

Étude temporelle et fréquentielle des circuits électroniques

Année	Chapitre	Ce qu'il faut réviser	Support	Prioritaire	😊
PTSI	Transitoires	Lois de comportement, modèle de Thévenin d'un générateur (R)		*	
PTSI	RSF	Impédances complexes (R)	Livret outils p. 54	***	
PTSI	RSF	Associations de dipôles, pont diviseur de tension (R)		***	
PTSI	Transitoires	Établir une équation différentielle (M)	(PT) Ch 1 ex C2		
PTSI	RSF	Établir une fonction de transfert (M)	(PT) Ch 1 ex C3 + fiche révisions ex 2 et 3	**	
PT	1 Systèmes linéaires	Passer d'une éq différentielle à une fonction de transfert et réciproquement (M)	Ex C4		
PTSI	Transitoires + RSF	Exemple fondamental : circuit RC : éq diff, fonction de transfert (D)		*	
PTSI	Transitoires + RSF	Exemple fondamental : circuit RLC : éq diff (forme canonique, solutions), fonction de transfert, résonances (existence, pulsation de résonance en courant (D))	(PT) TD 1 ex 6 + fiche révisions ex 1 (application analogue pas à connaître)		
PT	1 Systèmes linéaires	Critères de stabilité (signe des coefficients) (R)			
PT	1 Systèmes linéaires	Construire un diagramme de Bode à partir d'une fonction de transfert. (M)	Ex C5, TD ex 2, fiche révisions ex 2 et 3	*	
PT	1 Systèmes linéaires	Reconstruire le signal de sortie d'un filtre connaissant le spectre de l'entrée et la fonction de transfert. (M)	Ex C6, TD ex 9, fiche révisions ex 2 et 3		

Plan de la fiche

I	Ressources en ligne	1
II	Rappel de cours : Synthèse sur les résonances	2
III	Questions de cours	3
IV	Pour compléter vos TD	3
1	Circuit RLC série forcé en courant.	3
2	Filtre RL	4
3	Filtre de Wien	4
V	Correction des exercices	5
1	Circuit RLC série forcé en courant.	5
2	Filtre RL	7
3	Filtre de Wien	8

I - Ressources en ligne

Scanner ou cliquer sur les QR-code pour accéder aux ressources.

- **Sur l'ENT** : outre cette fiche de révisions, vous trouverez en complément de vos cours de PTSI les versions « prof » de mes anciens cours de PTSI sur le régime sinusoïdal forcé (impédances complexes), l'analyse fréquentielle (fonction de transfert, résonances) et le filtrage linéaire. Je vous encourage à faire les exercices de cours et à me poser vos questions.

- **L'essentiel du cours sous forme de cartes mémo** : cartes réalisées par Christophe Cayssiols.



Cartes utilisables pour ce bloc de révisions : toutes celles du thème « électrocinétique » de première année.

• Qmax : QCM d'applications directes du cours



Choisir d'abord le mode « j'apprends » puis éventuellement le mode « je révise ». Ces QCM correspondent au programme de PCSI, certaines notions peuvent donc vous être inconnues : me demander en cas de doute.

Thèmes abordés dans ce bloc de révisions :

- ▷ Ondes et oscillateurs : oscillateur harmonique, oscillateurs amortis en régime libre ou forcé ;
- ▷ Électricité : tout

II - Rappel de cours : Synthèse sur les résonances

Exemple électronique Exemple mécanique	Résonance en intensité i Résonance en vitesse	Résonance en tension u_C Résonance en élongation
Existence	Toujours	$Q > 1/\sqrt{2}$
Pulsation de résonance	ω_0	$\omega_{res} \lesssim \omega_0$
Largeur de la résonance	$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$	$\Delta\omega \simeq \frac{\omega_0}{Q}$
Aspects notables à $\omega = \omega_{res}$ Aspects notables à $\omega = \omega_0$	Maximum d'amplitude, Forçage et réponse en phase C'est la résonance !	Maximum d'amplitude, Aucune relation de phase Forçage et réponse en quadrature, Rapport des amplitudes égal à Q
Mesure de ω_0 Mesure de Q	Pulsation de résonance Largeur de la résonance	Quadrature de phase Rapport des amplitudes à ω_0 ou largeur de la résonance
Courbe de gain (échelle linéaire)		

III - Questions de cours

1 - Rappeler le modèle de Thévenin d'un générateur réel et établir sa relation courant-tension.

