Test d'homogénéité

I - Dimensions et unités

I.1 - Définitions

Seules certaines grandeurs peuvent être comparées entre elles, par exemple une longueur d'onde et la taille d'une ouverture pour savoir s'il y a diffraction, mais d'autres comparaisons n'ont pas de sens : « l'ouverture est plus large que la fréquence de l'onde ». Ceci est formalisé par la notion de **dimension**.

Seules des grandeurs de même dimension peuvent être comparées. De telles grandeurs sont dites **homogènes**.

La dimension d'une grandeur physique X est notée entre crochets $[X]$.

Pour écrire (décrire) le résultat de mesures, il est nécessaire de disposer de références communes : les **unités**.

> ***Exemple :*** *La largeur ℓ d'une feuille de papier A4 vaut 21,0 cm dans le système métrique et 0,869 pieds dans le système anglo-saxon. Écrire* $\ell = 21{,}0\,\text{cm} = 0{,}869\,\text{pieds}$ *a du sens, mais écrire* $21{,}0 = 0{,}869$ *est évidemment aberrant.*

Deux conclusions importantes à cet exemple :

Une représentation numérique d'une grandeur physique n'a de sens que si elle est accompagnée d'une unité.

Plusieurs unités différentes peuvent être associées à une même dimension physique.

De plus, cet exemple fait ressortir la nécessité d'un système d'unités cohérent au niveau international : c'est le fameux système international SI, datant lui aussi de 1960. Aujourd'hui, toutes les unités sont définies à partir de phénomènes physiques ... hormis le kilogramme, qui correspond par définition à la masse d'un étalon. Cette définition pose bon nombre de problèmes, et une nouvelle définition basée sur la constante de Planck est à l'étude.

I.2 - Grandeurs sans dimension

Il existe des grandeurs sans dimension.

En particulier, le rapport de deux grandeurs dimensionnées, les angles et tous les nombres (π, $\sqrt{2}$, 3, etc.), qu'il s'agisse de constantes « géométriques » (périmètre d'un cercle $2\pi R$) ou « de dénombrement » (durée d'un aller-retour $= 2 \times$ durée d'un aller simple), sont sans dimension.

Par convention et pour alléger les écritures, zéro est homogène à n'importe quelle grandeur.

I.3 - Système International

Combien de dimensions sont nécessaires pour décrire la totalité des grandeurs physiques ? La réponse n'est pas évidente ! On voit bien qu'il y a de la redondance : la dimension d'une vitesse est clairement reliée à celle d'une longueur et d'un temps.

La solution retenue par convention est le Système International, adopté en 1960, qui repose sur sept dimensions de bases indépendantes les unes des autres :

- ▷ longueur, notée symboliquement L ;
- ▷ masse M ;
- ▷ temps T ;
- ▷ intensité électrique I ;
- ▷ température Θ ;
- ▷ quantité de matière N ;
- ▷ intensité lumineuse J (quasi-inutilisée).

La dimension de toute quantité physique est un produit (ou un quotient) de ces sept dimensions fondamentales.

Attention ! Ne pas confondre les notations des *dimensions* avec celles des *unités* (en particulier M est la dimension masse et m l'unité mètre) ni avec celles qui peuvent être attribuées aux différentes grandeurs dans un exercice.

Toutes les autres dimensions s'obtiennent par produit et quotient des dimensions fondamentales.

Étienne Thibierge, 9 octobre 2017, www.etienne-thibierge.fr

II - Déterminer la dimension d'une grandeur physique

En pratique, trouver la dimension d'une grandeur se fait à partir de lois ou de définitions connues ou encore en utilisant son unité.

Exercice C1 : Dimensions dérivées

Exprimer en fonction des dimensions fondamentales la dimension d'une énergie, d'une puissance et d'une résistance électrique (penser à l'effet Joule).

Espace 1

Exercice C2 : Dimensions à partir des unités

Exprimer en fonction des dimensions fondamentales la dimension de l'accélération de la pesanteur $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et de la constante de Planck $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$.

