Incertitudes

Ce document présente le vocabulaire et les techniques au programme de PTSI à propos des incertitudes. Vous devez l'avoir avec vous à chaque séance de TP et le consulter dès que nécessaire. L'objectif est que vous vous familiarisiez progressivement avec les notions qu'il contient pour les maîtriser en fin d'année.

Plan du cours

Ce que vous devez savoir et savoir faire

- ▷ Utiliser le vocabulaire de base de la métrologie : mesurage, valeur vraie, grandeur d'influence, erreur aléatoire, erreur systématique.
- ▷ Savoir que l'incertitude est un paramètre associé au résultat d'un mesurage qui caractérise l'intervalle de valeurs pouvant raisonnablement être attribuée à la grandeur mesurée.
- ▷ Exprimer le résultat d'une mesure sous forme d'une valeur, d'une incertitude, et d'une unité appropriée.
- ▷ Associer un niveau de confiance à une incertitude type et à une incertitude élargie.
- ▷ Comparer le résultat d'une mesure à une valeur de référence.

- ▷ Procéder à une évaluation de type A d'une incertitude.

- ▷ Procéder à une évaluation de type B d'une incertitude dans les cas simples (instruments gradués) ou à l'aide de documentation, notamment de données constructeurs.
- ▷ Comparer les incertitudes associées à chaque source d'erreur pour éventuellement les simplifier.

- ▷ Évaluer l'incertitude-type d'une mesure obtenue à l'issue de la mise en œuvre d'un protocole présentant plusieurs sources d'erreurs indépendantes dans les cas simples d'une expression de la valeur mesurée sous la forme d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient, ou bien à l'aide d'une formule fournie ou d'un logiciel.
- ▷ Comparer les incertitudes associées à chaque source d'erreur pour éventuellement les simplifier.

Questions de cours pour les colles

Cette liste de questions de cours est indicative et n'est en aucun cas une invitation à ne pas travailler le reste du cours puisqu'il sera nécessaire pour résoudre les exercices.

- Définir la valeur vraie, la valeur mesurée, l'erreur de mesure et l'incertitude de mesure, notamment en indiquant lesquelles sont inconnues et lesquelles sont mesurées ou estimées. Un schéma peut aider à la présentation.
- Nommer les deux types d'erreurs et expliquer ce qui les distingue.
- Expliquer ce qui distingue une incertitude type d'une incertitude élargie. Les valeurs exactes des niveaux de confiance ne sont pas à connaître, mais une explication claire de ce qu'il représente est attendue.
- Expliquer **schématiquement et simplement** ce qui distingue une estimation d'incertitude de type A d'une estimation de type B, et dans quel cas on opte pour l'une ou pour l'autre.

- Exercices de cours C1, C3, C4 et C5 : la démarche sera identique au cours, mais l'exemple choisi et les valeurs numériques seront différents.

La mesure est une activité primordiale en sciences. Connaître la valeur de la grandeur en question est alors tout aussi important que de pouvoir quantifier la précision avec laquelle on la connaît. En effet, une mesure ne peut être parfaite, tant en raison d'effets physiques (fluctuations, etc.) que de défauts ou du manque de précision intrinsèque du dispositif.

> ***Exemples :*** *Contrôle de vitesse au radar, bilan sanguin, découverte du boson de Higgs, etc.*
>
> *Espace 1*

Il est essentiel de comprendre que **seule l'analyse de l'incertitude sur le résultat d'une mesure permet de conclure sur sa validité et sa qualité**.

> ***Exemple :*** *Imaginons un TP dont l'objectif serait de mesurer l'intensité de la pesanteur terrestre, valant $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Deux binômes différents mesurent*
>
> $$g_1 = 10 \pm 3\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \qquad \text{et} \qquad g_2 = 10{,}2 \pm 0{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$
>
> *Le premier binôme trouve une valeur qui semble plus proche de celle attendue, mais avec une incertitude six fois plus grande : la mesure du second binôme est donc de meilleure qualité.*

I - Erreur de mesure et incertitude sur une valeur mesurée

I.1 - Vocabulaire de métrologie

Imaginons un protocole expérimental dont le but serait de mesurer la valeur d'une grandeur d'intérêt X. En métrologie, cette grandeur est appelée le **mesurande**. L'ensemble des étapes permettant d'y accéder est appelé **mesurage** ou **processus de mesure**. Le processus de mesure donne accès à la **valeur mesurée** x.

> ***Remarque :*** *Les grandeurs autres que le mesurande qui affectent le résultat du mesurage sont appelées **grandeurs d'influence** ou **paramètres extérieurs**.*

a) Valeur vraie, erreur, incertitude

On appelle **valeur vraie**, notée X_vrai, la valeur que prendrait le mesurande si le mesurage était parfait. Cette valeur est unique, « fixée par la physique » sans ambiguïté.

⇝ comme le mesurage ne peut être parfait, elle est et demeurera inconnue.

Espace 2

On appelle **erreur de mesure** l'écart entre la valeur vraie X_vrai et la valeur mesurée x,

$$\varepsilon = X_\mathrm{vrai} - x\,.$$

Comme la valeur vraie n'est pas connue, l'erreur de mesure ne l'est pas non plus : il faut donc elle aussi l'estimer.

On appelle **incertitude de mesure**, notée Δx, l'estimation de l'erreur de mesure.

