dipôle D_1 est donc forcément la résistance : s'il s'agissait d'un fil on aurait $s = e$ à toute fréquence ;

⇝ Le montage est donc celui de la figure 1.

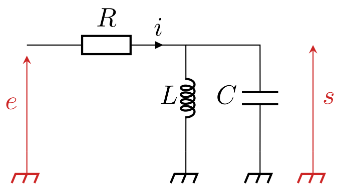

Figure 1 – Les dipôles démasqués !.

• **Analyse en régime continu :** la bobine équivaut à un fil, donc la tension aux bornes de la résistance est directement égale à E, d'où avec la loi d'Ohm

$$E = RI \qquad \text{soit} \qquad \boxed{R = \frac{E}{I} = 3\,\mathrm{k\Omega}\,.}$$

• **Analyse en régime sinusoïdal :** l'admittance équivalente de l'association de la bobine et du condensateur est

$$\underline{Y} = \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega\,.$$

Avec un pont diviseur de tension,

$$\underline{H} = \frac{1/\underline{Y}}{R + 1/\underline{Y}} = \frac{1}{1 + \underline{Y}R} \qquad \text{soit} \qquad \underline{H} = \frac{1}{1 + \dfrac{R}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}RC\omega}\,.$$

On peut donc identifier avec la forme canonique donnée,

$$\begin{cases} \dfrac{R}{\mathrm{j}L\omega} = -\dfrac{\mathrm{j}Q\omega_0}{\omega} \\ \mathrm{j}RC\omega = \mathrm{j}Q\dfrac{\omega}{\omega_0} \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} Q\omega_0 = \dfrac{R}{L} \\ \dfrac{Q}{\omega_0} = RC \end{cases}$$

D'après les valeurs expérimentales,

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 6{,}3 \cdot 10^3\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}} \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 5\,.$$

On en déduit

$$\boxed{L = \frac{R}{Q\omega_0} = 95\,\mathrm{mH} \qquad \text{et} \qquad C = \frac{Q}{\omega_0 R} = 2{,}7 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{F}\,.}$$

Exercice 2 : Sieste en hamac 3 | 1

▷ *Problème ouvert.*

- **Modélisation**

Pour faire simple, je te modélise par un point matériel de masse m suspendu par des cordes de même longueur, supposées inextensibles et tendues. Une modélisation par un solide indéformable ne changerait qualitativement rien. Le dispositif est donc symétrique, voir figure 2. Pour minimiser le risque que les cordes cassent, il faut minimiser leur force de tension, c'est-à-dire qu'il faut trouver la valeur de α qui minimise la norme de $\vec{T}$ et $\vec{T'}$, que je note plus simplement T et T'.

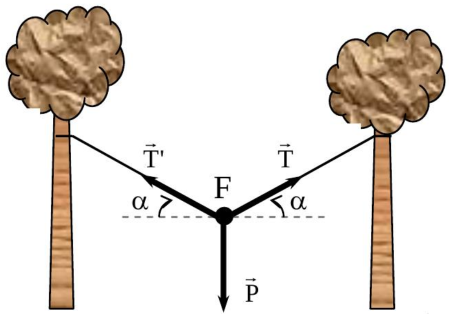

Figure 2 – Un point matériel en train de faire la sieste dans son hamac.

- **Mise en équation**

Tu es le système en « mouvement » dans le référentiel terrestre, qu'on peut considérer galiléen. On y fixe un repère (Oxy). Tu es soumis à
▷ ton poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$;
▷ la force de tension $\vec{T} = T(\cos\alpha\,\vec{u}_x + \sin\alpha\,\vec{u}_y)$;
▷ la force de tension $\vec{T'} = T'(-\cos\alpha\,\vec{u}_x + \sin\alpha\,\vec{u}_y)$;
Par application du théorème de la résultante cinétique, on a vectoriellement puis en projection

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{T'} = \vec{0} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} (T - T')\cos\alpha = 0 \\ -mg + (T + T')\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

On en déduit finalement que $T' = T$, ce dont on pouvait se douter vue la symétrie des cordes, et

$$2T\sin\alpha = mg \qquad \text{d'où} \qquad T = T' = \frac{mg}{2\sin\alpha}$$

La tension des cordes est d'autant plus faible que $\sin\alpha$ est grand, donc que α est proche de $\pi/2$.