2 - Quelle est la grandeur électrique continue pour un condensateur ? pour une bobine ?

Rappelons que la justification première est énergétique : une énergie ne peut pas être discontinue, car cela signifierait que le dipôle échange une puissance infinie, ce qui est physiquement impossible.

3 - Donner la représentation réelle et la représentation complexe d'un signal harmonique. Le représenter graphiquement. Définir l'amplitude, la période, la fréquence, la pulsation et la phase initiale du signal.

4 - Circuit RC série alimenté par une tension constante E : établir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ et l'écrire sous forme canonique. La résoudre en notant $u_C(t=0) = U_0$.

5 - Circuit RC série en régime sinusoïdal forcé par une tension harmonique $e(t) = E_m \cos(\omega t)$: déterminer $u_C(t)$ sous la forme $u_C(t) = U_{C,m} \cos(\omega t + \varphi)$.

Méthode : par un pont diviseur de tension,

$$\underline{U}_C = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} \underline{E} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{E}.$$

Par définition de la représentation complexe,

$$U_{C,m} = |\underline{U}_C| = \frac{E_m}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = \arg \underline{U}_C = -\arg(1 + jRC\omega) + \arg \underline{E} = -\arctan(RC\omega)$$

6 - Filtre RC passe-bas : établir la fonction de transfert et construire son diagramme de Bode asymptotique en gain.

7 - Circuit RLC série alimenté par une tension constante E : établir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ et l'écrire sous forme canonique. Lister les différentes formes que peuvent prendre ses solutions en fonction de la valeur du facteur de qualité.

8 - Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé par une tension harmonique $e(t) = E_m \cos(\omega t)$: établir la fonction de transfert en courant (qui est ici l'admittance $\underline{Y} = \underline{I}/\underline{E}$). Établir l'expression de la pulsation de résonance et rappeler sans démonstration le lien entre la largeur de la résonance et le facteur de qualité.

9 - Filtre RLC série : lorsque l'on prend la sortie aux bornes de la résistance, la fonction de transfert s'écrit

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

▷ identifier la nature du filtre **d'abord** avec le schéma **puis** avec la fonction de transfert ;

▷ tracer le diagramme de Bode asymptotique en gain ;


▷ tracer l'allure du diagramme réel pour $Q = 0,1$ et $Q = 100$ (méthode attendue : calcul exact en $\omega = \omega_0$)


IV - Pour compléter vos TD

 **Attention !** Tous ces exercices ne sont pas « à faire », concentrez-vous sur ce qui vous pose des difficultés.



Signification des pictogrammes :

 Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;

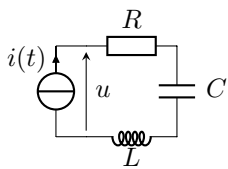
 Difficulté technique et calculatoire ;

 Exercice important.

Exercice 1 : Circuit RLC série forcé en courant

 2 |  2]

Cet exercice est une variante autour des résonances du RLC : au lieu d'étudier un forçage en tension comme on le fait le plus souvent, on étudie un forçage en courant. La question 3 est très (sans doute trop pour un écrit) calculatoire. Le reste de l'exercice, qui reprend les méthodes classiques et à maîtriser, peut être travaillé en admettant les expressions de $\omega_{1,2}$.



Considérons un circuit RLC série alimenté par un générateur idéal de courant imposant $i(t) = I_m \cos(\omega t)$.

