

Potentiel électrostatique

Particules chargées

Année	Chapitre	Ce qu'il faut réviser	Support	Prioritaire	😊	
PT	18	Potentiel	Lien entre E et V	DM 13		
PT	18	Potentiel	Équation de Poisson (R+D)	DM 13	*	
PT	18	Potentiel	Condensateur : champ, potentiel, capacité (R+D)	Révisions ex 1	**	
PTSI		Particules chargées	Utiliser la conservation de l'énergie mécanique dans un potentiel V (M)	TD ex 4, DM 13, révisions ex 2	*	
PTSI		Particules chargées	Mvt circulaire dans B : rayon et pulsation cyclotron (D)	Révisions ex 2		

Plan de la fiche

I	Ressources en ligne	1
II	Rappel de cours	2
III	Questions de cours	2
IV	Pour compléter vos TD	3
1	Câble coaxial	3
2	Spectrométrie de masse	4
V	Correction des exercices	5
1	Câble coaxial	5
2	Spectrométrie de masse	8

I - Ressources en ligne

Scanner ou cliquer sur les QR-code pour accéder aux ressources.

- **Sur l'ENT** : outre cette fiche de révisions, vous trouverez en complément de vos cours de PTSI la version « prof » de mon ancien cours sur le mouvement des particules chargées.
- **L'essentiel du cours sous forme de cartes mémo** : cartes réalisées par Christophe Cayssiols.



Cartes utilisables pour ce bloc de révisions :

- ▷ Thème « mécanique », rubrique « particules chargées » ;
- ▷ (aucune question ne porte sur le potentiel électrostatique)

- **Qmax : QCM d'applications directes du cours**

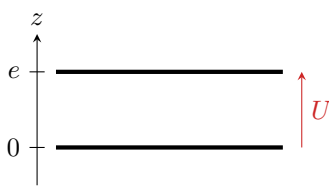


Choisir d'abord le mode « j'apprends » puis éventuellement le mode « je révise ». Ces QCM correspondent au programme de PCSI, certaines notions peuvent donc vous être inconnues : me demander en cas de doute.

Thèmes abordés dans ce bloc de révisions : choisir « électromagnétisme » puis « particules chargées dans un champ électromagnétique ». Les questions sont restreintes au programme de première année.

II - Rappel de cours

Complément : Démonstration énergétique de la capacité d'un condensateur plan



Considérons un condensateur formé de deux armatures planes de surface S séparées d'une faible distance e et soumises à une tension U . On néglige les effets de bord : le champ entre les armatures est identique à ce qu'il serait si les armatures étaient infinies. Pour établir l'expression de la capacité, nous avons utilisé dans le cours une méthode reposant sur l'expression du champ électrique en fonction de la densité surfacique de charge σ des armatures du condensateur.

Je vous propose ici une méthode alternative, reposant sur l'énergie électrostatique. Elle me semble sans doute plus simple que celle que je vous ai montrée en cours, et elle a le mérite d'éviter la fâcheuse question du point de départ de la démonstration. En fait, je pense l'inclure dans mon cours l'an prochain.

Les plaques étant supposées infinies, la distribution de charge est invariante par toute translation selon \vec{e}_x et \vec{e}_y , donc le potentiel V ne dépend que de z . D'après l'équation de Poisson,

$$\frac{d^2V}{dz^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad V(z) = az + b$$

avec a et b deux constantes. En choisissant la masse en $z = 0$, on trouve directement $b = 0$ puis

$$V(z=e) \underbrace{=}_{\text{expr}} ae \underbrace{=}_{\text{CL}} U \quad \text{d'où} \quad V(z) = \frac{U}{e}z.$$

On en déduit le champ électrique à l'intérieur du condensateur

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dz}\vec{e}_z = -\frac{U}{e}\vec{e}_z.$$

Par ailleurs, la densité volumique d'énergie électrostatique au sein du condensateur est donnée par

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{e^2}U^2,$$

et l'énergie électrostatique totale stockée entre les deux armatures vaut

$$\mathcal{E}_C = u_e \times Se = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{e}U^2.$$

En identifiant cette expression avec celle, connue, de l'énergie stockée dans un condensateur,

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{e}U^2 \quad \text{donc} \quad \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}}.$$

Remarque : L'expression de \mathcal{E}_C peut se démontrer facilement à partir de la loi de comportement du condensateur, mais elle peut aussi être vue comme une définition de la capacité C .