- **Conclusion**

Il vaut mieux que tu laisses pendre le hamac pour être sûr de ne pas tomber ... mais je ne sais pas si ce sera très favorable pour ta sieste :)

Exercice 3 : Chariot à niveau constant 3 | 1

▷ *Problème ouvert.*

Supposons que le distributeur porte N plateaux, tous d'épaisseur $e = 1\,\text{cm}$ et de masse $m = 200\,\text{g}$. Quelle que soit la valeur de N, le sommet de la pile de plateaux se trouve $h = 10\,\text{cm}$ sous le point d'attache des deux ressorts. On néglige le poids du support à plateaux devant celui des plateaux. Comme les plateaux sont évidemment immobiles (...) alors la force exercée par les deux ressorts doit compenser le poids des plateaux, ce qui se traduit par

$$2k(Ne + h - \ell_0) = Nmg \qquad \text{soit} \qquad 2k(h - \ell_0) + N(2ke - mg) = 0$$

Cette condition devant être vérifiée pour toute valeur de N, on en déduit les deux égalités

$$\begin{cases} 2k(h-\ell_0) = 0 \\ 2ke - mg = 0 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\begin{cases} \ell_0 = h = 10\,\mathrm{cm} \\ k = \dfrac{mg}{2e} = 100\,\mathrm{N\cdot m^{-1}} \end{cases}}$$

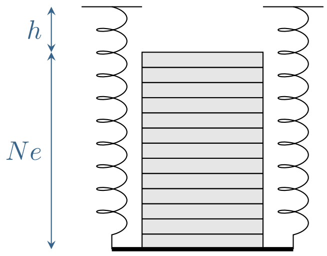

Figure 3 – Distributeur de plateaux.

> *Pour identifier le système d'équations, on peut également raisonner d'abord sur le cas $N = 0$ qui donne la première équation du système, puis simplifier l'équation issue du PFD, et en déduire la deuxième équation du système.*

Exercice 4 : Décollement du toit d'un cabanon

inspiré oral banque PT | 3 | 2

▷ *Problème ouvert.*

On note H la hauteur du cabanon. L'écoulement de l'air est supposé homogène, permanent, parfait et incompressible, on indice 1 les grandeurs au niveau du cabanon et 0 loin de celui-ci.

Représentons figure 4 les lignes de champ de l'écoulement du vent. Raisonnons sur une longueur L dans le plan orthogonal à celui de la figure. Un tube de champ a donc une section $S_0 = L \times 3H/2$ loin de l'obstacle, seulement $S_1 = L \times H/2$ au niveau de l'obstacle.

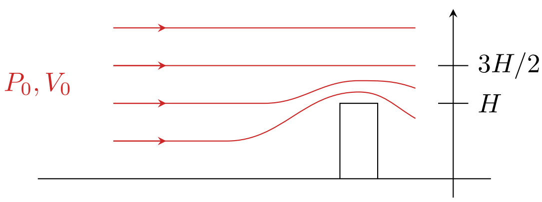

Figure 4 – Lignes de champ autour du cabanon.

La conservation du débit donne

$$V_0 \times \frac{3LH}{2} = V_1 \times \frac{LH}{2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{V_1 = 3V_0\,.}$$

Utilisons la relation de Bernoulli pour calculer la pression au dessus du cabanon,