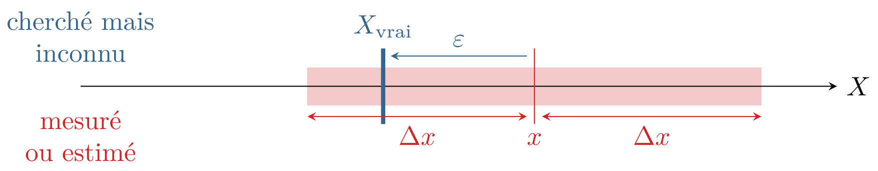


Figure 1 – Récapitulatif des définitions. Les grandeurs cherchées mais impossibles à déterminer sont indiquées en bleu au dessus de l'axe, les grandeurs mesurées ou estimées sont indiquées en rouge en dessous de l'axe.

> ***Remarque :***
> - *L'incertitude Δx est parfois qualifiée d'incertitude absolue. Elle a la même dimension que x. On utilise aussi l'incertitude relative $\Delta x/x$, qui est sans dimension et s'exprime comme un pourcentage.*
> - *L'incertitude est par convention toujours positive, ce qui n'est pas le cas de l'erreur.*
> - *Il est important de noter que l'existence d'une erreur de mesure ne remet pas nécessairement en cause la valeur mesurée ou le processus de mesurage. Elle impose seulement de prendre quelques précautions dans l'exploitation qui est faite du résultat, tant pour valider une loi physique que par exemple dans une chaîne de décision industrielle ou de santé.*

b) Classification des erreurs de mesures

- **Erreurs systématiques**

On appelle **erreur systématique** une erreur qui se reproduit à l'identique pour toutes les mesures réalisées dans les mêmes conditions.

Espace 3

Un mauvais étalonnage de l'appareil de mesure ou un défaut du protocole expérimental sont des sources fréquentes d'erreur systématique. Détecter une erreur systématique peut être particulièrement ardu et ne peut se faire en général que par comparaison du résultat de mesure avec une valeur connue par ailleurs.

> ***Exemple 1 :*** *Une montre retarde de cinq minutes. Toute lecture de l'heure faite avec cette montre sera donc entachée de ce retard. Pour le repérer, la seule possibilité est de comparer l'heure donnée par cette montre avec celle donnée par une autre horloge.*

> ***Exemple 2 :*** *Imaginons une expérience dont le but serait de mesurer la période des oscillations d'un pendule. Si le repère servant à déclencher le chronomètre n'est pas le même que celui servant à l'arrêter, alors la différence de temps chronométrée ne correspondra pas à une période.*

- **Erreurs aléatoires**

On appelle **erreur aléatoire** est une erreur qui varie d'une réalisation à l'autre de la mesure, quand bien même elles sont effectuées dans les mêmes conditions.

Espace 4

Une erreur aléatoire se repère en réalisant plusieurs fois la même mesure dans les mêmes conditions. L'incertitude associée quantifie alors la dispersion des différents résultats.

Une erreur aléatoire peut provenir de fluctuations rapides et aléatoires de la grandeur physique que l'on souhaite mesurer : on parle alors de **bruit**. Une autre origine possible est une intervention directe de l'expérimentateur dans le protocole qui ne peut être parfaitement reproductible.

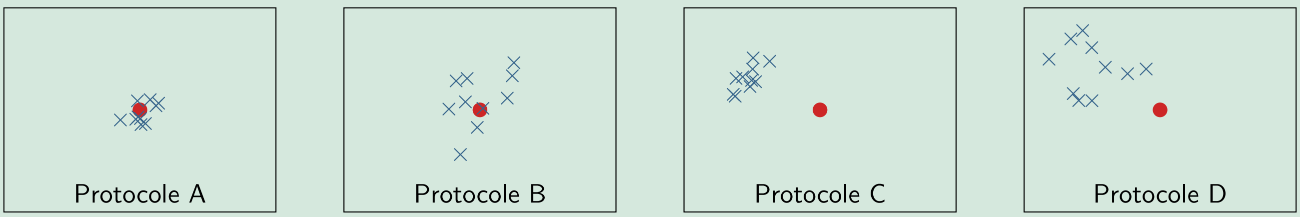
> ***Exemple :*** *Reprenons l'exemple du pendule. Même si le repère est toujours le même, l'instant précis de déclenchement du chronomètre par l'expérimentateur varie forcément d'une expérience sur l'autre, engendrant une erreur aléatoire.*

> ***Remarque :*** *En pratique, un mesurage sans erreur aléatoire est impossible.*

- **Illustration**

Exercice C1 : Comparaison de protocoles de mesure

Considérons quatre protocoles de mesure, dont le but est d'estimer la valeur vraie symbolisée par le point central de la figure ci-dessous. Chaque protocole est répété dix fois, donnant lieu à dix valeurs mesurées représentées par les croix. Il s'agit d'une illustration : la valeur vraie ne peut pas être connue !



▷ Compléter le tableau ci-dessous, en indiquant si les erreurs sont faibles ou fortes.

	Protocole A	Protocole B	Protocole C	Protocole D
Erreur systématique	faible	faible	forte	forte
Erreur aléatoire	faible	forte	faible	forte

I.2 - Écrire un résultat avec incertitude

a) Expression du résultat

Comme il existe une erreur de mesure, donner la valeur mesurée ne peut suffire.