1 - Déterminer l'amplitude complexe \underline{U} et l'écrire sous la forme

$$\underline{U} = R \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] \underline{I}$$

2 - Justifier que ce circuit ne présente pas de résonance en tension, mais une anti-résonance pour laquelle le rapport U_m/I_m est minimal. Déterminer la pulsation d'anti-résonance ω_a . Que vaut le déphasage entre i et u à cette pulsation ? L'existence de l'anti-résonance dépend-elle du facteur de qualité du circuit ?

3 - On s'intéresse à la largeur en fréquence de l'anti-résonance. Montrer que les pulsations ω_1 et $\omega_2 > \omega_1$ telles que $|\underline{U}(\omega_1)| = |\underline{U}(\omega_2)| = \sqrt{2} |\underline{U}(\omega_a)|$ sont données par

$$\omega_{1,2} = \Omega \pm \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{avec} \quad \Omega = \frac{\omega_0}{2} \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$$

En déduire la largeur $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ de l'anti-résonance.

4 - Des relevés expérimentaux de U_m/I_m et du déphasage de u par rapport à i sont représentés figure 1. En déduire la fréquence propre et le facteur de qualité du circuit.

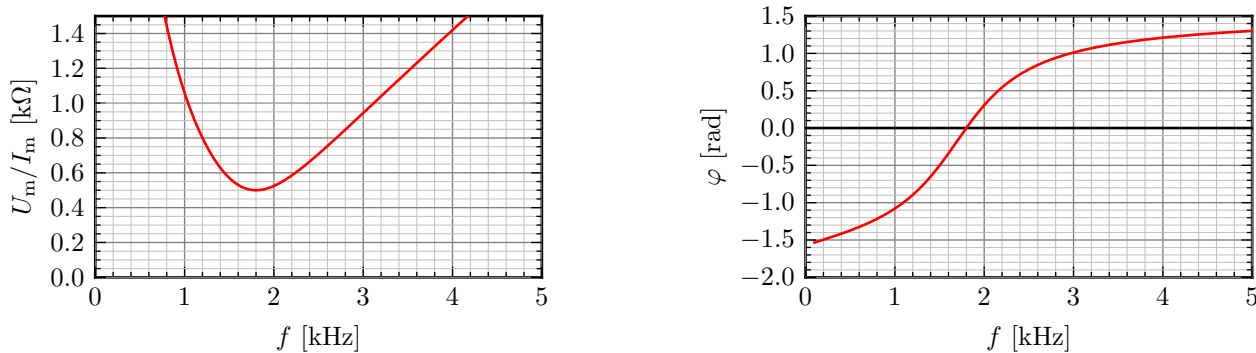


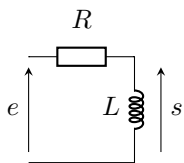
Figure 1 – Mesures d'amplitude et de déphasage.

Exercice 2 : Filtre RL

[💡 1 | ✂️ 2]

Comme le savent les musiciens, les gammes, c'est pas toujours marrant mais c'est utile. Voici de quoi vous distraire du filtre RC.

On considère le circuit ci-contre avec $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ et $L = 10 \text{ mH}$.



1 - Quel type de filtre ce circuit permet-il de réaliser ?

2 - Déterminer sa fonction de transfert et l'écrire sous la forme

$$\underline{H} = H_0 \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

3 - Déterminer les pentes des asymptotes en gain dans les limites haute et basse fréquence, ainsi que leur ordonnée « à l'origine » en $x = 1$. Construire le diagramme de Bode asymptotique en gain sur la figure 2 et en déduire l'allure du diagramme réel.

4 - La tension e s'écrit sous la forme d'une somme de trois harmoniques de même amplitude, de même phase initiale, et de fréquences respectives $f_1 = 100 \text{ Hz}$, $f_2 = 1 \text{ kHz}$ et $f_3 = 100 \text{ kHz}$. Donner la forme du signal d'entrée e puis du signal de sortie s .

