



BLAISE PASCAL  
PT 2020-2021

Fiche outil

# Équations différentielles

Extrait du programme officiel de PTSI : appendice 2 « Outils mathématiques », bloc 2 « Équations différentielles ».

Notions et contenus	Capacités exigibles
<p>Équations différentielles linéaires à coefficients constants.</p> <p>Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants : <math>y' + ay = f(x)</math>.</p> <p>Équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants : <math>y'' + ay' + by = f(x)</math>.</p>	<p>Identifier l'ordre. Mettre l'équation sous forme canonique.</p> <p>Connaître la solution générale de l'équation sans second membre (équation homogène).</p> <p>Trouver l'expression des solutions lorsque <math>f(x)</math> est constante ou de la forme <math>A \cos(\omega x + \phi)</math> en utilisant la notation complexe.</p> <p>Utiliser l'équation caractéristique pour trouver la solution générale de l'équation sans second membre.</p> <p>Prévoir le caractère borné ou non de ses solutions (critère de stabilité).</p> <p>Trouver l'expression des solutions lorsque <math>f(x)</math> est constante ou de la forme <math>A e^{\lambda x}</math> avec <math>\lambda</math> complexe.</p> <p>Trouver la solution de l'équation complète correspondant à des conditions initiales données.</p> <p>Représenter graphiquement cette solution.</p>
<p>Autres équations différentielles d'ordre 1 ou 2.</p>	<p>Intégrer numériquement avec un outil fourni.</p> <p>Obtenir une intégrale première d'une équation de Newton <math>x'' = f(x)</math> et l'exploiter graphiquement.</p> <p>Séparer les variables d'une équation du premier ordre à variables séparables.</p> <p>Faire le lien entre les conditions initiales et le graphe de la solution correspondante.</p>

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

**Équation différentielle linéaire à coeffs constants ?**  
 La grandeur cherchée  $u$ , ses dérivées, et un forçage  $f(t)$ .  
 Pas de carré, sinus, racine, etc., de la grandeur.

**Mise sous forme canonique :**  
 Préfacteur 1 devant la dérivée la plus élevée, Paramètres caractéristiques :  $\tau, \omega_0, Q$ , etc.

↓

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = f(t)$$

↓

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2u = f(t)$$

↓

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{1}{\tau^2}u = f(t)$$

↓

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2u = f(t)$$

**Solution particulière  $u_p$  :**  
 Décrit le régime permanent donc de même type que le forçage. Se trouve directement sur l'équation différentielle.

**Solution homogène  $u_h$  :**  
 Décrit le régime transitoire. Connue par cœur à partir de la forme canonique.

↓

$$Ae^{-t/\tau}$$

↓

$$A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

↓

$$Ae^{-t/\tau} + Be^{+t/\tau}$$

↓

Discriminant du polynôme caractéristique  
 $\Delta < 0 \Rightarrow [A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t)] e^{-\mu t}$   
 $\Delta = 0 \Rightarrow (A + Bt) e^{rt}$   
 $\Delta > 0 \Rightarrow Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

**Détermination des constantes :**  
 Identification de la solution (et sa dérivée si ordre 2) avec les conditions initiales. Le nombre de conditions initiales nécessaires est égal à l'ordre de l'équation.  
 ⚠️⚠️⚠️ Attention les constantes se déterminent sur la solution complète.

(s'applique aussi si coefficients constants, mais rarement utile)

**Équation différentielle non-linéaire ou à coefficients variables ?**

si ordre 1 → autres cas → pas de méthode à connaître, suivre l'énoncé.

**Séparation des variables :**  
 À gauche ce qui dépend de  $u$ , à droite ce qui dépend de  $t$ ,  
 Souvent pratique de mettre les constantes avec  $t$  ;  
 Intégration et calcul de la primitive.  
 ⚠️⚠️⚠️ Attention aux bornes d'intégration : côté gauche de  $u_0$  à  $u(t)$ , côté droit de 0 à  $t$ .  
 Conditions initiales à déterminer au préalable car elles interviennent dans les bornes de l'intégrale.