III - Questions de cours

1 - Établir l'expression de la capacité d'un condensateur plan. L'étudiant utilisera l'une ou l'autre méthode, au choix de l'interrogateur :

- ▷ Avec la densité de charge : l'expression du champ créé par un plan infini chargé en surface sera rappelée sans démonstration par l'étudiant qui l'utilisera comme point de départ de la démonstration ;
- ▷ Avec l'énergie électrostatique : l'étudiant prendra comme point de départ de la démonstration l'expression de la densité volumique d'énergie électrostatique et utilisera par exemple l'équation de Poisson pour relier le champ électrostatique à la tension aux bornes du condensateur.

2 - On considère un système de deux électrodes planes parallèles (type condensateur) distantes de L le long de l'axe (Ox) . Elles sont soumises à une tension $U = V(0) - V(L)$. Une particule de charge q est lâchée sans vitesse de l'électrode située en $x = 0$, on souhaite qu'elle atteigne la deuxième.

- ▷ Quel doit être le signe de U pour que ce soit possible ?
- ▷ Déterminer la vitesse avec laquelle l'électrode située en $x = L$ est atteinte.

Une particule de charge positive se dirige vers les potentiels décroissants (cf. force de Lorentz et sens de \vec{E}) : il faut donc avoir $V(L) < V(0)$ soit $U > 0$. On montre de même qu'il faut avoir $U < 0$ si $q < 0$, U est donc du même signe q .

La vitesse finale s'obtient par la conservation de l'énergie mécanique,

$$E_m \underbrace{=}_{x=0} 0 + qV(0) \underbrace{=}_{x=L} \frac{1}{2}mv^2 + qV(L) \quad \text{d'où} \quad v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$

3 - On considère une particule de charge $q > 0$ dans un champ magnétostatique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$. On admet que la trajectoire est circulaire, parcourue *en sens horaire* autour de (Oz) , et on suppose le vecteur vitesse initiale perpendiculaire au champ magnétique : $\vec{v}_0 = -v_0\vec{e}_\theta$.

▷ Montrer que le mouvement est uniforme.

▷ Déterminer la pulsation cyclotron et le rayon cyclotron.

Ne pas se faire piéger par le double sens du mot « uniforme » : mouvement uniforme signifie $\|\vec{v}\| = cte$.

D'après le théorème de l'énergie cinétique,

$$\frac{dE_c}{dt} = (q\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{d'où} \quad E_c = cte \quad \text{donc} \quad \|\vec{v}\| = cte.$$

Le PFD appliqué à la particule donne

$$m(-R_c\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R_c\ddot{\theta}\vec{e}_\theta) = q(R_c\dot{\theta}\vec{e}_\theta \wedge B\vec{e}_z) = qR_cB\dot{\theta}\vec{e}_r.$$

Les expressions de \vec{v} et \vec{a} en polaires ne sont pas à connaître par cœur mais se retrouvent par dérivation du vecteur position ! Par projection sur \vec{e}_r , on obtient la pulsation cyclotron, qui est par définition la valeur absolue de la vitesse angulaire $\dot{\theta} < 0$ de la particule :

$$\omega_c = \frac{qB}{m}.$$

L'uniformité du mouvement donne directement

$$R_c\omega_c = v_0 \quad \text{d'où} \quad R_c = \frac{mv_0}{qB}.$$

IV - Pour compléter vos TD

🔥🔥🔥 **Attention !** Tous ces exercices ne sont pas « à faire », concentrez-vous sur ce qui vous pose des difficultés.

Signification des pictogrammes :

💡 Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;

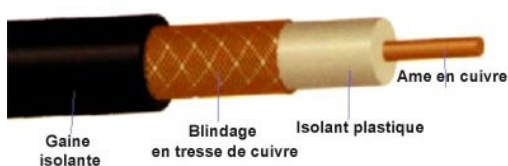
✂ Difficulté technique et calculatoire ;

⊕ Exercice important.

Exercice 1 : Câble coaxial

[oral CCINP PSI | 💡 2 | ✂ 2]

Cet exercice, pas complètement évident, permet de revoir les notions de capacité et d'inductance sur une géométrie différente de celles vues et revues en classe. Un parfait exo de colle ☺



Les câbles coaxiaux servent à transmettre des signaux basse fréquence. Ils sont utilisés quotidiennement, par exemple dans les installations de télévision domestiques, les émetteurs WiFi, etc. Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs cylindriques de même axe, une âme (rayon R_1) et un blindage (rayon R_2), séparés par un isolant. Ses propriétés électromagnétiques peuvent être décrites par une capacité \mathcal{C} et une inductance \mathcal{L} par unité de longueur de câble.