5 - La tension $e(t)$ est maintenant un signal triangle de fréquence 60 Hz. Justifier que $s(t)$ est un signal créneau de même fréquence.

Exercice 3 : Filtre de Wien

[oral banque PT | 💡 1 | ✂️ 2 | ☹️]

Cet exercice est un grand classique. Je vous recommande de le travailler, car vous pourriez le rencontrer tel quel dans un sujet d'écrit : l'oscillateur de Wien est un exemple très courant d'oscillateur quasi-sinusoïdal. D'ailleurs, t'en souviens-tu ? c'est notre exemple de cours.

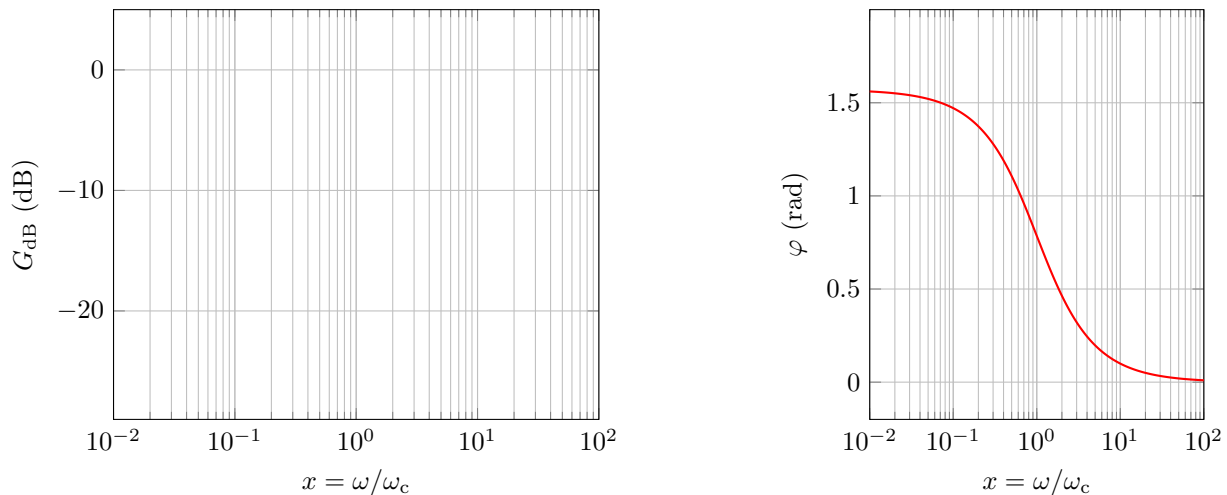
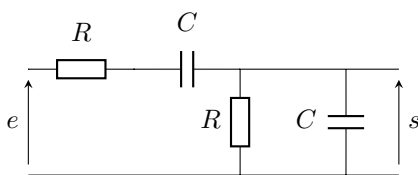


Figure 2 – Diagramme de Bode du filtre RL.



On s'intéresse au filtre de Wien représenté ci-contre.

1 - Par analyse des comportements asymptotiques, déterminer le type de filtre dont il s'agit.

2 - Déterminer la fonction de transfert \underline{H} du filtre.

3 - On pose $\omega_0 = 1/RC$ et $x = \omega/\omega_0$. Écrire la fonction de transfert sous la forme

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)},$$

en précisant ce que valent H_0 et Q .

4 - Calculer simplement le gain maximal du filtre, exprimer sa valeur de dB, et calculer le déphasage correspondant.

5 - Représenter le diagramme de Bode asymptotique du filtre et en déduire qualitativement le tracé réel.

6 - Calculer la pulsation propre ω_0 pour $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ et $C = 500 \text{ nF}$. Donner le signal de sortie du filtre si le signal d'entrée est

$$e(t) = E_0 + E_0 \cos(\omega t) + E_0 \cos(10 \omega t) + E_0 \cos(100 \omega t)$$

avec $E_0 = 10 \text{ V}$ et $\omega = 200 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Ce type de filtre est notamment utilisé dans des oscillateurs auto-entretenus assez simples à réaliser : nous y reviendrons dans le cours d'électronique de PT.

