



BLAISE PASCAL
PT 2018-2019

Outils pour la physique

Analyse vectorielle

Au programme

Extraits des programmes officiels de PTSI et PT (disséminés aux quatre coins des programmes!).

Notions et contenus	Capacités exigibles
Vecteurs et systèmes de coordonnées.	<p>Exprimer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée.</p> <p>Utiliser les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.</p> <p>Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées et construire le trièdre local associé.</p> <p>Exprimer une surface élémentaire dans un système de coordonnées adapté.</p>

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel : appendice 2 « Outils mathématiques », bloc 1 « Analyse vectorielle ».

Le thème « analyse vectorielle » n'a pas fait l'objet d'une rubrique en première année, les expressions des différents opérateurs introduits sont exigibles en coordonnées cartésiennes. Les expressions des opérateurs en coordonnées cylindriques et sphériques et les formules d'analyse vectorielle ne sont pas exigibles ; elles doivent donc être systématiquement rappelées.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Gradient.	<p>Connaître le lien entre le gradient et la différentielle.</p> <p>Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes.</p> <p>Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est perpendiculaire aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.</p>
Divergence.	<p>Citer et utiliser le théorème d'Ostrogradski.</p> <p>Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.</p>
Rotationnel.	<p>Citer et utiliser le théorème de Stokes.</p> <p>Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes.</p>
Laplacien d'un champ scalaire.	<p>Définir $\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f)$.</p> <p>Exprimer le laplacien en coordonnées cartésiennes.</p>
Laplacien d'un champ de vecteurs.	<p>Exprimer le laplacien d'un champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes.</p> <p>Utiliser la formule d'analyse vectorielle $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$.</p>
Cas des champs proportionnels à $\exp(i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r})$ ou à $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)$.	<p>Exprimer l'action des opérateurs d'analyse vectorielle sur un tel champ à l'aide de l'opérateur $i\vec{k}$.</p>

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Plan du cours

I	Systèmes de coordonnées	2
I.1	Coordonnées cartésiennes	2
I.2	Coordonnées cylindriques ou cylindro-polaires	3
I.3	Coordonnées sphériques	3
II	Intégrales	4
II.1	Intégrales de chemin	4
II.2	Intégrales de surface	4
II.3	Intégrales de volume	4
III	Opérateurs vectoriels	5
III.1	Expressions en coordonnées cartésiennes	5
III.2	Expressions dans les autres systèmes de coordonnées	6
III.3	Opérateurs et lignes de champ	7
III.4	Identités entre opérateurs	8
III.5	Théorèmes sur les intégrales des opérateurs	8

I - Systèmes de coordonnées

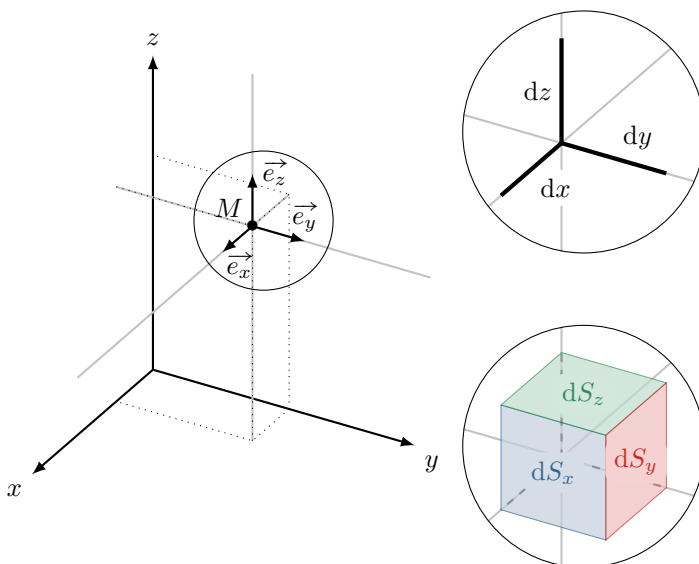
Tous les résultats de ce paragraphe sont à connaître parfaitement, ou à retrouver très vite.