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{{V_0}^2}{2} = \frac{P_1}{\rho} + \frac{{V_1}^2}{2} = \frac{P_1}{\rho} + \frac{9{V_0}^2}{2}$$

d'où on déduit

$$wifiplateP_1 = P_0 - 4\rho {V_0}^2\,.$$

L'air à l'intérieur du cabanon est au repos à la pression P_0. Le toit de surface S subit donc une force résultante $(P_0 - P_1)S$ verticale vers le haut car $P_1 < P_0$. Le vent peut soulever le toit de la cabane lorsque cette force de pression compense le poids, soit

$$4\rho S {V_0}^2 > mg \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{V_0 > \sqrt{\frac{mg}{4\rho S}} = 3{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 11\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}\,.}$$

Le résultat numérique est plus que douteux et on peut clairement se poser des questions sur la validité du modèle utilisé ! En effet, ou bien le toit est juste posé mais alors le vent s'engouffre aussi sous le toit et la dépression est nettement plus faible, ou bien il est fixé et auquel cas il faut une dépression nettement plus importante pour le soulever, car il est alors nécessaire de l'arracher du toit.

Exercice 5 : Harfang des neiges inspiré oral CCINP PSI | 3 | 2

▷ *Problème ouvert.*

Comme le suggère l'énoncé, modélisons la chouette harfang par une boule de rayon $a = 15\,\mathrm{cm}$. Raisonnons sur une durée $\Delta t = 1\,\text{heure} = 3600\,\mathrm{s}$.

Commençons d'abord par déterminer l'énergie libérée par le métabolisme de la chouette. Déterminons la quantité de matière de dioxygène consommée pendant cette durée, correspondant au volume $V = 1{,}4\,\mathrm{L}$. D'après l'équation d'état des gaz parfaits,

$$n_{\mathrm{O_2}} = \frac{PV}{RT} = 7 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mol}\,.$$

L'oxygène étant le réactif limitant de la réaction métabolique (la chouette a mangé suffisamment de lemmings pour avoir des réserves de glucose !), l'avancement maximal de la réaction est $n/6$, d'où on déduit le transfert thermique libéré par la réaction de métabolisme,

$$Q_{\text{métab}} = -\frac{n_{\mathrm{O_2}}}{6}\,\Delta_{\mathrm{r}}H^\circ\,.$$

en calculant $\Delta_{\mathrm{r}}H^\circ = -2{,}8 \cdot 10^3\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$.

En parallèle, l'oiseau perd de l'énergie par conduction thermique au travers du plumage (et convection, ce que l'on néglige ici). Le transfert thermique cédé par conduction pendant la durée Δt vaut

$$Q_{\text{cond}} = \frac{1}{R_{\text{th}}}(T_{\text{int}} - T_{\text{ext}})\,\Delta t\,.$$

Comme la température de l'oiseau ne varie pas, un bilan enthalpique donne

$$\Delta H \underset{\substack{\uparrow \\ \text{équilibre}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} Q_{\text{métab}} - Q_{\text{cond}}$$

d'où on déduit

$$\frac{4\pi\lambda\, a^2}{e}(T_{\text{int}} - T_{\text{ext}})\,\Delta t = -\frac{n_{\mathrm{O_2}}}{6}\,\Delta_{\mathrm{r}}H^\circ$$

et ainsi

$$\boxed{e = -\frac{24\pi\,\lambda a^2\,(T_{\text{int}} - T_{\text{ext}})\,\Delta t}{n_{\mathrm{O_2}}\,\Delta_{\mathrm{r}}H^\circ} = 4\,\mathrm{cm}\,.}$$

Exercice 6 : Combinaison de plongée oral CCINP PSI | 3 | 2

▷ *Résolution de problème.*

On est a priori dans un régime transitoire, mais vues les données on suppose pouvoir le traiter dans le cadre de l'ARQS ... et donc utiliser les résistances thermiques.