Espace 2

Les égalités reliant entre elles la dimension de plusieurs grandeurs sont appelées des **équations aux dimensions**. Elles se résolvent exactement comme les équations algébriques « normales ».

III - Opérations mathématiques sur les grandeurs dimensionnées

- **Somme et différence**

Par définition de l'homogénéité, tous les termes d'une somme ou d'une différence ont la même dimension, et le résultat également.

- **Produit et quotient**

On peut multiplier ou diviser des grandeurs de n'importe quelles dimensions. La dimension d'un produit est le produit des dimensions, de même pour les quotients ou les puissances.

- **Dérivation**

> ***Exemple :*** *la vitesse d'un objet en chute libre verticale le long d'un axe z est donnée par*
>
> $$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,.$$
>
> *On constate que la dérivation change la dimension : $[z] = L$ mais $[v_z] = L\,T^{-1}$.*

Cet exemple se généralise :

La dimension de la dérivée d'une grandeur est la dimension de la grandeur divisée par la dimension de la variable par rapport à laquelle on dérive.

Ce résultat se voit très bien sur la notation différentielle de la dérivée.

Exercice C3 : Dimension d'une force

Exprimer en fonction des dimensions fondamentales la dimension d'une force.

Espace 3

- **Intégration**

> ***Exemple :*** *connaissant la vitesse $v_z(t)$ d'un objet en chute libre verticale le long d'un axe vertical z, on en déduit sa loi horaire $z(t)$ par*
> $$z(t) = \int_0^t v_z(t')\mathrm{d}t' \,.$$
> *On constate que l'intégration change la dimension : $[v_z] = L\,T^{-1}$ mais $[z] = L$.*

Cet exemple se généralise :

La dimension de l'intégrale d'une grandeur est la dimension de la grandeur multipliée par celle de la variable par rapport à laquelle on intègre.

Là encore, la dimension se voit bien sur l'écriture de l'intégrale.

- **Fonctions usuelles (fonctions transcendantes)**

Une fonction transcendante est une fonction mathématique de type exponentielle, logarithme ou cosinus.

L'argument d'une fonction transcendante est forcément sans dimension.

> ***Exemples :***
> ▷ $\exp(-t/\tau)$ *: si $[t] = T$ alors $[\tau] = T$;*
> ▷ $\cos(kx)$ *: si $[x] = L$ alors $[k] = L^{-1}$.*

Une image par une fonction transcendante est sans dimension.

> ***Exemples :*** $[\exp(-t/\tau)] = 1$ *et* $[\cos(kx)] = 1$.

IV - L'homogénéité comme outil de vérification

L'intérêt est de détecter des erreurs de calcul !

Une relation inhomogène est forcément fausse.

... mais la réciproque est fausse : une relation homogène n'est pas forcément juste.

Pour que ces vérifications soient faciles, il faut avoir gardé des expressions littérales jusqu'à la fin des calculs !

> ***Remarque :*** *Il est rarement nécessaire d'exprimer toutes les dimensions en fonction de dimensions de base, ce qui alourdit les écritures. En fonction du contexte, on conservera les forces, les énergies, les tensions, etc.*

Exercice C4 : Test d'homogénéité

Vérifier l'homogénéité des expressions suivantes. Les notations utilisées sont classiques. Il est parfois nécessaire de déterminer certaines dimensions au préalable.

1 - Théorème de l'énergie cinétique : $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = F\,v$.

2 - Position d'une image optique : $\overline{OA'} = \dfrac{f' + \overline{OA}}{f' \times \overline{OA}}$.

3 - Température à l'intérieur d'un mur d'épaisseur e : $T(x) = T_{\text{int}} + \dfrac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{e} x$, avec x la position à l'intérieur du mur, et T_{ext} et T_{int} les températures à l'intérieur et l'extérieur de la pièce.

4 - Nombre de noyaux dans un échantillon radioactif : $N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ où N_0 est le nombre initial de noyaux et la constante radioactive λ s'exprime en s^{-1}.