En pratique, il suffit de connaître impeccablement l'expression du déplacement élémentaire et la façon dont elle permet de retrouver les autres.

Pour des figures que vous pouvez faire bouger :

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/index.php

I.1 - Coordonnées cartésiennes



- **Coordonnées :**
 - ▷ du point $M : -\infty < x, y, z < +\infty$;
 - ▷ du vecteur $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.

- **Déplacement élémentaire :**

$$d\vec{M} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

- **Surfaces élémentaires :** la surface dS_x , de normale \vec{e}_x , s'obtient en multipliant les composantes selon \vec{e}_y et \vec{e}_z du vecteur $d\vec{M}$, etc.

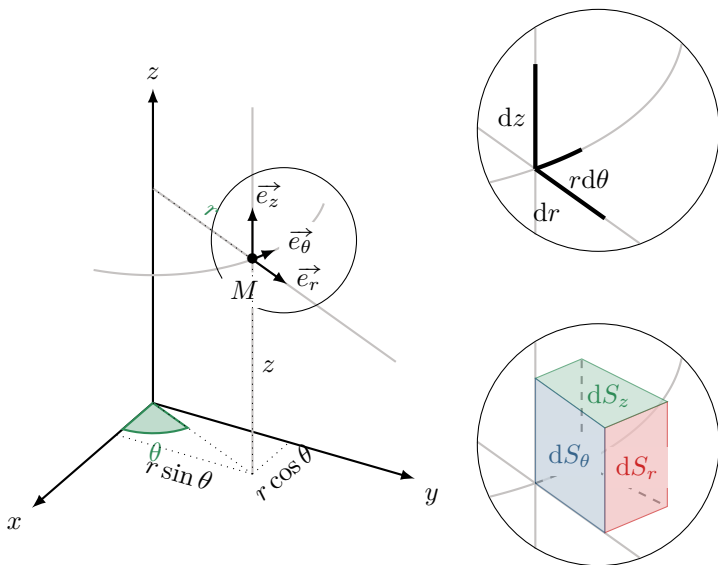
$$dS_x = dy dz \quad dS_y = dx dz \quad dS_z = dx dy .$$

- **Volume élémentaire :** le volume dV est le produit des trois composantes du vecteur $d\vec{M}$.

$$dV = dx dy dz .$$

I.2 - Coordonnées cylindriques ou cylindro-polaires

Dans un plan $z = \text{cte}$, les coordonnées cylindriques coïncident avec les coordonnées polaires planes, d'où la dénomination de coordonnées « cylindro-polaires ».



- **Coordonnées :**
 - ▷ du point $M : r \geq 0, -\pi < \theta \leq \pi, -\infty < z < +\infty$;
 - ▷ du vecteur $\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$, pas de composante sur \vec{e}_θ .

- **Déplacement élémentaire :**

$$d\vec{M} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

- **Surfaces élémentaires :** la surface dS_r , de normale \vec{e}_r , s'obtient en multipliant les composantes selon \vec{e}_θ et \vec{e}_z du vecteur $d\vec{M}$, etc.

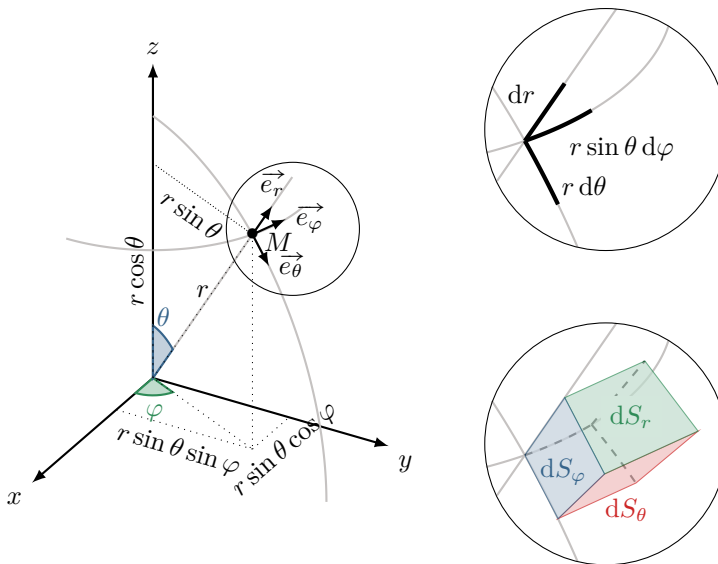
$$dS_r = r d\theta dz \quad dS_\theta = dr dz \quad dS_z = r dr d\theta .$$

