

Prévoir une expression par analyse dimensionnelle

I - Rappel : dimensions et unités fondamentales

La notion de **dimension** formalise la nature des grandeurs physiques : seules les grandeurs de même dimension peuvent être comparées l'une à l'autre (p.ex. deux longueurs ou deux temps), elles sont dites **homogènes**. Comparer deux grandeurs inhomogènes (p.ex. une masse et une vitesse) n'a aucun sens.

Les **unités** sont les références qui servent à quantifier (au sens d'affecter une valeur numérique) aux grandeurs physiques. Une grandeur n'a qu'une seule dimension, mais peut être exprimée dans plusieurs unités différentes.

Exemple : La taille d'un être humain est homogène à une longueur, que l'on peut exprimer en mètres, en centimètres, ou encore en pouces ou en pieds.

Les dimensions ne sont pas indépendantes les unes des autres : de façon évidente, la dimension vitesse est reliée aux dimensions longueur et temps. Par convention, sept dimensions jouent un rôle privilégié : elles sont appelées **dimensions fondamentales**. Toutes les autres dimensions sont des produits des dimensions fondamentales. Les dimensions fondamentales sont les suivantes :

- ▷ longueur, notée symboliquement L ;
- ▷ masse M ;
- ▷ temps T ;
- ▷ intensité électrique I ;
- ▷ température Θ ;
- ▷ quantité de matière N ;
- ▷ intensité lumineuse J (quasi-inutilisée).

Pour exprimer les dimensions dérivées en termes des dimensions fondamentales, deux techniques sont à privilégier : utiliser des lois de la physique connues ou exploiter les unités des constantes physiques.

Exercice C1 : Dimension d'une force

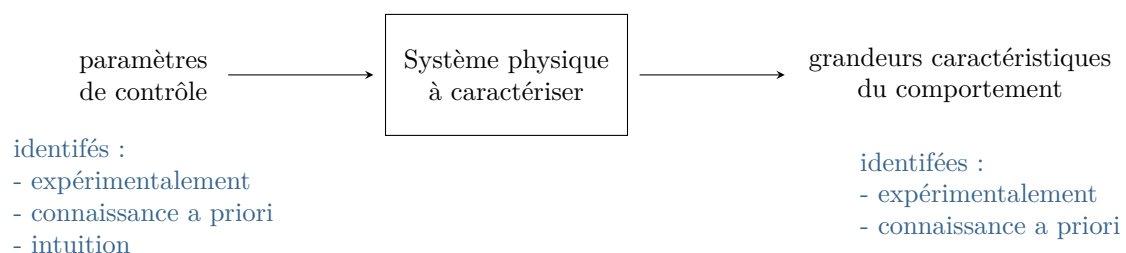
Exprimer en fonction des dimensions fondamentales la dimension d'une force.

Espace 1

II - L'analyse dimensionnelle comme outil de prédiction

• Principe

Le comportement de tout système physique est décrit par certaines grandeurs caractéristiques : la capacité d'un condensateur, la constante de raideur d'un ressort, et même plus généralement la période d'un oscillateur harmonique ou encore la vitesse limite d'une bille dans un fluide visqueux. Ces grandeurs caractéristiques peuvent être modifiées en jouant sur des paramètres de contrôle.



Les grandeurs caractéristiques du comportement du système sont reliées aux paramètres de contrôle par des relations homogènes.

Ce principe peut sembler très simple, mais il est tellement utile que l'analyse dimensionnelle est souvent une première étape à l'étude d'un nouveau phénomène.

- **Présentation de la méthode sur un exemple**

Exercice C2 : Période d'un oscillateur harmonique

Considérons un oscillateur masse-ressort horizontal : un solide de masse m est attaché à l'extrémité d'un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est fixée à un bâti. Le ressort est initialement étiré selon un allongement initial $\Delta\ell_i$, puis lâché sans vitesse initiale. On observe des oscillations périodiques dont on cherche à exprimer la période T_0 .

1 - En raisonnant par analyse dimensionnelle, prévoir comment la période T_0 dépend des trois paramètres cités dans l'énoncé.

2 - Comparer au résultat établi dans le chapitre sur l'oscillateur harmonique.