5 - Intensité électrique $I = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} U$ avec U une tension et R_1, R_2, R_3 trois résistances.

6 - Volume d'une sphère de rayon R : $V = \dfrac{4}{3}\pi R^2$.

7 - Position de l'extrémité d'un ressort : $x(t) = X_{\text{moy}} + T_0 \cos(\omega_0 t)$ avec X_{moy} la position moyenne, T_0 la période des oscillations et ω_0 leur pulsation.

Complément : Définition des unités fondamentales du système international

Le mètre m, unité de longueur : distance parcourue par la lumière dans le vide en 1/299 792 458 seconde. Conséquences : la définition du mètre dépend de celle de la seconde, la vitesse de la lumière n'est plus mesurée mais fixée par convention. Définition datant de 1983. Les définitions historiques de l'unité de longueur reposaient sur le corps humain (pieds, pouces, brasses, ...) et étaient particulièrement confuses : la création d'un système métrique simplifié apparaît dans les cahiers de doléance de 1788 ! Le mètre a alors été défini en 1790 comme la longueur d'un pendule qui aurait pour période deux secondes, puis la définition a été reprécisée à partir du méridien terrestre en 1795 et par la suite d'objets étalons et de longueurs d'ondes de raies spectrales.

Le kilogramme kg, unité de masse : masse du prototype international du kilogramme, coulé en 1899 et conservé depuis au Bureau International des Poids et Mesures. C'est la dernière unité du système international à être définie par rapport à un objet matériel plutôt qu'un phénomène physique. Aboutir à une nouvelle définition basée sur un phénomène est un objectif du BIPM, mais il a été acté à la dernière Convention Internationale de 2014 qu'aucun phénomène ne permettait à l'heure actuelle d'obtenir une précision suffisante.

La seconde s, unité de temps : durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre deux niveaux quantiques de l'atome de césium 133, précisément les niveaux hyperfins $F = 3$ et $F = 4$ de l'état fondamental $6\mathrm{S}_{1/2}$. Définition datant de 1967. Les définitions historiques s'appuyaient au tout début sur le rythme cardiaque, puis la durée du jour, puis celle d'une année.

L'ampère A, unité d'intensité électrique : intensité d'un courant constant qui, s'il est maintenu dans deux conducteurs linéaires et parallèles, de longueurs infinies, de sections négligeables, et distants d'un mètre dans le vide, produit entre ces deux conducteurs une force linéaire exactement égale à $2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$. Conséquences : la définition de l'ampère dépend de celles du mètre, du kilogramme et de la seconde, et fixe par convention la valeur de la perméabilité magnétique du vide μ_0. Définition datant de 1948. Une redéfinition à partir d'effets quantiques très stables (le volt Josephson) est à l'étude.

Le kelvin K, unité de température : fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau, où elle coexiste sous ses trois phases gaz, liquide et solide. Définition datant de 1967.

La mole mol, unité de quantité de matière : nombre d'atomes dans exactement 12 g de l'isotope carbone 12. Conséquence : la définition de la mole dépend de celle du kilogramme, et fixe par convention la valeur de la constante d'Avogadro $\mathcal{N}_{\mathrm{A}}$. Définition datant de 1971.

La candela cd, unité d'intensité lumineuse : intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence exactement $5{,}4 \cdot 10^{14}$ Hz dont l'intensité énergétique dans cette direction est 1/683 watt par stéradian. Conséquence : la définition de la candela dépend de celles du mètre, du kilogramme et de la seconde. Définition datant de 1979. Historiquement, la définition reposait sur l'intensité lumineuse émise par une bougie. La candela fait appel à la physiologie de l'œil humain, et n'est donc pas adaptée aux autres détecteurs : une bougie et une ampoule à incandescence de 100 W chacune ont respectivement une intensité lumineuse de l'ordre de la candela et de la centaine de candela car leur spectre d'émission lumineuse est différent.