BLAISE PASCAL
PT 2021-2022

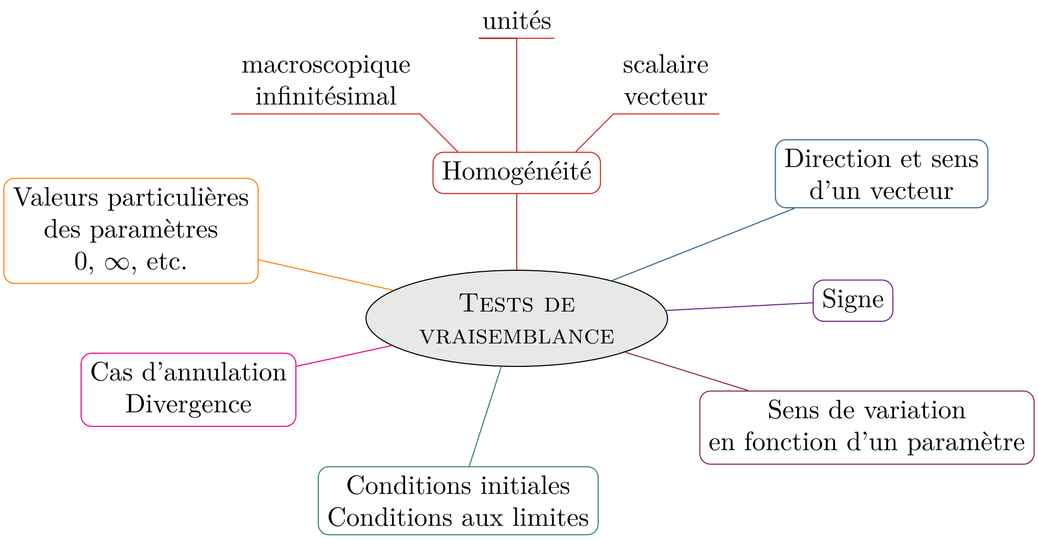
Fiche outil

Tests de vraisemblance

Les tests de vraisemblance sont l'ensemble des raisonnements qualitatifs permettant d'identifier des erreurs dans le résultat d'un calcul.

Ce n'est pas parce qu'un résultat satisfait à un test de vraisemblance qu'il est juste ... en revanche un résultat qui ne valide pas un test de vraisemblance est forcément faux.

Il n'est pas toujours simple de trouver suffisamment de tests de vraisemblance pour tester de manière exhaustive un résultat : pour qu'un test de vraisemblance soit intéressant, il faut d'une part que son influence sur l'expression mathématique étudiée soit simple à mettre en évidence, et d'autre part que le raisonnement qualitatif soit simple à mener également.



Exemple 1 : vitesse limite d'une chute libre en présence d'une force de frottement $-\alpha\vec{v}$:

$$\vec{v}_{\text{lim}} = \frac{m}{\alpha}\vec{g}\,.$$

- ▷ la vitesse limite est colinéaire à $\vec{g}$, donc verticale vers le bas : cohérent ;
- ▷ plus les frottements sont élevés (α grand), plus la vitesse limite est faible : cohérent avec l'intuition ;
- ▷ plus l'objet est lourd (m grand), plus la vitesse limite est élevée : cohérent avec l'intuition ;
- ▷ etc.

Exemple 2 : puissance thermique cédée à l'air par un solide de température T :

$$\mathcal{P} = G(T - T_{\text{air}}) \qquad \text{avec} \qquad G > 0\,.$$

- ▷ si le solide et l'air sont à la même température, $\mathcal{P} = 0$, il n'y a pas d'échange de puissance : cohérent avec l'intuition ;
- ▷ si le solide est plus chaud que l'air, $T > T_{\text{air}}$, alors $\mathcal{P} > 0$: cohérent car le solide cède réellement de la puissance pour se refroidir ;
- ▷ plus l'écart de température $T - T_{\text{air}}$ est élevé, plus la puissance échangée est élevée : cohérent avec l'intuition ;
- ▷ etc.

Exemple 3 : une bouteille d'eau de température initiale T_0 est placée dans un frigo de température T_{f}, sa température évolue selon

$$T(t) = (T_0 - T_{\text{f}})\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + T_{\text{f}}\,.$$

- ▷ à l'instant $t = 0$, on trouve $T(t{=}0) = T_0$: cohérent avec la condition initiale ;
- ▷ au bout d'un temps très long $t \to \infty$, on trouve $T \to T_{\text{f}}$, la bouteille est à la même température que le frigo : cohérent avec l'intuition ;
- ▷ etc.

Exemple 4 : le travail élémentaire d'une force $\vec{F}$ appliquée à un point matériel se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ pendant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$ s'écrit

$$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{v} \, \mathrm{d}t$$

- ▷ les deux termes de l'égalité sont des termes infinitésimaux, comme l'indiquent les notations d et δ ;
- ▷ l'expression est correcte sur le plan des unités (... mais ce n'est un bon test de vraisemblance qu'à condition de savoir que $\vec{F} \cdot \vec{v}$ est une puissance, donc homogène à des watts !) ;
- ▷ etc.

Exemple 5 : les tests de vraisemblance marchent aussi pour les calculs mathématiques !

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x/\delta} \, \mathrm{d}x = \Big[-\delta \, \mathrm{e}^{-x/\delta} \Big]_0^\infty = 0 + \delta = \delta$$

- ▷ l'intégrale est homogène à une longueur, à cause de $\mathrm{d}x$, donc la primitive doit elle aussi être homogène à une longueur : le coefficient δ ne peut donc qu'être au numérateur ;
- ▷ la fonction est toujours positive, donc l'intégrale doit l'être aussi ;
- ▷ etc.

Exemple 6 : et ça vaut aussi pour les formules de trigo ! Dans ce cas, le test de vraisemblance consiste à tester des valeurs particulières :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

- ▷ prendre $p = q = 0$ permet de retrouver la nécessaire présence du 2 dans le terme de droite ;
- ▷ prendre $p = q = \pi/2$ permet de retrouver la nécessaire présence des /2 dans les cosinus du terme de droite, sans quoi il n'y aurait pas annulation ;
- ▷ etc.