BLAISE PASCAL
PT 2024-2025

Fiche de révisions R6 — *Correction*

Forces centrales

Exercice 1 : Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

1 | 2 |

▷ *Caractéristiques d'une orbite circulaire ;*
▷ *Énergie mécanique.*

1 Le proton exerce une force de Coulomb attractive sur l'électron. Dans un repérage polaire dans le plan du mouvement,

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{u}_r\,.}$$

Comme cette force est conservative, alors l'énergie potentielle dont elle dérive est telle que

$$\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r}\,\vec{u}_r$$

ce qui conduit à

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r} = \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{E_\mathrm{p}(r) = -\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r}}$$

en prenant comme référence $E_\mathrm{p}(r\to\infty) = 0$.

2 L'électron en mouvement par rapport à un référentiel lié au proton. Son poids est négligeable devant la force électrique exercée par le proton, ce qui a été justifié dans le chapitre sur les particules chargées. D'après la loi de la quantité de mouvement appliquée à l'électron en mouvement circulaire,

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

ce qui donne en projection sur $\vec{u}_r$

$$-mr\dot\theta^2 = -\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,.$$

Or $\dot\theta^2 = v^2/r^2$, d'où

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,,$$

et ainsi

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,m\,r}}\,.}$$

L'énergie mécanique s'écrit alors

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r} = \frac{e^2}{8\pi\,\varepsilon_0\,r} - \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,r} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{E_\mathrm{m} = -\frac{e^2}{8\pi\,\varepsilon_0\,r}}$$

3 D'après la question précédente,

$$E_\mathrm{p} = 2E_\mathrm{m}\,.$$

> *Comme $E_\mathrm{m} < 0$ il n'y a pas de contradiction !*

4 Comme l'orbite de l'électron est circulaire, son vecteur vitesse est orthoradial alors que son vecteur position est radial. Les deux vecteurs sont donc perpendiculaires. La norme du moment cinétique de l'électron évalué en P vaut donc

$$L_P = r_n \times m v_n \qquad \text{soit} \qquad \boxed{L_P = \sqrt{\frac{m\,e^2\,r_n}{4\pi\,\varepsilon_0}}\,.}$$

5 L'hypothèse de quantification de Bohr indique que

$$\sqrt{\frac{m\,e^2\,r_n}{4\pi\,\varepsilon_0}} = n\hbar \qquad \text{soit} \qquad \frac{m\,e^2\,r_n}{4\pi\,\varepsilon_0} = n^2\hbar^2$$

et ainsi

$$\boxed{r_n = \frac{4\pi\,\varepsilon_0\,\hbar^2}{m\,e^2}\,n^2\,.}$$

6 Connaissant r_n, on en déduit les valeurs permises pour l'énergie mécanique,

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{m\,e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,\hbar^2\,n^2} \qquad \text{soit} \qquad E_n = -\frac{E_0}{n^2} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{E_0 = \frac{m\,e^4}{32\pi^2{\varepsilon_0}^2\hbar^2} = 13{,}6\,\mathrm{eV}}$$

7 Repartons de la condition de quantification du moment cinétique,

$$L_P = m\,r_n\,v_n = n\hbar\,.$$

En utilisant la relation de de Bröglie, $v_n = h/m\lambda_n$,

$$m\,r_n\,\frac{h}{m\lambda_n} = n\hbar$$

d'où le résultat annoncé,

$$\boxed{2\pi\,r_n = n\lambda_n\,.}$$

La longueur $2\pi r_n$ correspond au périmètre de l'orbite circulaire, qui doit ici correspondre à un nombre entier de longueurs d'ondes de de Bröglie : c'est une condition de type **résonance d'onde stationnaires**.