1 La puissance P_{conv} est un flux, auquel on peut associer la résistance thermique $R_{\text{conv}} = 1/\alpha S = 0{,}05\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$ en prenant $S \sim 2\,\mathrm{m^2}$ la surface de la peau. La peau et cette résistance conducto-convective sont montées en série, donc

$$R_{\text{tot}} = R_{\text{conv}} + R_{\text{peau}} = 8 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}\,.$$

Le premier principe appliqué au baigneur pendant une durée infinitésimale dt donne

$$\mathrm{d}H = mc_{\text{corps}}\,\mathrm{d}T = -\Phi_{\text{tot}}\mathrm{d}t + P_{\text{corps}}\mathrm{d}t = \frac{T_{\text{mer}} - T}{R_{\text{tot}}}\mathrm{d}t + P_{\text{corps}}\mathrm{d}t$$

Comme la chute de température qui conduit à l'hypothermie est bien plus faible que l'écart de teméprature entre le corps et la mer, on peut estimer grossièrement l'ordre de grandeur sans résoudre l'équation différentielle en supposant $T_{\text{mer}} - T(t) \simeq T_{\text{mer}} - T_0 = 20\,°\mathrm{C}$. Alors,

$$mc_{\text{corps}}\Delta T = \left(\frac{T_{\text{mer}} - T_0}{R_{\text{tot}}} + P_{\text{corps}}\right)\Delta t$$

soit

$$\Delta t = \frac{m c_{\text{corps}}}{\dfrac{T_{\text{mer}} - T_0}{R_{\text{tot}}} + P_{\text{corps}}} \Delta T$$

Numériquement, pour un baigneur de masse $m = 70\,\text{kg}$,

$$\boxed{\Delta t \simeq 3{,}2 \cdot 10^3\,\text{s} = 53\,\text{minutes}\,,}$$

ce qui semble raisonnable.

2 À la résistance totale à il faut ajouter celle de la combinaison, qu'on modélise comme une paroi plane,

$$R_{\text{combi}} = \frac{e}{\lambda_{\text{néo}} S}$$

Le premier principe mis sous forme d'une équation différentielle s'écrit

$$m c_{\text{corps}} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{T}{R_{\text{tot}}} = \frac{T_{\text{mer}}}{R_{\text{tot}}} + P_{\text{corps}}$$

Au bout d'un temps infini, le transitoire est terminé, et seule reste la solution particulière qui est constante :

$$0 + \frac{T_\infty}{R_{\text{tot}}} = \frac{T_{\text{mer}}}{R_{\text{tot}}} + P_{\text{corps}} \qquad \text{soit} \qquad T_\infty = T_{\text{mer}} + R_{\text{tot}} P_{\text{corps}}\,.$$

On veut $T_\infty > T_{\text{hypo}} = 35\,°\text{C}$, et il ne reste qu'à résoudre pour trouver e. À toi de bosser :)

Exercice 7 : Coût de fonctionnement d'un frigo

3 | 2

▷ *Problème ouvert.*

Supposons que les bouteilles de jus de fruit sont à température initiale $T_I = 25\,°\text{C}$, et que la température finale (celle du frigo) vaut $T_F = 5\,°\text{C}$. Commençons par calculer l'énergie nécessaire au refroidissement.

▷ Système : contenu du frigo.

▷ Bilan des échanges énergétiques :
→ transfert thermique reçu de la part du fluide frigorigène : $Q_{\text{frigo}} < 0$ que l'on cherche à déterminer ;
→ transfert thermique de fuite : $Q_{\text{fuite}} = +\mathcal{P}_{\text{fuite}}\,\Delta t > 0$ avec $\mathcal{P}_{\text{fuite}} = 10\,\text{W}$ et $\Delta t = 1\,\text{h} = 3{,}6 \cdot 10^3\,\text{s}$ (attention au signe : c'est le contenu du frigo qui reçoit réellement de l'énergie).