Le résultat d'un processus de mesurage est toujours **un intervalle** dans lequel la valeur vraie se trouve **probablement**. On le note sous la forme

$$X = (x \pm \Delta x) \qquad \text{(avec unité)}\,,$$

où x est la **valeur mesurée**, Δx **l'incertitude de mesure**, le tout accompagné d'une **unité**.

Espace 5

Sens physique : *L'encadré précédent doit se comprendre comme « compte tenu de la mesure, la valeur vraie X_{vrai} a de bonnes chances de se trouver dans l'intervalle $[x - \Delta x, x + \Delta x]$ ».*

b) Niveau de confiance

Les « bonnes chances » en question sont quantifiées par le **niveau de confiance** associé à l'incertitude. Pour des raisons que nous comprendrons en partie au paragraphe II, on utilise classiquement deux niveaux de confiance :
- ▷ niveau de confiance à 68 % : **incertitude type**, parfois notée $u(x)$;
- ▷ niveau de confiance à 95 % : **incertitude élargie**, à qui on réserve la notation Δx.

Sous certaines hypothèses, que nous comprendrons là encore en partie au paragraphe II, on peut montrer que

L'incertitude type et l'incertitude élargie sont reliées par

$$\Delta x = 2\,u(x)\,.$$

Pour une même mesure, le niveau de confiance est d'autant plus petit que l'incertitude donnée est petite, ce qui est logique : si on réduit l'intervalle annoncé autour de la valeur mesurée, il y a moins de chances que la valeur vraie s'y trouve.

Pour rester cohérent vis-à-vis du niveau de confiance, il est bien clair que

On ne mélange **PAS** incertitude type et incertitude élargie dans un même calcul !

c) Chiffres significatifs

Rappelons qu'un chiffre est dit significatif dans l'écriture d'un résultat lorsqu'il est écrit devant la puissance de dix et à droite du premier chiffre non nul. Attention, un zéro final compte !

Exercice C2 : Compter les chiffres significatifs

Combien de chiffres significatifs dans les nombres ci-dessous ?
- ▷ $0{,}002\,78 \cdot 10^5$: 3 CS
- ▷ $2{,}780\,00 \cdot 10^2$: 6 CS
- ▷ $0{,}2780 \cdot 10^3$: 4 CS

Le dernier chiffre significatif d'un résultat doit avoir la **même puissance de dix que l'incertitude**.
Une incertitude ne s'écrit qu'avec **un seul chiffre significatif**.

> ***Remarque :*** *L'origine de cette règle est que l'incertitude est estimée, et est donc elle-même entachée d'une incertitude. L'incertitude sur l'incertitude est alors souvent de l'ordre de 10 %. La justification de cet ordre de grandeur est trop complexe pour être abordée ici.*

Exercice C3 : Chiffres significatifs et incertitudes

Proposer une écriture correcte pour chacune des grandeurs ci-dessous, et indiquer le nombre de chiffres significatifs sur le résultat final.

Incorrect	$\lambda = 589{,}0 \pm 2$ nm	$\Delta t = 0{,}473 \pm 0{,}122$ s	$V_{\text{éq}} = 14 \pm 0{,}1$ mL
Correct	$\lambda = 589 \pm 2$ nm	$\Delta t = 0{,}5 \pm 0{,}1$ s	$V_{\text{éq}} = 14{,}0 \pm 0{,}1$ mL
Chiffres significatifs	3	1	3

> ***Remarque :*** *Ces exemples permettent de constater que lorsque l'incertitude sur un résultat n'est pas explicitement précisée, le nombre de chiffres significatifs donne une information malgré tout.*

I.3 - Acceptabilité du résultat

L'ultime étape de l'analyse d'une expérience est de comparer la valeur mesurée x à une valeur attendue X_{a}. Cette valeur attendue peut être obtenue à partir d'un modèle que l'on souhaite tester, correspondre à une valeur de consigne (penser à un contrôle qualité) ou bien être issue d'une table de données. Les valeurs tabulées sont obtenues à partir de mesures de haute précision réalisées en laboratoire dans des conditions très bien contrôlées.

Usuellement, la valeur mesurée est dite **compatible** avec la valeur attendue si $X_{\mathrm{a}} \in [x - \Delta x; x + \Delta x]$
où Δx est l'incertitude élargie sur la valeur mesurée x.

En ce qui nous concerne, un résultat incompatible avec une valeur attendue est souvent le signe d'une erreur systématique oubliée, d'une sous-estimation des incertitudes, ou encore d'un défaut dans le modèle utilisé.

I.4 - Méthodes d'estimation de l'incertitude

L'estimation des incertitudes peut s'appuyer sur des méthodes très élaborées et donner lieu à des développements mathématiques ardus. Pour un très grand nombre d'applications, il suffit de distinguer deux situations :

- soit on peut reproduire la mesure à l'identique plusieurs fois, et obtenir des résultats qui varient d'une mesure à l'autre : on utilise alors un traitement statistique de ces résultats pour estimer l'incertitude, ce qu'on appelle **méthode de type A** ;
- soit la mesure ne peut être réalisée qu'une seule fois, ou donne le même résultat d'une fois sur l'autre [1] : il faut alors utiliser toutes les informations dont on dispose sur le protocole expérimental et les appareils utilisés pour estimer l'incertitude, ce qu'on appelle **méthode de type B**.