V - Correction des exercices

Exercice 1 : Circuit RLC série forcé en courant

[2 | 2]

1 La tension \underline{U} est reliée au courant \underline{I} par l'intermédiaire de l'impédance complexe de l'association RLC série, $\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$. Cette impédance s'écrit simplement

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + jL\omega - \frac{1}{jC\omega}.$$

En factorisant,

$$\underline{Z} = R \left[1 + \frac{jL\omega}{R} + \frac{1}{jRC\omega} \right].$$

Par identification selon ω avec la forme donnée par l'énoncé,

$$\frac{jL\omega}{R} = \frac{jQ\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \frac{1}{jRC\omega} = -\frac{jQ\omega_0}{\omega} = \frac{Q\omega_0}{j\omega}.$$

On en déduit

$$\frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R} \quad \text{et} \quad Q\omega_0 = \frac{1}{RC}.$$

On en déduit par substitution

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

2 On a

$$\frac{U_m}{I_m} = |Z| = R \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}.$$

Dans les deux limites $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$, l'amplitude U_m diverge. Ainsi, elle ne passe (probablement) pas par un maximum entre ces deux limites. En revanche, la parenthèse contient une différence, qui peut s'annuler. La parenthèse étant mise au carré, 0 est évidemment sa valeur minimale, atteinte lorsque

$$\omega = \omega_a = \omega_0.$$

Ce minimum existe toujours : **l'existence de l'anti-résonance ne dépend pas du facteur de qualité.**

Pour $\omega = \omega_a$, l'impédance complexe du circuit est réelle positive : $Z = R$. Le déphasage entre u et i , égal à $\arg Z$, est donc nul.

3 D'après la question précédente,

$$|U| = R \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} I_m$$

Cherchons les pulsations limites.

$$\begin{aligned} |U(\omega_{1,2})| &= \sqrt{2} |U(\omega_a)| \\ R \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{1,2}} \right)^2} I_m &= \sqrt{2} R I_m \\ 1 + Q^2 \left(\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{1,2}} \right)^2 &= 2 \\ Q \left(\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{1,2}} \right) &= \pm 1 \end{aligned}$$

Pour faciliter l'écriture, on pose $x = \omega_{1,2}/\omega_0$. On cherche donc à résoudre

$$Q \left(x - \frac{1}{x} \right) = \pm 1$$

ou encore

$$x - \frac{1}{x} = \pm \frac{1}{Q}$$

Les deux valeurs de x solutions de cette équation donnent les deux pulsations limite. Comme toujours, il faut transformer cette équation fractionnaire en équation polynômiale,

$$x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$$

Cette équation a un discriminant

$$\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > 0.$$

On trouve alors quatre solutions mathématiquement possibles pour les pulsations réduites x

$$x_{\pm} = \pm \frac{1}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

mais seules deux sont physiquement acceptables car $x > 0$. Comme $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} < \frac{1}{Q}$ alors ces deux solutions sont

$$x_{\pm} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \pm \frac{1}{2Q} \quad \text{d'où} \quad \omega_{1,2} = \omega_0 x_{\pm}$$

et on en déduit finalement

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q} - \frac{-\omega_0}{2Q} \quad \text{d'où} \quad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}.$$

4 Estimer la fréquence propre est beaucoup plus précis à partir de la courbe de phase que de la courbe d'amplitude, puisque d'après la question 2, il suffit de repérer la fréquence pour laquelle $\varphi = 0$. On lit alors

$$f_0 = 1,8 \text{ kHz}.$$

Pour déterminer le facteur de qualité, on estime la largeur en fréquence de la résonance à partir de la courbe d'amplitude : par définition, $U_m/I_m = |Z|$. À l'anti-résonance, on lit graphiquement $U_m/I_m = 5 \cdot 10^2 \Omega$, donc f_1 et f_2 sont les fréquences telles que $U_m/I_m = \sqrt{2} \times 5 \cdot 10^2 \Omega = 7 \cdot 10^2 \Omega$. On lit sur la figure

$$f_1 = 1,3 \text{ kHz} \quad \text{et} \quad f_2 = 2,5 \text{ kHz}$$

On en déduit

$$Q = \frac{\omega_a}{\Delta\omega} = \frac{f_a}{\Delta f} = 1,5$$

Exercice 2 : Filtre RL

[💡 1 | ✂ 2]