- **Volume élémentaire :** le volume dV est le produit des trois composantes du vecteur $d\vec{M}$.

$$dV = r dr d\theta dz .$$

I.3 - Coordonnées sphériques

Dans un plan $\varphi = \text{cte}$, les coordonnées cylindriques coïncident avec les coordonnées polaires planes, ce qui justifie le nom des coordonnées θ et φ . Bien qu'à première vue on puisse penser que le θ cylindrique corresponde au φ sphérique, c'est en fait faux.



- **Coordonnées :**
 - ▷ du point $M : r \geq 0, 0 < \theta \leq \pi, 0 < \varphi < 2\pi$ (ou l'inverse concernant les angles);
 - ▷ du vecteur $\vec{OM} = r \vec{e}_r$.

- **Déplacement élémentaire :**

$$d\vec{M} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi .$$

- **Surfaces élémentaires :** la surface dS_r , de normale \vec{e}_r , s'obtient en multipliant les composantes selon \vec{e}_θ et \vec{e}_φ du vecteur $d\vec{M}$, etc.

$$dS_r = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad dS_\theta = r \sin \theta dr d\varphi \quad dS_\varphi = r dr d\theta .$$

- **Volume élémentaire :** le volume dV est le produit des trois composantes du vecteur $d\vec{M}$.

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi .$$

II - Intégrales

Notations :

- ▷ f désigne un **champ scalaire**, c'est-à-dire une fonction $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ qui à tout point M de l'espace (trois coordonnées réelles) associe un nombre réel ;
- ▷ \vec{A} désigne un **champ vectoriel**, c'est-à-dire une fonction $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui à tout point M de l'espace (trois coordonnées réelles) associe un vecteur.

II.1 - Intégrales de chemin

Notation	Signification	Variantes et remarques	Exemples
$\int_C f(M) d\ell$	Intégrale de la quantité $f(M)$ le long d'un chemin ou contour C .	$\int_A^B f(M) d\ell$: même chose mais en précisant le début et la fin du chemin. Attention, il faut préciser le détail du chemin. $\oint_C f(M) d\ell$: même chose mais le contour est fermé. Attention, il faut préciser le sens de parcours.	Chemin optique $(AB) = \int_C n(M) d\ell$ Longueur d'une courbe $L_{AB} = \int_A^B d\ell$
$\int_C \vec{A}(M) \cdot d\vec{\ell}$ (circulation)	Intégrale de $\vec{A}(M) \cdot d\vec{\ell}$ le long du chemin ou contour orienté C . Vecteur $d\vec{\ell}$ tangent et orienté dans le même sens que le chemin.	Idem.	Travail d'une force $W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ Circulation du champ magnétique (th. d'Ampère) $\oint_C \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell}$