Cependant, ces calculs parfois lourds ne doivent pas faire oublier que

Réaliser une mesure précise et l'analyser est d'abord et avant tout faire preuve de bon sens !

1. Ce qui ne veut pas dire que le résultat est certain : penser aux erreurs systématiques !

II - Estimation de type A par analyse statistique d'une série de mesures

> ***Exemple :*** *Ce paragraphe détaille l'analyse des résultats du TP O1 sur la propagation du son.*

Par un protocole bien adapté (allez voir dans votre cahier de TP !), chaque binôme a réalisé cinq mesures de la vitesse du son dans l'air, dont l'histogramme des résultats est représenté figure 2. Toutes ces mesures sont réalisées dans des conditions identiques, et on admet que tout le monde a bien travaillé : on peut donc toutes les utiliser.

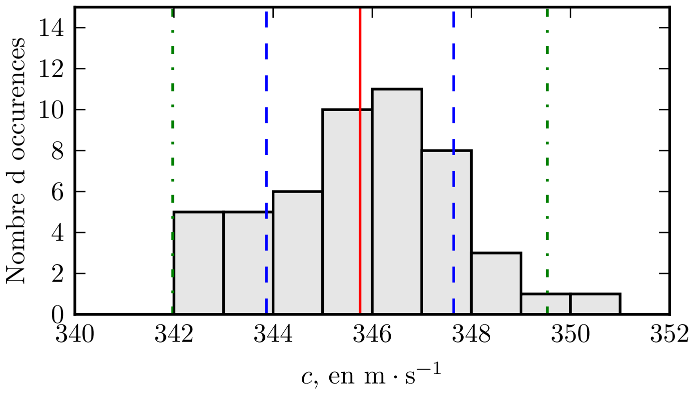


Figure 2 – Histogramme des résultats expérimentaux issus de 50 mesures. La hauteur de chaque rectangle indique le nombre de résultats dont la valeur est comprise entre les deux extrémités de la base. Le trait continu rouge indique la valeur moyenne, les traits pointillés sont séparés d'un écart-type.

L'objectif est d'utiliser toutes les valeurs mesurées pour estimer le mieux possible la valeur vraie et l'incertitude sur cette estimation.

II.1 - Estimation de la valeur vraie : « valeur mesurée »

La meilleure façon d'estimer la valeur vraie est de prendre la valeur moyenne des valeurs mesurées,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Espace 6

Par cohérence avec le reste du document, cette estimation sera qualifiée de « valeur mesurée », ce qui est un peu abusif : elle utilise en fait *tous* les résultats de *toutes* les mesures.

> ***Exemple :*** *avec les données de la figure 2,* $\bar{c} = 345{,}754\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

II.2 - Estimation de l'incertitude

a) Si on ne s'intéressait qu'à une seule valeur

Compte tenu de l'histogramme figure 2, comment pourrait-on estimer l'incertitude sur une mesure unique ?

⇝ idée : utilisation de l'écart-type.

Espace 7

L'écart type σ permet d'estimer l'incertitude type $u(x_i)$ sur le résultat x_i d'une seule mesure,

$$u(x_i) = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}\,.$$

Espace 8

> ***Rappel :*** *L'écart type d'une distribution statistique quantifie l'écart des valeurs à la moyenne.*

> ***Remarque :*** *Si les valeurs mesurées x_i sont distribuées suivant une loi normale $\mathcal{N}(\bar{x}, \sigma)$ de moyenne $\bar{x}$ et d'écart-type σ, alors dans la limite d'un très grand nombre de réalisations de l'expérience :*
> - *68 % des valeurs seraient comprises dans l'intervalle $[\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma]$, c'est de là que vient le niveau de confiance associé à l'incertitude type ;*
> - *95 % des valeurs seraient comprises dans l'intervalle $[\bar{x}-2\sigma, \bar{x}+2\sigma]$, d'où le niveau de confiance de l'incertitude élargie et la relation entre incertitude élargie et incertitude type.*

> ***Exemple :*** *avec les données de la figure 2, $\sigma = 1{,}889\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (sans se soucier des chiffres significatifs).*

Interprétation : Prenons deux mesures au hasard, par exemple $c_1 = 343{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $c_2 = 348{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Qu'en conclut-on ?

Il y a 68 % de chances que c soit comprise dans l'intervalle $[343{,}1-1{,}889; 343{,}1+1{,}889]$ et il y a aussi 68 % de chances que c soit comprise dans l'intervalle $[348{,}5-1{,}889; 348{,}5+1{,}889]$. Il y a incompatibilité : dans au moins un des deux cas, on tombe dans les 32 « mauvais » pourcents.

Espace 9

Il y a 95 % de chances que c soit comprise dans l'intervalle $[343-3{,}778; 343+3{,}778]$ et il y a aussi 68 % de chances que c soit comprise dans l'intervalle $[348{,}5-3{,}778; 348{,}5+3{,}778]$. Le niveau de confiance est plus élevé, mais l'incertitude plus grande ... et les deux mesures sont compatibles.

Espace 10

b) En considérant toutes les valeurs

La meilleure façon d'estimer la valeur vraie est de considérer la valeur moyenne des N mesures. Quelle est l'incertitude associée à cette estimation ?