▷ Bilan d'enthalpie : on assimile le jus de fruit à de l'eau du point de vue thermique.

$$\Delta H \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} Q_{\text{frigo}} + Q_{\text{fuite}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{modèle}}}{=} m_{\text{jus}}\, c_{\text{eau}}\,(T_F - T_I)$$

où $m_{\text{jus}} = 6\,\text{kg}$. On en déduit

$$Q_{\text{frigo}} = m_{\text{jus}}\, c_{\text{eau}}\,(T_F - T_I) - \mathcal{P}_{\text{fuite}}\,\Delta t = -5{,}4 \cdot 10^5\,\text{J}\,.$$

Calculons maintenant le coût en énergie électrique du refroidissement. On fait l'hypothèse que l'énergie électrique fournie au frigo ne sert qu'à faire tourner le compresseur. Par définition de l'efficacité d'un frigo, $e = |Q_{\text{froid}}/W|$ où les échanges énergétiques sont ceux du fluide. Ici, on a donc $e = |Q_{\text{frigo}}|\,/\mathcal{E}_{\text{élec}}$. Par ailleurs, l'efficacité de Carnot d'un frigo vaut $e_{\text{C}} = T_{\text{frigo}}/(T_{\text{ext}} - T_{\text{frigo}})$. En combinant, on en déduit

$$e = \frac{|Q_{\text{frigo}}|}{\mathcal{E}_{\text{élec}}} = 0{,}3\,\frac{T_{\text{frigo}}}{T_{\text{ext}} - T_{\text{frigo}}} \simeq 4 \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{E}_{\text{élec}} = \frac{|Q_{\text{frigo}}|}{e} = 1{,}3 \cdot 10^5\,\text{J}\,.$$

Enfin, calculons le prix en euros de cette énergie, sachant que $1\,\text{kWh} = 1 \cdot 10^3\,\text{W} \times 3{,}6 \cdot 10^3\,\text{s} = 3{,}6 \cdot 10^6\,\text{J}$. On trouve

$$\boxed{p = \frac{1{,}3 \cdot 10^5\,\text{J}}{3{,}6 \cdot 10^6\,\text{J}} \times 0{,}17\,€ \simeq 0{,}6\,\text{centime}\,.}$$

Exercice 8 : Antenne cadre

oral banque PT | 2 | 1

▷ *Problème ouvert.*

L'antenne fonctionne sur le principe de l'induction, la tension mesurée à ses bornes étant reliée à la dérivée du flux magnétique au travers de l'antenne. Notons le champ électrique de l'onde sous la forme

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_y\,,$$

d'où on déduit le champ magnétique par la relation de structure

$$\vec{B}(x,t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_z\,.$$

On en déduit que, d'après cette modélisation, l'antenne doit être placée perpendiculairement au champ magnétique, donc coplanaire avec la direction de propagation de l'onde. Pour la fréquence étudiée, la longueur d'onde vaut

$$\lambda = \frac{c}{f} \simeq \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^6} = 100\,\mathrm{m}$$

On peut donc supposer $\lambda \gg a, b$, donc $x = x_0 =$ cte sur toute la surface de l'antenne, si bien que le champ magnétique est uniforme à l'échelle de l'antenne. Le flux magnétique au travers de l'antenne vaut donc

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{E_0}{c} ab \cos(\omega t - kx_0)$$

d'où on déduit la fém induite

$$e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = +\frac{E_0}{c}\,ab\,\omega \sin(\omega t - kx_0)\,.$$

La valeur efficace de cette tension est donc

$$U_{\text{eff}} = \frac{E_0\,ab\,\omega}{c\sqrt{2}}$$

d'où on déduit

$$\boxed{E_0 = \frac{c\sqrt{2}}{ab\,\omega} U_{\text{eff}}\,.}$$

Exercice 9 : Rail gun

adapté oral Centrale PSI | 3 | 2

▷ *Problème ouvert.*

> *Voir ici :* `http://www.liberation.fr/planete/2010/12/17/le-railgun-le-giga-canon-de-la-navy_701446`

Raisonnons par analogie avec les rails de Laplace en négligeant tous les frottements. Les notations sont présentées figure 5.

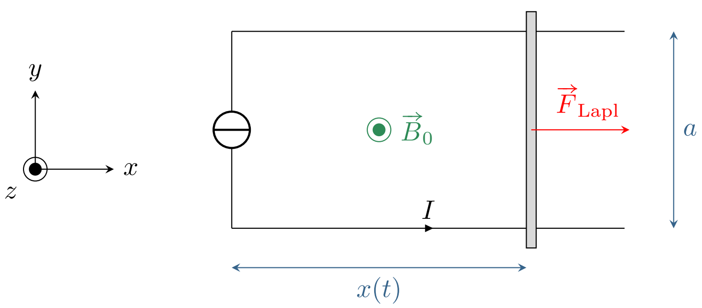

Figure 5 – Notations pour l'étude du rail gun.