Exercice 2 : Gravity

exemple officiel CCINP | 2 | 2 |

- *Loi de Kepler ;*
- *Orbite circulaire et elliptique ;*
- *Conservation de l'énergie mécanique.*

1 Dans un repère polaire de centre O le centre de la Terre,

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{r^2}\vec{e}_r \qquad \text{et} \qquad E_\mathrm{p} = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{r}\,.}$$

2 Pour un système en rotation uniforme, $r = \text{cte}$ donc $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$ et $v = r\dot{\theta} = 0$ donc $\ddot{\theta} = 0$. Le PFD dans la base polaire s'écrit donc

$$-m\frac{v^2}{r}\vec{e}_r = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{r^2}\vec{e}_r \qquad \text{soit} \qquad v^2 = \frac{\mathcal{G}M_0}{r}\,.$$

Or le mouvement est par hypothèse circulaire de rayon r et uniforme de période T, donc $v = 2\pi r/T$ et

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M_0}{r}$$

ce qui conduit à la troisième loi de Kepler pour l'orbite circulaire,

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{M_0\mathcal{G}}}$$

L'énergie mécanique de l'astronaute vaut alors

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}M_0 m}{r} = \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{G}M_0}{r} - \frac{\mathcal{G}M_0 m}{r} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{E_\mathrm{m} = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{2r}\,.}$$

3 D'après la troisième loi de Kepler,

$$\frac{{T_\mathrm{S}}^2}{{r_\mathrm{S}}^3} = \frac{{T_\mathrm{H}}^2}{{r_\mathrm{H}}^3} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{T_\mathrm{S} = T_\mathrm{H}\left(\frac{r_\mathrm{S}}{r_\mathrm{H}}\right)^{3/2} = 93\,\mathrm{min}.}$$

On a par ailleurs

$$\boxed{v_\mathrm{H} = \frac{2\pi r_\mathrm{H}}{T_\mathrm{H}} = 7{,}6\cdot 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \qquad \text{et} \qquad v_\mathrm{S} = \frac{2\pi r_\mathrm{S}}{T_\mathrm{S}} = 7{,}7\cdot 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

(la différence n'apparaît que sur le troisième chiffre significatif ... mais l'énoncé n'en donne que deux pour T_H).

4 Voir figure 1. Le centre de la Terre est forcément l'un des foyers de l'ellipse, d'après la première loi de Kepler.

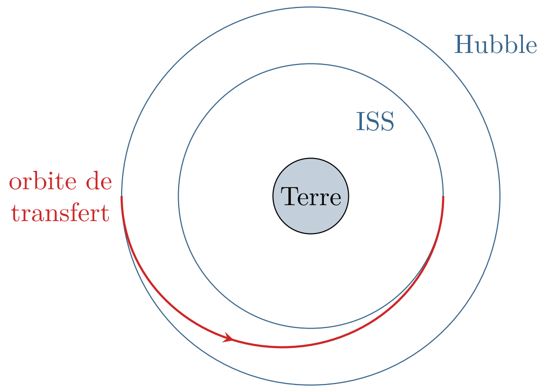

Figure 1 – Orbite de transfert. Les deux orbites de Hubble et de l'ISS sont représentées en bleu, l'orbite de transfert en rouge. Évidemment, la figure n'est pas à l'échelle ... Version couleur sur le site de la classe.

5 L'énergie mécanique en orbite elliptique prend la même forme qu'en orbite circulaire en remplaçant le rayon par le demi-grand axe a (résultat admis dans le cours). Ici, $2a = r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}$, d'où on déduit

$$\boxed{E_\mathrm{m} = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}}}$$

6 À l'apogée, l'astronaute est à distance r_H du centre de la Terre, donc

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{apo}^2 - \frac{\mathcal{G}M_0 m}{r_\mathrm{H}} = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}}$$

ce qui donne

$$v_\mathrm{apo}^2 = \frac{2\mathcal{G}M_0 r_\mathrm{S}}{r_\mathrm{H}(r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H})}$$

et en utilisant la troisième loi de Kepler pour faire apparaître la période à la place de $M_0\mathcal{G}$

$$v_\mathrm{apo}^2 = \frac{2r_\mathrm{S}\times 4\pi^2 r_\mathrm{H}^3}{r_\mathrm{H}(r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H})\times T_\mathrm{H}^2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_\mathrm{apo} = \frac{2\pi r_\mathrm{H}}{T_\mathrm{H}}\sqrt{\frac{2r_\mathrm{S}}{r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}}} = 7{,}5\cdot 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

Par analogie (et en vérifiant que le raisonnement se transpose sans problème !),

$$\boxed{v_\mathrm{pér} = \frac{2\pi r_\mathrm{S}}{T_\mathrm{S}}\sqrt{\frac{2r_\mathrm{H}}{r_\mathrm{S} + r_\mathrm{H}}} = 7{,}7\cdot 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

Pour le contrôle de la vitesse, je ne sais pas trop comment l'astronaute peut faire. Les satellites utilisent des moteurs, mais je ne suis pas sûr que l'astronaute en ait !