$\rightsquigarrow$ idée naïve : $u(\bar{x}) = \sigma$.

Très pessimiste : on fait plusieurs mesures pour gagner en précision, mais cela ne se traduirait pas par une diminution de l'incertitude ?!

Espace 11

L'incertitude type $u(\bar{x})$ sur la valeur moyenne $\bar{x}$ associée à un niveau de confiance de 68 % vaut

$$u(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\,.$$

L'incertitude élargie sur la valeur moyenne $\bar{x}$ associée à un niveau de confiance de 95 % vaut alors

$$\Delta x = 2u(\bar{x}) = \frac{2\sigma}{\sqrt{N}}\,.$$

L'incertitude sur la moyenne diminue bien avec le nombre N de mesures réalisées, ce qui est plus conforme à l'intuition.

> ***Remarque :*** *Pour diminuer l'incertitude d'un facteur 10 (et donc gagner un chiffre significatif sur le résultat), il faut multiplier le nombre de mesures par 100. Le gain arrive donc lentement.*

Exemple : *toujours avec les données de la figure 2 ($N = 50$),*

$$\Delta x = \frac{2\sigma}{\sqrt{50}} = 0{,}267\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Conclusion des expériences :

Sans faire attention aux CS : $c = 345{,}754 \pm 0{,}267\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
Avec les CS corrects : $c = 345{,}8 \pm 0{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.
D'après nos expériences, il y a 95 % de chances que la vitesse du son dans l'air dans les conditions de l'expérience soit comprise entre 345,5 et 346,1 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Espace 12

II.3 - Conditions d'applications

Pour terminer, insistons sur deux conditions à remplir pour que cette méthode soit réalisable :
- il faut d'une part disposer d'un nombre suffisant de valeurs (cinq est un minimum), et donc pouvoir répéter l'expérience plusieurs fois facilement ;
- et d'autre part que les mesures permettent de mettre en évidence la dispersion des valeurs.

III - Estimation de type B de l'incertitude associée à une mesure unique

Si une étude statistique n'est pas possible, l'incertitude doit être estimée à partir de toutes les informations disponibles au sujet de la variabilité de la grandeur d'entrée, en particulier les indications de précision fournies par les constructeurs des différents appareils utilisés. Les quelques règles générales énoncées dans ce paragraphe ne peuvent donc pas être exhaustives et doivent être adaptées à chaque situation. Ici plus qu'ailleurs, faire preuve de bon sens est essentiel.

Les outils mathématiques associés à la détermination des incertitudes de type B (probabilités) sont hors du cadre de ce document. On se limite donc à admettre que les notions d'incertitude type et d'incertitude élargie se généralisent, et à utiliser les résultats suivants qui seraient démontrables avec plus de temps.

III.1 - Incertitude de pointé ou de repérage

Une erreur de pointé est associée au repérage par l'expérimentateur d'une situation particulière, par exemple le maximum ou le minimum d'un signal. Pour estimer l'incertitude associée, il faut évaluer les valeurs extrémales qui semblent satisfaire le critère de repérage.

> L'incertitude élargie associée à un repérage correspond à la moitié de l'écart
> entre les valeurs extrémales satisfaisant le critère de repérage

Exemple : *Imaginons un TP où l'on forme sur un écran l'image d'objet par l'intermédiaire d'une lentille convergente en repérant la position de l'écran sur un banc optique. L'image semble nette pour des positions allant de 29,7 à 30,5 cm. Le résultat de la mesure de position de l'écran est alors $30{,}1 \pm 0{,}4$ cm. Remarquons que l'estimation de la plage de netteté et donc de l'incertitude peut dépendre sensiblement de la personne réalisant l'expérience.*

III.2 - Incertitude de lecture sur un appareil gradué

Le prototype de mesure de ce type est une mesure de longueur à la règle. L'incertitude est estimée à partir de la valeur correspondant à une graduation Δ_{grad} (1 mm pour une règle). On peut montrer que l'incertitude élargie Δx associée vaut

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta_{\mathrm{grad}} \simeq 0{,}58\,\Delta_{\mathrm{grad}}$$

Au niveau de précision qui nous intéresse (un chiffre significatif sur l'incertitude), il suffit de retenir que

> L'incertitude élargie sur une valeur lue sur un appareil gradué est de l'ordre de la moitié d'une graduation.

> ***Exemple :*** *Imaginons que l'on mesure 13,7 cm sur une règle graduée au millimètre. La formule ci-dessus donne alors 13,70 ± 0,05 cm. Ce résultat est en fait très intuitif, puisqu'il traduit que la graduation 13,7 correspond mieux à la longueur qui nous intéresse que les graduations 13,6 et 13,8.*

Un autre cas classique où on rencontre une incertitude de ce type est celui de la mesure sur un oscilloscope à l'aide de curseurs lorsque la précision est limitée par la discrétisation du curseur.

III.3 - Incertitude de mesure par un appareil numérique

Des informations sur la précision des mesures réalisées par un appareil numérique sont fournies par les notices des constructeurs, souvent sous la forme d'une valeur Δ_c. Sans plus de précision, cela indique que le constructeur garantit que la valeur vraie diffère de la valeur affichée de moins de Δ_c. L'incertitude élargie Δx lui est reliée par

$$\Delta x = \frac{2}{\sqrt{3}}\Delta_c \simeq 1{,}2\,\Delta_c\,.$$

Au niveau de précision qui nous intéresse (un chiffre significatif sur l'incertitude), il suffit de retenir que

> L'incertitude élargie sur une valeur affichée est de l'ordre de l'incertitude constructeur.