II.2 - Intégrales de surface

Notation	Signification	Variantes et remarques	Exemples
$\iint_S f(M) dS$	Intégrale de la quantité $f(M)$ sur la surface S .	$\oiint_S f(M) dS$: même chose mais la surface est fermée.	Expression de la surface : $S = \iint_S dS$
$\iint_S f(M) d\vec{S}$	Intégrale de la quantité $f(M)$ sur la surface orientée S . Vecteur $d\vec{S} = dS \vec{n}$ normal à la surface, orientation à préciser.	Le résultat est un vecteur.	Force de pression : $\vec{F}_p = \iint_S P d\vec{S}$
$\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ (flux)	Intégrale de $\vec{A} \cdot d\vec{S}$ sur la surface orientée S .	Le résultat est un scalaire. $\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$: même chose mais la surface est fermée.	Flux du champ électrique (th. de Gauss) : $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ Débit volumique $D_V = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$ Flux thermique $\iint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}$ Intensité $\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$

II.3 - Intégrales de volume

Notation	Signification	Variantes et remarques	Exemples
$\iiint_V f(M) dV$	Intégrale de la quantité $f(M)$ sur le volume V .		Expression du volume : $V = \iiint_V dV$ Masse totale $M = \iiint_V \rho dV$ Charge totale $Q = \iiint_V \rho dV$

III - Opérateurs vectoriels

• **Notations :**

- ▷ comme précédemment, f est un champ scalaire et \vec{A} un champ vectoriel ;
- ▷ pour alléger les notations des dérivées partielles, les variables gardées constantes sont sous-entendues ;
- ▷ on utilise une notation « matricielle » pour les vecteurs :

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

- **Nabla :** il s'agit d'une notation symbolique, très pratique pour retrouver les formules des différents opérateurs en coordonnées cartésiennes (mais attention, pas pour les autres systèmes de coordonnées). Formellement, on peut l'écrire avec des composantes, comme un vecteur, mais qui sont des opérateurs de dérivation :

$$\vec{\nabla} \stackrel{\text{déf.}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Nabla ne vient jamais seul, mais s'applique nécessairement à un champ scalaire ou vectoriel.

Remarque : Dans la littérature anglo-saxonne, les opérateurs vectoriels sont systématiquement notés avec nabla.

III.1 - Expressions en coordonnées cartésiennes

Tous les résultats de ce paragraphe sont à connaître parfaitement, ou (pour le rotationnel seulement) à retrouver très vite.

Opérateur	Départ et arrivée	Expression en coordonnées cartésiennes	Le retrouver avec nabla
Gradient $\vec{\text{grad}} f$	s'applique à un scalaire retourne un vecteur	$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$	$\vec{\nabla} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$
Divergence $\text{div } \vec{A}$	s'applique à un vecteur retourne un scalaire	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Rotationnel $\vec{\text{rot}} \vec{A}$	s'applique à un vecteur retourne un vecteur	$\begin{bmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{bmatrix}$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{bmatrix}$

Opérateur	Départ et arrivée	Expression en coordonnées cartésiennes	Le retrouver avec nabla
Laplacien scalaire Δf	s'applique à un scalaire retourne un scalaire	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\nabla^2 f = \left\ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right\ ^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f$
Laplacien vectoriel $\Delta \vec{A}$	s'applique à un vecteur retourne un vecteur	$\Delta \vec{A} = \begin{bmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}$	

III.2 - Expressions dans les autres systèmes de coordonnées

a) Coordonnées cylindriques : cas général à ne pas retenir

$$\begin{aligned} \triangleright \overrightarrow{\text{grad}} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \\ \triangleright \text{div} \vec{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \triangleright \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z \\ \triangleright \Delta f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned}$$

b) Coordonnées sphériques : cas général à ne pas retenir

$$\begin{aligned} \triangleright \overrightarrow{\text{grad}} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \\ \triangleright \text{div} \vec{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\ \triangleright \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi \\ \triangleright \Delta f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \end{aligned}$$

c) Deux cas particuliers qui peuvent être utiles

• Champ scalaire à symétrie cylindrique

Le champ f ne dépend que de la distance r à un axe : cela revient en coordonnées cylindriques à $f(r, \theta, z) = f(r)$ seulement, ce qui annule certaines dérivées. Dans ce cas,

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{df}{dr} \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \Delta f = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right).$$