Commençons par déterminer la capacité linéique du câble. Le blindage étant connecté à la masse, une tension U constante est appliquée entre l'âme et le blindage, ce qui amène une charge électrique opposée sur l'âme et le blindage,

réparties en surface des conducteurs. On note λ la charge par unité de longueur de l'âme : sur un tronçon élémentaire de câble de longueur $d\ell$, l'âme porte une charge $\lambda d\ell$ et le blindage une charge $-\lambda d\ell$.

1 - Calculer le champ électrostatique qui règne entre l'âme et le blindage. En raison de la présence de l'isolant plastique, la permittivité du vide ε_0 doit être remplacé par la permittivité effective de l'isolant $\varepsilon_0\varepsilon_r$.

2 - En déduire l'expression de λ en fonction de U .

3 - Définir la capacité \mathcal{C} par unité de longueur du câble en fonction de λ et U , puis l'exprimer en fonction des données du problème.

Intéressons-nous maintenant à l'inductance linéique du câble. L'âme est désormais parcourue par un courant stationnaire I et le blindage par un courant opposé. Ces deux courants sont répartis à la surface des conducteurs.

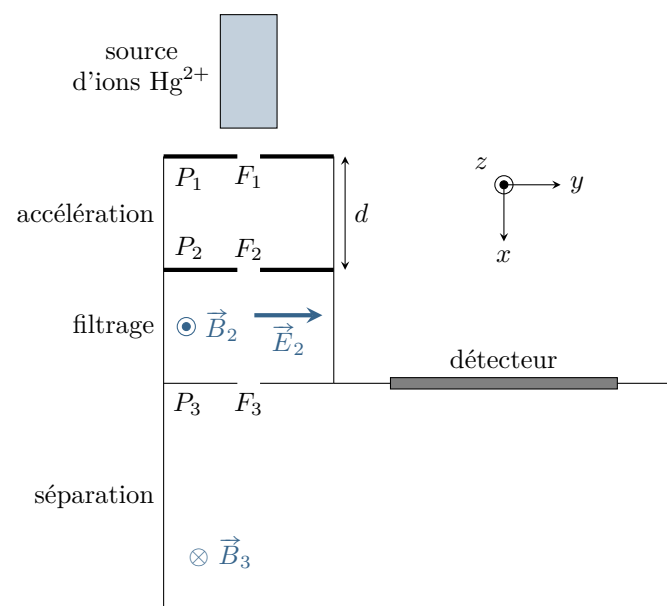
4 - Calculer le champ magnétique qui s'établit entre l'âme et le blindage. L'isolant étant non magnétique, sa perméabilité est égale à celle du vide μ_0 .

5 - Déterminer l'énergie magnétique $d\mathcal{E}_m$ stockée dans un tronçon élémentaire de câble de longueur $d\ell$.

6 - En déduire l'inductance \mathcal{L} par unité de longueur du câble.

Exercice 2 : Spectrométrie de masse

[💡 2 | 🗑️ 2 | ☒]



Un spectromètre de masse est un appareil qui permet de mesurer la masse ou la charge d'un ion (plus précisément le rapport entre les deux). De nombreuses technologies de spectromètre de masse existent : nous étudions ici le principe d'un spectromètre dit « à secteur magnétique ».

Dans le dispositif étudié ici, une source émet des ions mercure $^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ et $^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$. Les deux ions ont la même charge, mais leur masse diffère : c'est donc elle que le spectromètre permet de déterminer. Ces ions entrent dans le spectromètre de masse par la fente F_1 . Le spectromètre se compose de trois étages d'accélération, filtrage en vitesse puis séparation des ions. Une barrette de capteurs de charge est placée dans la chambre de séparation. On mesure ainsi la charge ayant impacté chaque point du détecteur en fonction de son abscisse y .

Par convention, on note sans indice les grandeurs relatives à un ion quelconque et on l'indice par le nombre de masse lorsqu'il est important pour les valeurs numériques : par exemple m (pour un calcul littéral) et m_{200} ou m_{202} pour les applications numériques.