Les notices donnent souvent les incertitudes constructeur sous la forme « n % + m digits ». L'incertitude Δ_c vaut alors n % de la valeur affichée auxquels il faut ajouter m fois la dernière puissance de dix affichée.

> ***Exemple :*** *Un voltmètre numérique affiche 2175 mV. La fiche technique indique une précision de « 0,1 % + 1 ». L'incertitude constructeur vaut alors*
>
> $$\Delta_c = 2175 \times 0{,}1\,\% + 1 = 3{,}175 \simeq 3\,\mathrm{mV}\,.$$
>
> *Pour une autre mesure, le même voltmètre réglé sur le même calibre affiche 75,0 mV. L'incertitude constructeur associée vaut donc*
>
> $$\Delta_c = 75{,}0 \times 0{,}1\,\% + 0{,}1 = 0{,}175 \simeq 0{,}2\,\mathrm{mV}\,.$$

Il arrive parfois que l'appareil affiche une valeur fluctuante où les derniers chiffres « bougent ». Pour estimer l'incertitude dans ce cas, il faut procéder comme précédemment. Si l'incertitude Δ_c est supérieure aux fluctuations, cela signifie que le constructeur considère comme non-fiables les chiffres fluctuants, et il n'y a donc pas à en tenir compte. Si l'incertitude Δ_c est inférieure aux fluctuations, alors cela signifie que la grandeur d'intérêt varie réellement. On peut donc procéder à une estimation d'incertitude de type A.

III.4 - Incertitude de fabrication sur une valeur nominale fournie par un constructeur

Tout le matériel issu « directement » d'une fabrication industrielle, en particulier les composants électroniques, est fourni par le constructeur avec une valeur nominale et une tolérance de fabrication sur cette valeur. Le même raisonnement que pour la mesure par un appareil numérique indique que

> L'incertitude élargie sur une valeur nominale est de l'ordre de la tolérance de fabrication.

> ***Exemple :*** *Une résistance dont les bagues de couleur indiquent « 10 kΩ, 5 % » est une résistance valant a priori 10,0 ± 0,5 kΩ ... ce dont on peut s'assurer par une mesure à l'ohmmètre.*

III.5 - Incertitude totale

Il est fréquent que plusieurs sources d'incertitudes soient à prendre en compte sur une même grandeur. Notons M ce nombre. Une approche naïve consisterait à ajouter les incertitudes les unes aux autres,

$$\Delta x = \Delta x_1 + \ldots + \Delta x_M\,.$$

Cette approche est trop pessimiste : les erreurs de mesure ne s'ajoutent pas nécessairement, mais peuvent aussi se compenser.

On peut montrer mathématiquement que la bonne façon de calculer l'incertitude totale est la suivante.

> Le carré de l'incertitude totale est égal à la somme des carrés de chaque incertitude, soit
>
> $$(\Delta x)^2 = (\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_M)^2 \qquad \text{ou} \qquad \Delta x = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_M)^2}$$
>
> si M incertitudes estimées par une méthode de type B interviennent.

Néanmoins, il est fréquent qu'une source d'incertitude soit largement prépondérante, auquel cas il peut suffire de ne considérer qu'elle : rappelons que seul un chiffre significatif nous intéresse sur l'incertitude.

> ***Exemple :*** *Reprenons l'exemple de la mesure de position de l'écran. Outre l'incertitude de pointé Δx_P discutée précédemment, la mesure est également affectée par une incertitude de lecture sur le banc optique Δx_L, valant 0,5 mm s'il est gradué au millimètre. L'incertitude totale est alors*
>
> $$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_P)^2 + (\Delta x_L)^2} = \sqrt{4^2 + 0{,}5^2} = 4{,}03 \simeq 4\,\mathrm{mm}\,.$$
>
> *Comme l'incertitude de pointé est bien plus grande que l'incertitude de lecture, il est en fait suffisant de ne considérer qu'elle.*

IV - Incertitudes composées

Jusqu'à présent, nous avons expliqué comment estimer l'incertitude sur une valeur directement mesurée x. Néanmoins, il est très fréquent que cette valeur x serve d'intermédiaire pour en déduire une autre y. Ainsi, une mesure de vitesse peut se faire en mesurant séparément une distance et un temps. Connaissant l'incertitude Δx, voyons comment en déduire Δy.

IV.1 - Approche simple : la valeur calculée ne dépend que d'une seule valeur mesurée

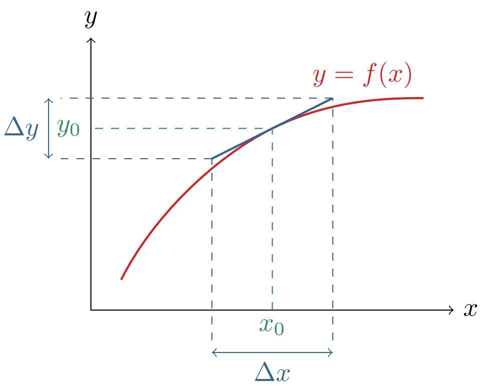
> ***Remarque :*** *Paragraphe pas explicitement au programme. La démonstration n'est pas à connaître.*

Commençons pour fixer les idées et comprendre la démarche par le cas le plus simple où une seule grandeur mesurée x intervient dans la valeur calculée y. La valeur mesurée, notée x_0 dans ce paragraphe, est associée à une incertitude Δx.