• Champ scalaire à symétrie sphérique

Le champ f ne dépend que de la distance r à un point : cela revient en coordonnées sphériques à $f(r, \theta, \varphi) = f(r)$ seulement, ce qui annule certaines dérivées. Dans ce cas,

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{df}{dr} \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right).$$

*** **Attention !** L'expression du gradient est la même dans les deux cas, mais pas celle du Laplacien.

III.3 - Opérateurs et lignes de champ

a) Gradient

La définition formelle de l'opérateur gradient indique qu'au cours d'un déplacement élémentaire \overrightarrow{dM} , le champ f varie de

$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{dM}.$$

Ce lien entre différentielle et gradient est très explicite en coordonnées cartésiennes, puisque nous avons défini la différentielle par

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Cependant, il est bien plus général ... et permet d'ailleurs de retrouver l'expression du gradient dans tous les systèmes de coordonnées connaissant celle du déplacement élémentaire.

En raisonnant qualitativement sur un déplacement élémentaire tel que $df > 0$ (f augmente), on constate qu'alors \overrightarrow{dM} et $\overrightarrow{\text{grad}} f$ sont « plutôt dans le même sens ». Plus généralement, le gradient d'un champ f est orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.

Si le déplacement élémentaire se fait à f constant, alors $df = 0$: on en déduit que le gradient d'un champ f est perpendiculaire aux surfaces iso- f , c'est-à-dire les surfaces où $f = \text{cte}$.

b) Divergence

De façon schématique, en un point M autour duquel $\|\overrightarrow{A}\|$ ne varie pas,

- ▷ si $\text{div} \overrightarrow{A} > 0$, les lignes de champ de \overrightarrow{A} divergent ;
- ▷ si $\text{div} \overrightarrow{A} < 0$, les lignes de champ de \overrightarrow{A} convergent ;
- ▷ si $\text{div} \overrightarrow{A} = 0$, les lignes de champ de \overrightarrow{A} ne divergent ni ne convergent : elles sont ou bien parallèles, ou bien circulaires.

Ces résultats ne sont que qualitatifs, et ne sont généralement plus vrais si $\|\overrightarrow{A}\|$ varie. Dans ce cas il n'y a pas de relation générale simple.

c) Rotationnel

De façon schématique, en un point M autour duquel $\|\overrightarrow{A}\|$ ne varie pas,

- ▷ si $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A} = \overrightarrow{0}$, les lignes de champ de \overrightarrow{A} ne s'enroulent pas : elles sont ou bien parallèles, ou bien parfaitement « en oursin », c'est-à-dire parfaitement convergentes ou divergentes ;
- ▷ si $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{0}$, les lignes de champ de \overrightarrow{A} s'enroulent en sens trigonométrique autour de la direction donnée par $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A}$.

Ces résultats ne sont que qualitatifs, et ne sont généralement plus vrais si $\|\overrightarrow{A}\|$ varie. Dans ce cas il n'y a pas de relation générale simple.

d) Et en dessin

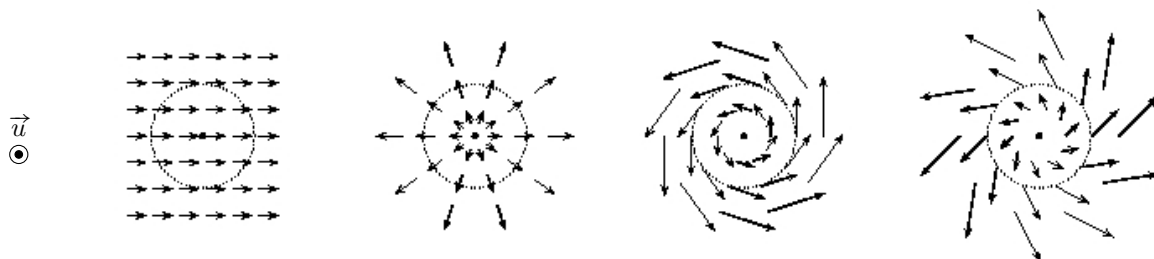


Figure 1 – Opérateurs vectoriels et lignes de champ.