A - Accélération des ions

Un ion mercure, de masse m et charge $2e$ entre dans le spectromètre par la fente F_1 . On néglige sa vitesse initiale. Une tension U appliquée entre les plaques P_1 et P_2 séparées de d permet de l'accélérer jusqu'à la fente F_2 .

1 - Quelle doit être la plaque de potentiel le plus élevé pour que l'ion soit effectivement accéléré ?

2 - Établir l'expression littérale de la vitesse v de l'ion lorsqu'il atteint la plaque P_2 .

3 - On trouve numériquement des vitesses valant $1,38 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $1,39 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Pourquoi pouvait-on s'attendre à un écart aussi faible ?

B - Filtrage en vitesse

Comme l'hypothèse de vitesse initiale nulle en F_1 est difficile à réaliser en pratique, la vitesse des ions en F_2 présente une certaine dispersion. Pour améliorer la précision de l'appareil, un filtrage en vitesse est alors réalisé. Le dispositif est réglé tel que, dans la chambre de filtrage située entre P_2 et P_3 , il règne un champ électromagnétique uniforme composé d'un champ électrique $\vec{E}_2 = E_2 \vec{e}_y$ et d'un champ magnétique $\vec{B}_2 = B_2 \vec{e}_z$. On suit un ion qui traverse la plaque P_2 par la fente F_2 avec une vitesse $\vec{v} = v \vec{e}_x$.

4 - À quelle condition sur les forces qu'il subit l'ion peut-il avoir un mouvement rectiligne l'amenant de F_2 à F_3 ?

5 - En déduire que seuls les ions de vitesse $v = v_0 = E_2/B_2$ parviennent en F_3 .

6 - Numériquement, $v_0 = 1,38 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. En déduire quel isotope du mercure parvient en F_3 avec ces réglages.

C - Séparation des ions

Pour mesurer la composition isotopique du mercure, on règle la valeur de E_2 pour permettre le passage de l'isotope 200 pendant une minute puis on change sa valeur pour que l'isotope 202 passe pendant une minute. La valeur de B_2 reste constante tout au long de l'opération.

Une fois sorti de la zone de filtrage par la fente F_3 avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$, l'ion pénètre dans une région où il ne règne qu'un champ magnétique uniforme $\vec{B}_3 = -B_3 \vec{e}_z$ valant 200 mT. Ce champ magnétique donne à l'ion une trajectoire qu'on admet être circulaire, et après avoir parcouru un demi tour il atteint le détecteur en un point d'abscisse y .

7 - Montrer que le mouvement de l'ion dans cette région est uniforme.

8 - Déterminer littéralement le rayon R de la trajectoire de l'ion.

9 - Numériquement, on trouve respectivement 71,8 cm et 72,5 cm pour les deux isotopes. En déduire les abscisses y_{200} et y_{202} des points d'impact de chaque type d'ion sur le détecteur, l'origine $y = 0$ étant prise au centre de la fente F_3 .

10 - Les charges totales accumulées valent respectivement $Q_1 = 3,85 \cdot 10^{-8}$ C pour la plus petite valeur de y et $Q_2 = 1,15 \cdot 10^{-8}$ C pour la plus élevée. En déduire la composition isotopique des ions émis par la source.

V - Correction des exercices

Exercice 1 : Câble coaxial

[oral CCINP PSI | 💡 2 | ⚡ 2]

1 Un théorème de Gauss sauvage apparaît ! La distribution de charge est schématisée figure 1.

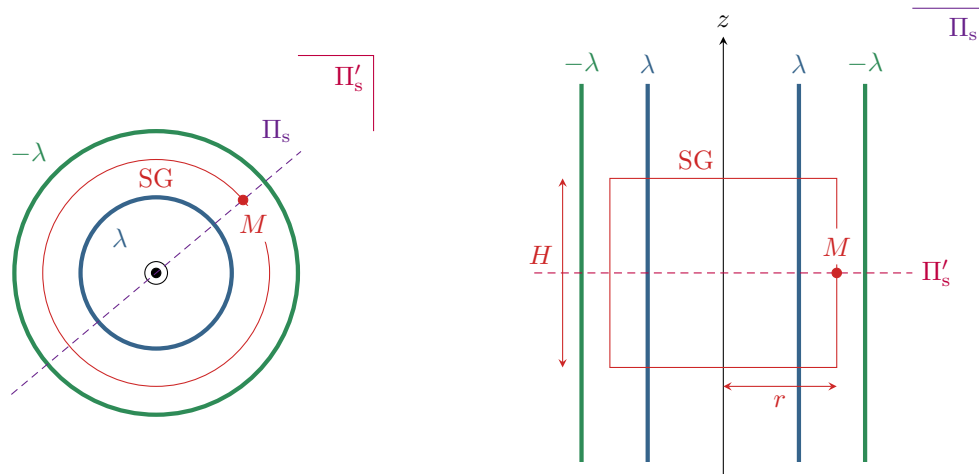


Figure 1 – Distribution de charge dans le câble coaxial.