1 Analyse asymptotique par équivalence :

▷ à très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil, donc $\underline{S} = 0$;

▷ à très haute fréquence, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert, donc le courant dans le filtre est nul et on déduit de la loi des mailles $s = e$.

Conclusion : le filtre est a priori **un filtre passe-haut**.

2 Utilisons un pont diviseur de tension en représentation complexe,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega} \quad \text{soit} \quad \underline{H} = H_0 \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H_0 = 1 \\ \omega_c = R/L \end{cases}$$

3 Simplifions la fonction de transfert dans la limite très basse fréquence $\omega \ll \omega_c$,

$$\underline{H} \sim \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1} \sim j\frac{\omega}{\omega_c} \quad \text{donc} \quad |\underline{H}| = \frac{\omega}{\omega_c}$$

Ainsi,

$$G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log |\underline{H}| = 20 \log x$$

Comme l'axe des abscisses d'un diagramme de Bode est une échelle logarithmique (en d'autres termes l'abscisse est $\log x$), on en déduit directement que **la pente de l'asymptote à basse fréquence est de pente +20 dB/décade et qu'elle passe par le point $G_{\text{dB}} = 0$ en $x = 1$** .

De même dans la limite très haute fréquence $\omega \gg \omega_c$,

$$\underline{H} \sim \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{j\frac{\omega}{\omega_c}} = 1. \quad \text{d'où} \quad G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log 1 = 0.$$

L'asymptote haute fréquence est donc **une asymptote horizontale**.

L'allure du diagramme de Bode est représentée figure 3.

4 Comme les trois harmoniques sont de même amplitude et en phase

$$e(t) = E_0 [\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) + \cos(2\pi f_3 t)].$$

D'après les valeurs numériques données, la pulsation de coupure du filtre vaut

$$\omega_c = \frac{R}{L} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{soit} \quad f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 16 \text{ kHz}.$$

Rappel de cours : Pour un signal d'entrée

$$e(t) = \sum_n E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

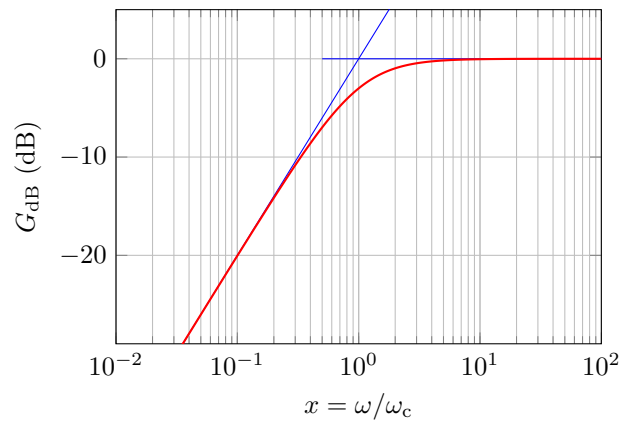


Figure 3 – Diagramme de Bode du filtre RL.

le signal de sortie du filtre s'écrit

$$s(t) = \sum_n |\underline{H}(\omega_n)| E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n + \arg \underline{H}(\omega_n))$$

où $|\underline{H}(\omega_n)| = 10^{G_{dB}(\omega_n)/20}$ et $\arg \underline{H}(\omega_n) = \varphi(\omega_n)$.