Le champ susceptible de mettre en mouvement le projectile est nécessairement le champ créé par le circuit lui-même. Pour faire simple, on néglige les phénomènes d'induction : on considère que le courant est constamment égal au courant maximal que la source peut délivrer. Le champ créé par un rail peut être modélisé par celui d'un fil infini, parcouru par un courant d'intensité I :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \, I}{2\pi \, r} \vec{u}_\theta$$

(se retrouve en 30 secondes avec le théorème d'Ampère). Pour estimer le champ total, faisons l'hypothèse qu'il est uniforme sur le projectile, et calculons sa valeur en $y = a/2$. Les champs créés par les deux rails se superposent, et compte des orientations sont dirigés tous les deux selon $+\vec{u}_z$, si bien que

$$\vec{B} = 2 \times \frac{\mu_0 \, I}{2\pi \, a/2} \vec{u}_z = \frac{2\mu_0 I}{\pi a} \vec{u}_z \, .$$

Numériquement, on trouve $B \simeq 8\,\mathrm{T}$.

Une fois ce champ déterminé, calculons la vitesse de sortie. Plus précisément, on ne s'intéresse qu'à la norme v_s de la vitesse en sortie du guide, le plus simple est donc d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique.

- Système : projectile ;
- Référentiel : terrestre, supposé galiléen ;
- Bilan des actions mécaniques :
  - → en première approche, on néglige tous les frottements ;
  - → le mouvement du projectile est horizontal, son poids est donc compensé par une force de réaction normale ;
  - → la force de Laplace vaut $\vec{F}_\mathrm{L} = I(a\,\vec{e}_y) \wedge (B\,\vec{e}_z) = IaB\,\vec{e}_x$, il s'agit d'une force motrice constante, son travail au cours du déplacement du projectile sur toute la longueur L des rails vaut donc

$$W_\mathrm{L} = IaB\,L \, .$$

- Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} m {v_\mathrm{s}}^2 - 0 = W \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{2} m {v_\mathrm{s}}^2 = IaB\,L \, .$$

et finalement

$$v_\mathrm{s} = \sqrt{\frac{2IaB\,L}{m}} = 3 \cdot 10^3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

ce qui est dix fois supérieur à la vitesse du son. En pratique, les frottements divisent cette vitesse de sortie par environ 2.

Exercice 10 : Mesure de l'intensité de la pesanteur — oral banque PT | 3 | 2

▷ *Problème ouvert.*

Le dispositif est analogue à un interféromètre de Michelson en lame d'air. La différence de marche entre les deux rayons qui interfèrent au niveau du récepteur vaut par analogie

$$\delta(t) = 2z(t) \, .$$

Par application du PFD et utilisation des conditions initiales, on trouve

$$z(t) = \frac{1}{2} g t^2 \, ,$$

d'où on déduit l'ordre d'interférence au cours du temps,

$$p = \frac{gt^2}{\lambda_0}$$

car à $t = 0$ la différence de marche est nulle, donc $p = 0$. Le dernier maximum d'intensité ($p = 22$) est observé à l'instant $t_{22} \simeq 1{,}19\,\mathrm{ms}$, ce qui donne

$$22 = \frac{g t_{22}^2}{\lambda_0} \qquad \text{d'où} \qquad g = \frac{22\,\lambda_0}{t_{22}^2} = 9{,}83\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Pour aller plus loin, on peut discuter des incertitudes sur la mesure et les optimisations de l'expérience. En particulier, il vaut mieux laisser le trièdre en chute libre le plus longtemps possible et insérer en sortie du récepteur un compteur qui s'incrémente à chaque maximum.