Sur le plan mathématique, x et y sont reliées par une fonction f telle que $y = f(x)$. Si x varie entre $x_0 - \Delta x$ et $x_0 + \Delta x$, alors y varie entre $f(x_0 - \Delta x)$ et $f(x_0 + \Delta x)$, et donc

$$\Delta y = \frac{1}{2}\,|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)|$$

La valeur absolue est ajoutée pour assurer que l'incertitude Δy soit toujours positive.



Montrons que l'incertitude Δy peut être reliée à la fonction dérivée $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$. Le raisonnement est illustré sur la figure ci-contre, et demande de se rappeler que le nombre dérivé s'interprète géométriquement comme la pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction. Repartons de la définition de la dérivée comme limite du taux d'accroissement,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,.$$

Si Δx n'est pas trop grand, il est alors raisonnable d'approximer

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) \simeq \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad \text{soit} \qquad f(x_0+\Delta x) \simeq f(x_0) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)\,\Delta x$$

$$\text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) \simeq \frac{f(x_0-\Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} \qquad \text{soit} \qquad f(x_0-\Delta x) \simeq f(x_0) - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)\,\Delta x$$

Ces expressions sont mathématiquement des développements limités au premier ordre. En les insérant dans l'expression de Δy, on en déduit

$$\Delta y \simeq \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)\right| \Delta x\,.$$

La valeur d'une grandeur calculée y dépendant d'une seule grandeur mesurée x
par l'intermédiaire d'une fonction $y = f(x)$ est donnée par

$$y_0 = f(x_0) \qquad \text{et} \qquad \Delta y = \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)\right| \Delta x$$

Exemple : *Imaginons une expérience pour mesurer la fréquence ν d'une radiation optique, connaissant la vitesse de la lumière $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Une mesure de longueur d'onde donne $\lambda_0 = 589{,}0 \pm 0{,}2\,\mathrm{nm}$. Puisque $\nu = c/\lambda$, les calculs donnent*

$$\nu_0 = 5{,}09 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz} \qquad \textit{et} \qquad \Delta\nu = \left| -\frac{c}{\lambda_0^2} \right| \Delta\lambda = 1{,}72 \cdot 10^{12} \simeq 1 \cdot 10^{12}\,\mathrm{Hz}$$

On en déduit alors que la fréquence de la radiation étudiée vaut $(5{,}09 \pm 0{,}01) \cdot 10^{14}$ Hz.

IV.2 - Cas général : la valeur calculée dépend de plusieurs valeurs mesurées

Remarque : *Paragraphe hors-programme, donné à titre culturel pour voir d'où viennent les résultats des paragraphes suivants.*

Le cas étudié au paragraphe précédent est en fait assez rare, et accéder à une grandeur calculée y demande souvent d'exploiter le résultat de mesures de plusieurs grandeurs. L'incertitude Δy porte le nom d'**incertitude composée**.

Mathématiquement, la grandeur calculée y est reliée à M grandeurs mesurées notées x_j par une fonction f telle que $y = f(x_1, ..., x_M)$. Dans ce cas, on peut montrer que le résultat précédent se généralise : la valeur d'une grandeur calculée y dépendant de plusieurs grandeurs mesurées $x_1, ..., x_M$ par l'intermédiaire d'une fonction $y = f(g_1, ..., g_M)$ est donnée par

$$x_0 = f(x_{1,0}, ..., x_{M,0}) \qquad \text{et} \qquad (\Delta y)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{1,0})\,\Delta x_1 \right)^2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_M}(x_{M,0})\,\Delta x_M \right)^2 .$$

Remarque : *La notation $\partial f/\partial x_j$ désigne la dérivée partielle de f par rapport à x_j, c'est-à-dire la dérivée calculée en considérant toutes les autres variables de la fonction f comme des constantes. Nous apprendrons à calculer les dérivées partielles dans le courant de l'année.*

IV.3 - Cas particulier d'une somme ou d'une différence

Si la grandeur calculée est une somme ou différence, $y = x_1 \pm x_2$, alors le résultat précédent indique que

L'incertitude sur le résultat d'une somme ou d'une différence est reliée à l'incertitude sur chacun des termes par $(\Delta y)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2$ soit $\Delta y = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}$.

Espace 13

Ce résultat s'écrit de la même façon pour l'incertitude type ou l'incertitude élargie.

Ainsi le carré de l'incertitude *absolue* est la somme des carrés des incertitudes *absolues*.

Attention, $\Delta y \neq \Delta x_1 + \Delta x_2$: les erreurs peuvent se compenser et pas seulement s'ajouter, ce que traduit la relation encadrée.

Remarque : *Le résultat est identique pour une somme ou une différence, le signe éventuel disparaît à cause des carrés.*

Exercice C4 : Incertitude sur une différence

On mesure la distance $d = x_2 - x_1$ entre deux points repérés avec la même incertitude élargie $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0{,}5$ mm. Quelle est l'incertitude élargie sur d ?