Comme $x_1 = f_1/f_c = 6 \cdot 10^{-3}$, la composante associée est très atténuée : le gain n'est même pas représenté sur le diagramme donné. On peut donc négliger sa contribution au signal de sortie. De même, la contribution de fréquence f_2 (soit $x_2 = 6 \cdot 10^{-2}$) est atténuée d'environ 22 dB, ce qui correspond à un facteur multiplicatif 1/12. Elle est de plus déphasée d'environ 1,5 rad. Enfin la contribution de fréquence f_3 (soit $x_3 = 6,25$) est associée à un gain à peu près nul, signe qu'elle n'est pas atténuée, mais on peut estimer son déphasage à 0,2 rad. Ainsi,

$$s(t) = \frac{E_0}{12} \cos(2\pi f_2 t + 1,5) + E_0 \cos(2\pi f_3 t + 0,2).$$

5 La fréquence du signal est bien plus faible que la fréquence de coupure du filtre, qui est dans son domaine asymptotique, décrit par une pente de 20 dB/décade dans le diagramme de Bode. En repassant en représentation temporelle, cela indique que le circuit se comporte en dérivateur,

$$s(t) \propto \frac{de}{dt}.$$

La pente d'un signal triangle étant constante, alternativement positive et négative, le signal dérivé présente des plateaux alternativement positifs et négatifs, ce qui est bien un signal créneau de même fréquence que le signal triangle.

Exercice 3 : Filtre de Wien

[oral banque PT | 💡 1 | ✂ 2 | ⊗]

1 Dans la limite très haute fréquence, les condensateurs sont équivalents à des fils, donc $\underline{S} = 0$. Dans la limite très basse fréquence, les condensateurs sont cette fois équivalents à des interrupteurs ouverts. Aucun courant ne circule dans les résistances, et ainsi on a également $\underline{S} = 0$. Selon toute vraisemblance, ce filtre est donc **un filtre passe-bande**.

2 Notons \underline{Y} l'admittance de l'association R, C parallèle,

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + jC\omega.$$

En utilisant cette admittance équivalente, on reconnaît un pont diviseur de tension, d'où on déduit

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}}{R + \frac{1}{jC\omega} + \underline{Z}}$$

Pour l'obtenir directement sous la forme donnée dans l'énoncé, on multiplie le numérateur et le dénominateur par \underline{Y} , ce qui donne

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \underline{Y}} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)} = \frac{1}{1 + 1 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega} + 1}$$

3 En réécrivant la fonction de transfert en termes des variables réduites de l'énoncé, on trouve

$$\underline{H} = \frac{1}{3 + jx + \frac{1}{jx}} = \frac{1/3}{1 + \frac{j}{3} \left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

ce qui donne bien

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H_0 = 1/3 \\ Q = 1/3 \end{cases}$$

4 Le gain en amplitude du filtre est défini par

$$G = |\underline{H}| = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

Il est maximal lorsque le dénominateur est minimal, c'est-à-dire lorsque le terme entre parenthèses s'annule. Cela correspond à $x = 1$, qui donne le **gain maximal** $G_{\max} = 1/3$, soit $G_{\text{dB}} = 20 \log(1/3) = -9,5 \text{ dB}$. La fonction de transfert en $x = 1$ est réelle, c'est-à-dire d'argument égal à 0. À la pulsation ω_0 , la sortie et l'entrée ne sont donc pas déphasées.

5 Dans la limite très basse fréquence, la fonction de transfert est équivalente à

$$\underline{H} \sim \frac{H_0}{-jQ/x} = \frac{jH_0x}{Q} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20 \log \underline{H} \sim 20 \log \frac{H_0x}{Q} = 20 \log x \\ \varphi = \arg \underline{H} = \pi/2 \end{cases}$$

De même, dans la limite très haute fréquence, la fonction de transfert est équivalente à

$$\underline{H} \sim \frac{H_0}{jQx} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20 \log \underline{H} \sim 20 \log \frac{H_0}{Qx} = -20 \log x \\ \varphi = \arg \underline{H} = -\pi/2 \end{cases}$$