Sur la figure 1,

- ▷ Gauche : $\text{div} \overrightarrow{A} = 0$ et $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A} = \overrightarrow{0}$;
- ▷ Centre gauche : $\text{div} \overrightarrow{A} > 0$ et $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A} = \overrightarrow{0}$;
- ▷ Centre droit : $\text{div} \overrightarrow{A} = 0$ et $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{0}$ porté par \overrightarrow{u} ;
- ▷ Droite : $\text{div} \overrightarrow{A} > 0$ et $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{0}$ porté par \overrightarrow{u} ;

III.4 - Identités entre opérateurs

Ces identités servent dans des démonstrations générales, formelles, mais rarement dans des cas pratiques. Seules les deux premières sont à mémoriser.

- **Une identité très, très utile :**

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}.$$

- **Définition du laplacien :** formellement, le laplacien scalaire est défini par

$$\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f).$$

- **Deux cas d'annulation :** pour tous champs vectoriels et en tout point de l'espace,

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = 0.$$

Ces identités sont utiles pour des démonstrations formelles, générales. Elles peuvent se retrouver avec $\overrightarrow{\nabla}$:

- ▷ la première s'écrit $\overrightarrow{\nabla} \wedge (\overrightarrow{\nabla} f)$, or « $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{\nabla} = \vec{0}$ » ;
- ▷ la deuxième s'écrit $\overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{A})$, or « $\overrightarrow{\nabla}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{A}$ ».

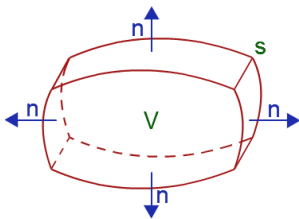
- **Développement de produits :** hormis le gradient d'un produit, ces identités ne sont utiles que dans des cas vraiment exceptionnels en PT ... et sont surtout mentionnées pour montrer qu'elles ne sont pas évidentes !

- ▷ $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f \overrightarrow{\text{grad}} g + g \overrightarrow{\text{grad}} f$
- ▷ $\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$
- ▷ $\text{div}(f \vec{A}) = f \text{div} \vec{A} + (\overrightarrow{\text{grad}} f) \cdot \vec{A}$
- ▷ etc.

III.5 - Théorèmes sur les intégrales des opérateurs

Ces théorèmes sont valables sous des hypothèses de régularité (c'est-à-dire plus ou moins de continuité et dérivabilité) des champs considérés, qui seront toujours valables pour les grandeurs physiques que nous étudions. Ils sont utiles pour des démonstrations générales, formelles.

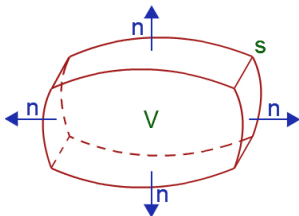
- **Théorème du gradient :** (hors programme)



Soit \mathcal{V} un volume, délimité par la surface (fermée) $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$. La surface est orientée vers l'extérieur. Alors,

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\overrightarrow{\text{grad}} f) dV = \oint_{\mathcal{S}_{\mathcal{V}}} f d\vec{S}.$$

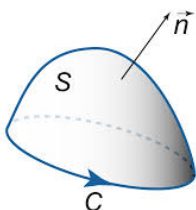
- **Théorème de Green-Ostrogradski :**



Soit \mathcal{V} un volume, délimité par la surface (fermée) $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$. La surface est orientée vers l'extérieur. Alors,

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\text{div} \vec{A}) dV = \oint_{\mathcal{S}_{\mathcal{V}}} \vec{A} \cdot d\vec{S}.$$

- **Théorème de Stokes :**



Soit \mathcal{S} une surface, délimitée par le contour (fermé) $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$. La surface et son contour sont orientés par la règle de la main droite. Alors,

$$\iint_{\mathcal{S}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{S}}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}.$$