$\Delta d = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2} \simeq 0{,}7\,\mathrm{mm} < 1\,\mathrm{mm}$

Espace 14

IV.4 - Cas particulier d'un produit ou d'un quotient

Si la grandeur calculée est un produit ou un quotient, $y = x_1 \times x_2$ ou $y = x_1/x_2$, alors le résultat général indique

L'incertitude sur le résultat d'un produit ou d'un quotient est reliée à l'incertitude sur chacun des facteurs par

$$\left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 = \left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2 .$$

Espace 15

Ce résultat s'écrit de la même façon pour l'incertitude type ou l'incertitude élargie.

Cette fois, c'est le carré de l'incertitude *relative* qui est la somme des carrés des incertitudes *relatives*.

> ***Remarque :*** *Le résultat est identique pour un produit ou un quotient. Cela découle du résultat général, mais il est peu évident de le deviner autrement.*

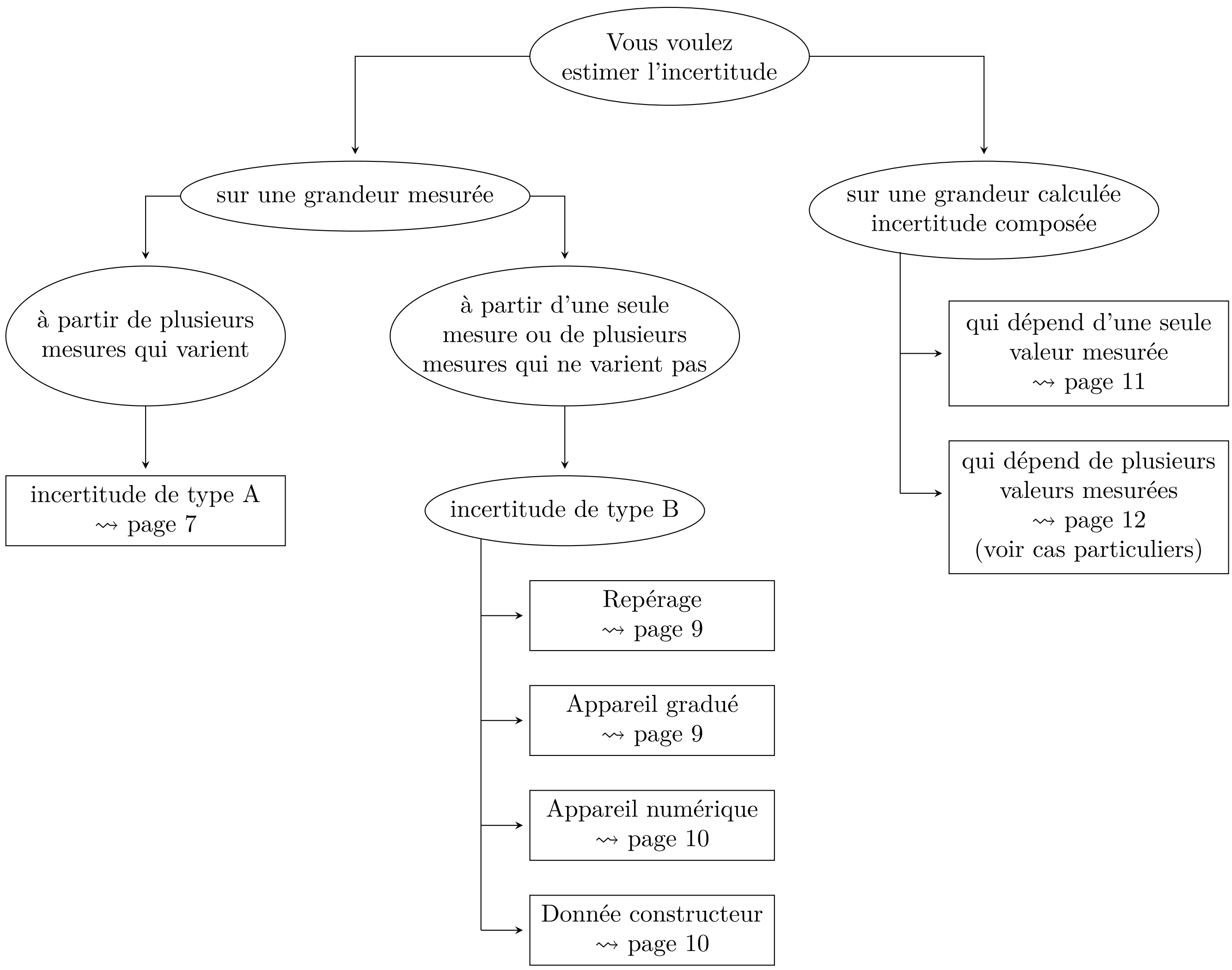
Exercice C5 : Incertitude sur un produit

On détermine la vitesse c du son dans l'air en ayant mesuré la fréquence ν et la longueur d'onde λ d'ultrasons. La relation de dispersion donne $c = \lambda\nu$. Exprimer l'incertitude type $u(c)$ en fonction de $u(\lambda)$ et $u(\nu)$.

$$\frac{u(c)}{c} = \sqrt{\left(\frac{u(\lambda)}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{u(\nu)}{\nu}\right)^2}$$

Espace 16

V - S'y retrouver en pratique



Étienne Thibierge, 31 août 2017, www.etienne-thibierge.fr