Ainsi, le diagramme de Bode asymptotique en gain compte **deux asymptotes de pente $\pm 20 \text{ dB/décade}$ passant par $G_{\text{dB}} = 0$ pour $x = 1$** , alors que le diagramme de Bode en phase compte **deux asymptotes horizontales de hauteur $\pm \pi/2$** . Pour tracer l'allure du diagramme réel, on utilise en plus la question précédente qui indique que la courbe de gain réelle passe par le point $G_{\text{dB}} = -9,5 \text{ dB}$ en $x = 1$ alors que la courbe de phase réelle y passe par 0. Le diagramme de Bode est représenté figure 4.

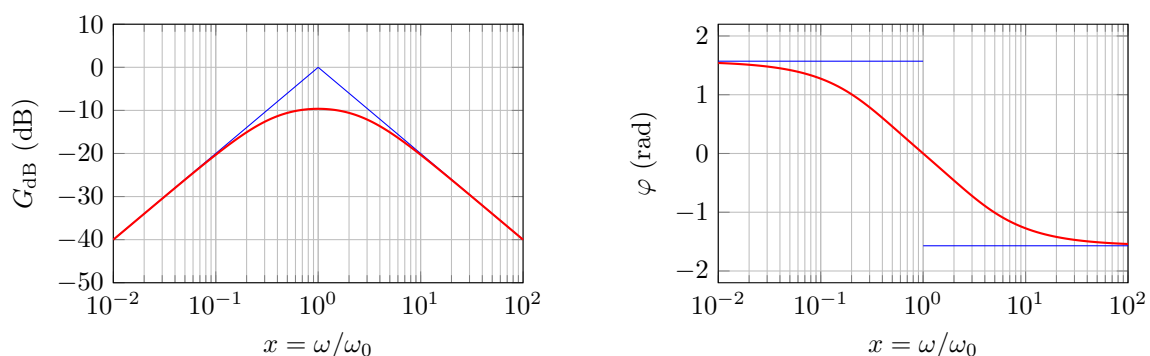


Figure 4 – Diagramme de Bode du filtre de Wien. Diagramme de Bode asymptotique en bleu, diagramme réel en rouge. Version couleur sur le site de la classe.

6 Numériquement, $\omega_0 = 2,0 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Comme le diagramme de Bode réel n'est pas donné dans l'énoncé, on peut au choix utiliser la fonction de transfert ou raisonner sur le diagramme asymptotique. Étudions le signal de sortie du filtre associé à chaque composante du signal d'entrée,

- ▷ Le terme continu est complètement coupé par le filtre;
- ▷ Le terme de pulsation $\omega = \omega_0/10$ se trouve une décade en dessous de la pulsation propre : en utilisant le diagramme asymptotique il est atténué de 20 dB, ce qui correspond à un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ 1,2 rad ;

- ▷ Le terme pulsation $10\omega = \omega_0$ est à la pulsation propre du filtre : il n'est pas déphasé mais seulement atténué d'un facteur $1/3$ (gain maximal) ;
- ▷ Le terme à la pulsation $100\omega = 10\omega_0$ est une décade au dessus de la pulsation propre : il est atténué comme le premier terme d'un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ $-1,2$ rad.

Ainsi,

$$s(t) = \frac{E_0}{10} \cos(\omega t - 1,2) + \frac{E_0}{3} \cos(10 \omega t) + \frac{E_0}{10} \cos(100 \omega t + 1,2)$$

Rappel de cours : Pour un signal d'entrée

$$e(t) = \sum_n E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

le signal de sortie du filtre s'écrit

$$s(t) = \sum_n |\underline{H}(\omega_n)| E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n + \arg \underline{H}(\omega_n))$$

où $|\underline{H}(\omega_n)| = 10^{G_{dB}(\omega_n)/20}$ et $\arg \underline{H}(\omega_n) = \varphi(\omega_n)$.