• Symétries :

▷ le plan $\Pi_s = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est plan de symétrie de la distribution de charges ;

▷ le plan $\Pi'_s = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est plan de symétrie de la distribution de charges ;

▷ le champ électrique est inclus dans ces deux plans, donc

$$\vec{E}(M) = E_r(M) \vec{e}_r .$$

• **Invariances** : en supposant le câble infini, la distribution de charges est invariante par toute translation d'axe (Oz) et toute rotation autour de cet axe, donc

$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r .$$

• **Surface de Gauss** : cylindre d'axe (Oz) passant par M , de rayon r et hauteur H , fermé par deux disques de normale \vec{e}_z .

• Flux sortant :

$$\oiint_{SG} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{bas}} (E_r \vec{e}_r) \cdot (-dS \vec{e}_z) + \iint_{\text{haut}} (E_r \vec{e}_r) \cdot (+dS \vec{e}_z) + \iint_{\text{lat}} E_r(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = E_r(r) \times 2\pi r H .$$

• **Charge intérieure** : la question ne porte que sur le champ entre l'âme et le blindage. On constate que la surface de Gauss choisie correspond à une longueur H de câble en ne contenant que l'âme, si bien que la charge intérieure y vaut

$$Q_{\text{int}} = \lambda H .$$

Et il ne coûterait pas bien cher de constater que $Q_{\text{int}} = 0$ à l'intérieur de l'âme et à l'extérieur du blindage ($\lambda H - \lambda H = 0$)! Ainsi, le champ électrostatique est nul à l'extérieur du câble coaxial : c'est l'un de ses intérêts, qui le rend robuste aux perturbations électromagnétiques.

• **Conclusion** : d'après le théorème de Gauss,

$$E_r(r) \times 2\pi r H = \frac{\lambda H}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r r} \vec{e}_r .}$$

2 Par définition,

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \quad \text{soit} \quad dV = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{dr}{r} .$$

En intégrant entre le blindage et l'âme,

$$\int_0^U dV = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{r} \quad \text{d'où} \quad U = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

et finalement

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln(R_2/R_1)} U .}$$

3 En introduisant les grandeurs linéiques dans la définition de la capacité,

$$Q = CU \quad \text{donc} \quad \lambda dl = C dl U \quad \text{et} \quad \boxed{C = \frac{\lambda}{U} .}$$

Par identification avec la question précédente,

$$\boxed{C = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln(R_2/R_1)} .}$$

4 Un théorème d'Ampère sauvage apparaît! La distribution de courant est schématisée figure 2. Elle n'est pas immédiate à comprendre, il ne faut surtout pas aller chercher plus loin que nécessaire ... et ce qui est nécessaire est de savoir que $\pm I$ désigne le courant *total* réparti en surface des conducteurs.