7 Même sur l'orbite de transfert, l'astronaute n'est soumis qu'à la force exercée par la Terre, et son mouvement vérifie la troisième loi de Kepler. Ainsi, la période T_{transf} à laquelle il parcourt l'orbite de transfert est reliée au demi-grand axe $a = r_{\text{S}} + r_{\text{H}}$ par

$$\frac{T_{\text{transf}}^{\,2}}{\left(\dfrac{r_{\text{S}} + r_{\text{H}}}{2}\right)^3} = \frac{4\pi^2}{M_0\mathcal{G}} = \frac{T_{\text{H}}^{\,2}}{r_{\text{H}}^{\,3}}\,.$$

Par ailleurs l'astronaute ne parcourt que la moitié de l'orbite : le voyage prend une durée $\Delta t = T_{\text{transf}}/2$, d'où

$$\frac{8 \times 4\,\Delta t^2}{(r_{\text{S}} + r_{\text{H}})^3} = \frac{T_{\text{H}}^{\,2}}{r_{\text{H}}^{\,3}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\Delta t = \frac{T_{\text{H}}}{\sqrt{32}}\left(1 + \frac{r_{\text{S}}}{r_{\text{H}}}\right)^{3/2} = 47\,\text{min}\,.}$$

> *Notez que cette durée est celle pour passer de l'orbite de Hubble à celle de l'ISS ... mais pas pour atteindre l'ISS. Sauf coup de chance, l'opération est d'ailleurs mal engagée pour les astronautes : comme la vitesse ne dépend pas de la masse mais que de la distance au centre de la Terre, tous les corps sur la même orbite vont à la même vitesse. À moins d'arriver sur l'orbite juste au bon moment (et c'est comme par hasard ce qui arrive dans le film), les astronautes n'ont aucune chance de rattraper ou d'être rattrapés par l'ISS.*

Exercice 3 : Frottements sur un satellite en orbite basse — oral banque PT | 3 | 2

- *Conservation du moment cinétique ;*
- *Orbite circulaire ;*
- *Énergie mécanique.*

Travaillons en coordonnées cylindriques dont l'origine O se trouve au centre de la Terre et d'axe (Oz) normal au plan de la trajectoire.

1 La force de gravitation subie par le satellite vaut

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\,\vec{e}_r$$

donc son moment par rapport au centre O est

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{OS} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

car $\vec{OS} = r\,\vec{e}_r$ et $\vec{F}$ sont colinéaires. D'après le théorème du moment cinétique appliqué au satellite S dans le référentiel géocentrique supposé galiléne,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{0} \qquad \text{d'où} \qquad \vec{L}_O = \vec{\text{cte}}\,.$$

Exprimons $\vec{L}_O$ dans la base cylindrique :

$$\vec{L}_O = \vec{OS} \wedge m\vec{v} = r\,\vec{e}_r \wedge r\omega\,\vec{e}_\theta = r^2\omega\,\vec{e}_z\,.$$

La conservation du moment cinétique permet donc de conclure que

$$\boxed{\mathcal{C} = r^2\omega = \text{cte}\,.}$$

La vitesse en orbite circulaire s'écrit

$$v = r\omega = \frac{\mathcal{C}}{r} = \text{cte}$$

car $r = \text{cte}$. Le mouvement est donc effectivement **uniforme**.