• **Limitations**

C'est un outil extrêmement puissant ... mais il faut avoir parfaitement identifié les paramètres de contrôle, ce qui, sur un problème réellement inconnu, n'est pas du tout évident.

Se pose ensuite la question de l'existence et de l'unicité des solutions au système obtenu via l'équation aux dimensions :

- ▷ s'il n'existe aucune solution au système, le diagnostic est simple : il manque un paramètre de contrôle ... le trouver est une autre affaire ;
- ▷ plus fréquemment, le système peut admettre plusieurs solutions si plusieurs paramètres de contrôle de dimensions reliées apparaissent : dans ce cas, l'analyse dimensionnelle est impuissante car une combinaison sans dimension de ces paramètres peut intervenir dans n'importe quelle fonction transcendante, qui échappe à toute analyse dimensionnelle et peut considérablement changer l'ordre de grandeur du résultat.

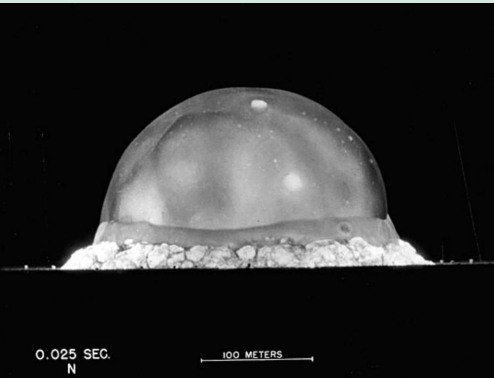
Exercice C3 : Capacité d'un condensateur plan

Un condensateur plan est constitué de deux armatures conductrices planes, de surface S , séparées d'une distance d et se faisant face. En plus de ces paramètres géométriques, la capacité du condensateur implique la permittivité diélectrique du vide $\epsilon_0 = 8,89 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$. Montrer qu'on ne peut pas trouver la dépendance en S et e par analyse dimensionnelle.

Espace 3

III - Exercice

Exercice C4 : Énergie dégagée par l'explosion nucléaire Trinity



Trinity est le nom de code du premier essai nucléaire de l'histoire. L'explosion eut lieu le 16 juillet 1945 à Alamogordo au Nouveau Mexique, dans une zone désertique nommée Jornada del Muerto. Étant l'ultime étape du projet Manhattan, lancé par les États-Unis durant la seconde guerre mondiale, les données concernant ce projet était classées ultra-secrètes par la CIA.

Pourtant, le physicien anglais G. I. Taylor a pu estimer l'ordre de grandeur de l'énergie dégagée par cette explosion par une analyse dimensionnelle judicieuse sur la base d'un film. Le film permet de suivre au cours du temps le rayon $R(t)$ du « nuage » formé par l'explosion.

Cet exercice propose de reproduire le raisonnement de Taylor.

Des connaissances en mécanique des fluides et thermodynamique suggèrent que les paramètres influant sur le rayon du nuage sont évidemment le temps t s'étant écoulé depuis l'explosion et l'énergie E libérée par l'explosion, mais aussi la masse volumique de l'air ρ .

Données : $\rho = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $1,3^5 \simeq 4$.

- 1 - Établir la dimension d'une énergie en fonction des dimensions de bases du système international.
- 2 - Taylor a supposé que le rayon du nuage s'écrit en fonction des paramètres cités ci-dessus sous la forme

$$R(t) = E^a t^b \rho^c,$$

où a , b et c sont trois constantes. Déterminer les constantes a , b et c .

- 3 - Dédurre de la question précédente l'expression de l'énergie libérée en fonction de R , ρ et t .
- 4 - Estimer l'ordre de grandeur de sa valeur numérique à partir de la photographie.
- 5 - Plusieurs années plus tard, la CIA a révélé que les mesures réalisées sur place permettaient d'estimer que l'énergie libérée par la bombe était d'environ 20 kilotonnes de TNT. Sachant que l'explosion de 1 kg de TNT libère environ $4 \cdot 10^6 \text{ J}$, calculer l'énergie libérée par l'explosion Trinity et commenter la qualité du résultat obtenu par analyse dimensionnelle.