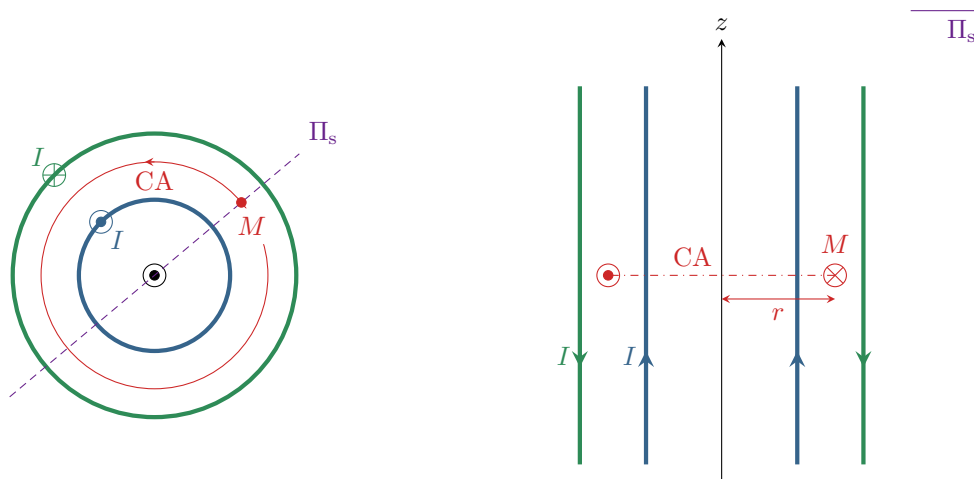


Figure 2 – Distribution de courant dans le câble coaxial.

• **Symétries** : le plan $\Pi_s = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc le champ magnétique est orthogonal à ce plan,

$$\vec{B}(M) = B_\theta(M) \vec{e}_\theta .$$

⚠️ ⚠️ ⚠️ **Attention !** Le plan Π'_s représenté figure 1 est un plan d'**anti**-symétrie de la distribution de courant : il n'y a aucune raison que les plans aient le même statut s/a pour les deux distributions. Le

champ magnétique doit être inclus dans ce plan, ce qui est cohérent avec son caractère orthoradial.

- **Invariances** : la distribution de courant est invariante par toute translation d'axe (Oz) et toute rotation autour de cet axe, d'où

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta.$$

- **Contour d'Ampère** : cercle de rayon r passant par M .

- **Circulation** :

$$\oint_{CA} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_\theta(r) \times 2\pi r.$$

- **Courant enlacé** : la question ne porte à nouveau que sur le champ entre l'âme et le blindage, zone dans laquelle le courant enlacé vaut en tout point

$$I_{enl} = I.$$

Attention à ne pas se tromper dans le courant enlacé : comme déjà indiqué au début de l'exercice,

On peut en plus constater qu'à l'intérieur de l'âme $I_{enl} = 0$ et à l'extérieur du blindage $I_{enl} = I - I = 0$.

Comme le champ électrostatique, le champ magnétostatique est donc nul à l'extérieur du câble.

- **Conclusion** : d'après le théorème d'Ampère,

$$B_\theta(r) \times 2\pi r = \mu_0 I \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta.}$$

- 5 La densité volumique d'énergie magnétique vaut

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 r^2} \times \frac{1}{2\mu_0} \quad \text{soit} \quad u_m = \frac{\mu_0}{8\pi^2 r^2} I^2.$$

Ainsi, l'énergie magnétique stockée dans le tronçon élémentaire de câble vaut

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_m &= \iiint \frac{\mu_0}{8\pi^2 r^2} I^2 r \, dr \, d\theta \, d\ell \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi^2} I^2 \int_0^{2\pi} d\theta \times d\ell \times \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi^2} I^2 \times 2\pi \times d\ell \times \ln \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

$$\boxed{d\mathcal{E}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} d\ell \ln \frac{R_2}{R_1} I^2.}$$

- 6 L'énergie magnétique s'exprime en fonction de l'inductance $\mathcal{L} d\ell$ du tronçon

$$d\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \mathcal{L} d\ell I^2$$

ce qui permet d'identifier

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.}$$

Dans cette situation, la méthode énergétique est beaucoup plus facile que le calcul du flux propre pour calculer l'inductance : il n'est clairement pas évident de voir au travers de quelle surface le flux propre doit être calculé !

Exercice 2 : Spectrométrie de masse

[💡 2 | ✂ 2 | Ⓜ]

A - Accélération des ions

1 L'ion mercure Hg^{2+} est un cation, chargé positivement. Son énergie potentielle électrostatique $2eV(x)$ est minimale lorsque le potentiel est minimal. Pour que l'ion soit accéléré, il faut donc que **la plaque P_2 soit portée à un potentiel inférieur à la plaque P_1 .**

2 L'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz électrique, qui dérive de l'énergie potentielle $E_{pe} = 2eV$ où V est le potentiel électrique. Ainsi, son énergie mécanique est conservée, soit en l'exprimant entre les plaques P_1 et P_2

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv(P_1)^2 + 2eV(P_1) &= \frac{1}{2}mv(P_2)^2 + 2eV(P_2) \\ 0 + 2eV(P_1) &= \frac{1}{2}mv^2 + 2eV(P_2) \\ \frac{1}{2}mv^2 &= 2e[V(P_1) - V(P_2)]\end{aligned}$$

$$v = \sqrt{\frac{4eU}{m}}$$

3 Les deux isotopes ne comptent que deux neutrons de différence, sur un total de 200 : **leur masse diffère donc de à peine 1 %**, et comme de plus elle apparaît sous une racine dans l'expression de v il n'est pas surprenant que l'écart entre les deux vitesses soit très faible.