2 Appliquons le théorème de la résultante cinétique au satellite, en orbite circulaire uniforme autour de la Terre :

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad \text{soit} \qquad -m\frac{v^2}{r}\,\vec{e}_r = -G\frac{mM}{r^2}\,\vec{e}_r\,.$$

> *Vous devez connaître et pouvez directement utiliser l'expression $\overrightarrow{a} = -v^2/r\,\overrightarrow{e_r}$ pour un mouvement circulaire uniforme ... mais attention, elle ne se généralise à aucun autre mouvement !*

On en déduit directement

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{MG}{r}}\,.}$$

Pour l'orbite d'altitude $h = 1 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$, on a

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{MG}{R+h}} = 7{,}4 \cdot 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 27 \cdot 10^3\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}\,.}$$

3 L'énergie potentielle du satellite est purement gravitationnelle et vaut

$$E_\mathrm{p} = -G\frac{mM}{r}\,.$$

L'énergie cinétique est

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{soit} \qquad E_\mathrm{c} = \frac{mMG}{2r}\,.$$

L'énergie mécanique vaut donc

$$E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p} = \frac{mMG}{2r} - G\frac{mM}{r} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{E_\mathrm{m} = -\frac{mMG}{2r}\,.}$$

4 La puissance de la force de frottements $\overrightarrow{f}$ est

$$\mathcal{P}_f = \overrightarrow{f}\cdot\overrightarrow{v} = -\lambda m v^3 = -\lambda m\left(\frac{MG}{r}\right)^{3/2}\,.$$

D'après le théorème de l'énergie mécanique, on a donc

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_f \qquad \text{soit} \qquad -\frac{mMG}{2}\times\frac{-1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\lambda m\left(\frac{MG}{r}\right)\sqrt{\frac{MG}{r}}\,,$$

ce qui se simplifie en

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -2\lambda\sqrt{MG}\sqrt{r}\,.}$$

5 On constate sur l'équation différentielle précédente que $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ est toujours négatif. Le rayon de l'orbite diminue donc sous l'effet des frottements. En revanche, d'après la question 2, si le rayon de l'orbite diminue alors la vitesse du satellite augmente. Ainsi, **les frottements ont pour effet d'augmenter la vitesse du satellite**, ce qui est innattendu.

6 En séparant les variables et en intégrant, on obtient

$$\int_{R+h}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{2\sqrt{r}} = -\lambda\sqrt{MG}\int_0^t \mathrm{d}t \qquad \text{d'où} \qquad \sqrt{r(t)} - \sqrt{R+h} = -\lambda t\sqrt{MG}$$

soit finalement

$$\boxed{r(t) = \left(\sqrt{R+h} - \lambda t\sqrt{MG}\right)^2\,.}$$

L'altitude du satellite diminue de $\Delta h = 2\,\mathrm{m}$ pendant la durée $\Delta t = 1$ jour $= 8{,}6 \cdot 10^4\,\mathrm{s}$. Ainsi,

$$\sqrt{R+h-\Delta h} - \sqrt{R+h} = -\lambda\,\Delta t\,\sqrt{MG}$$

Comme $\Delta h \ll R+h$, un développement limité est justifié et donne

$$\begin{aligned}
\sqrt{R+h}\left(1 - \frac{\Delta h}{R+h}\right)^{1/2} - \sqrt{R+h} &= -\lambda\,\Delta t\,\sqrt{MG}\\
\sqrt{R+h}\left(1 - \frac{\Delta h}{2(R+h)}\right) - \sqrt{R+h} &= -\lambda\,\Delta t\,\sqrt{MG}\\
\frac{\Delta h}{2\sqrt{R+h}} &= \lambda\,\Delta t\,\sqrt{MG}
\end{aligned}$$

d'où on déduit

$$\boxed{\lambda = \frac{\Delta h}{2\,\Delta t\sqrt{MG(R+h)}} = 2{,}1 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{m}^{-1}\,.}$$

> *Je ne pense pas que le développement limité soit attendu spontanément par le jury, cependant il est indispensable pour la cohérence des chiffres significatifs dans les applications numériques.*
>
> *Pour aboutir à ce résultat, il est également possible de raisonner directement sur l'équation différentielle en approximant que sur un jour la dérivée temporelle est quasi-constante et vaut*
>
> $$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \simeq -\frac{\Delta h}{\Delta t} = -2\lambda\sqrt{MG}\sqrt{R+h}$$
>
> *ce qui conduit bien au même résultat.*