B - Filtrage en vitesse

4 L'ion ne peut avoir un mouvement rectiligne entre les fentes F_2 et F_3 que si la **résultante des forces qu'il subit est dirigée selon \vec{e}_x .**

Attention à ne pas confondre mouvement rectiligne « tout court » et mouvement rectiligne uniforme. Rien n'impose ici a priori que la résultante des forces subies par l'ion soit nulle.

5 L'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz, et son poids est négligeable. Cette force s'écrit

$$\vec{F}_L = 2e [\vec{E}_2 + \vec{v} \wedge \vec{B}_2] = 2e [E_2 \vec{e}_y + vB_2(\vec{e}_x \wedge \vec{e}_z)] = 2e(E_2 - vB_2) \vec{e}_y.$$

Comme cette force ne peut pas être dirigée selon \vec{e}_x , on en déduit que l'ion n'a une trajectoire rectiligne que si elle est nulle, c'est-à-dire

$$E_2 - vB_2 = 0 \quad \text{soit} \quad v = v_0 = \frac{E_2}{B_2}.$$

6 En comparant avec les valeurs données question 3, ce sont les ions les plus lents qui traversent le filtre. D'après la question 2, ce sont les plus lourds : ce sont donc **les ions de l'isotope 202** qui passent au travers du filtre.

C - Séparation des ions

7 Dans la zone de séparation, l'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz magnétique $\vec{F}_B = 2e\vec{v} \wedge \vec{B}$. Comme elle est orthogonale à la vitesse, alors sa puissance est nulle, et d'après le théorème de la puissance cinétique,

$$\frac{dE_c}{dt} = 0 \quad \text{donc} \quad E_c = \text{cte} \quad \text{et} \quad v = \text{cte} = v_0.$$

Le mouvement de l'ion est bien uniforme.

8 Comme la trajectoire est circulaire, on la décrit en coordonnées cylindriques de centre le centre de la trajectoire et d'axe z . D'après le PFD appliqué à l'ion modélisé comme un point matériel,

$$m\vec{a} = \vec{F}_L \quad \text{soit} \quad -m\frac{v_0^2}{R}\vec{e}_r = 2e\vec{v} \wedge \vec{B}_3$$

en utilisant l'expression de l'accélération pour un mouvement circulaire uniforme. Compte tenu de la géométrie du dispositif, on devine que l'ion tourne en sens trigonométrique, sinon il n'atteindrait jamais les collecteurs : on

a. donc $\vec{v} = +v_0 \vec{e}_\theta$ car le mouvement est uniforme. On peut le vérifier à partir du sens du champ magnétique $\vec{B}_3 = -B_3 \vec{e}_z$. Cela permet d'exprimer le produit vectoriel,

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = -v_0 B_3 (\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_z) = -v_0 B_3 \vec{e}_r.$$

On déduit du PFD projeté sur \vec{e}_r

$$m \frac{v_0^2}{R} = 2ev_0 B_3 \quad \text{donc} \quad R = \frac{mv_0}{2eB_3}.$$

En remplaçant v_0 par son expression déterminée à la question 2,

$$R = \sqrt{\frac{m^2}{4e^2 B_3^2} \times \frac{4eU}{m}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{R = \sqrt{\frac{mU}{eB_3^2}}}.$$

9 Le rayon est d'autant plus grand que l'ion est massif : on a donc $y_{200} < y_{202}$, d'où on déduit

$$\boxed{y_{200} = 2R_{200} = 143,6 \text{ cm} \quad \text{et} \quad y_{202} = 2R_{202} = 145,0 \text{ cm} .}$$

10 La charge totale est proportionnelle au nombre d'ions reçus, puisque chaque ion est chargé $+2e$. On en déduit alors les proportions isotopiques α_{200} et α_{202} ,

$$\boxed{\alpha_{200} = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} = 77 \% \quad \text{et} \quad \alpha_{202} = \frac{N_2}{Q_1 + Q_2} = 23 \% .}$$