BLAISE PASCAL
PT 2019-2020

Révisions – Bloc 10

Mécanique des fluides

Année	Chapitre		Ce qu'il faut réviser	Support	Prioritaire	☺
PT	3	Statique des fluides	Notion de particule fluide			
PT	3	Statique des fluides	Relation de la statique des fluides dans le champ de pesanteur (R+D)		*	
PT	3	Statique des fluides	Champ de pression dans un liquide incompressible (R+D)	TD ex 2		
PT	3	Statique des fluides	Champ de pression dans l'atmosphère isotherme (D)	TD ex 5	*	
PT	3	Statique des fluides	Calculer la résultante des forces de pression sur une paroi plane ou cylindrique (M)	TD ex 1 + DS 2-II		
PT	3	Statique des fluides	Poussée d'Archimède	TD ex 6		
PT	4	Écoulements	Débit massique, débit volumique, vitesse débitante	Ex C3 + DM 4-A + DS 2-II	*	
PT	4	Écoulements	Nombre de Reynolds : définition, écoulement laminaire/turbulent.	DM 4-A + DS2-II		
PT	4	Écoulements	Force surfacique de viscosité	Ex C6, TD ex 6		
PT	4	Écoulements	Conditions aux limites dans un fluide visqueux	Ex C7		
PT	5	Bernoulli	Appliquer le théorème de Bernoulli avec ou sans perte de charge, avec ou sans élément actif (M)	TD ex 3, 7, 10 + DM 4-A + DS 2-II	**	
PT	5	Bernoulli	Exemples fondamentaux : effet Venturi, conduite munie de tubes piézométriques (R+D)	Ex C3	**	
	5	Bernoulli	Utiliser un diagramme de Moody (M)	DM 4-A + DS 2-II		
PT	5	Bernoulli	Être conscient des différences entre méca des solides et des fluides : les pertes de charge n'impactent pas forcément la vitesse débitante mais aussi la pression	Fiche de révisions	*	

Plan de la fiche

I - Ressources en ligne

Scanner ou cliquer sur les QR-code pour accéder aux ressources.

- **L'essentiel du cours sous forme de cartes mémo :** cartes réalisées par Christophe Cayssiols.

Cartes utilisables pour ce bloc de révisions : les deux blocs de mécanique des fluides du thème « mécanique » ... mais, pour une fois, je trouve que les questions posées vont parfois au delà de ce qu'il est nécessaire de connaître en PT.

- **Qmax : QCM d'applications directes du cours**

Choisir d'abord le mode « j'apprends » puis éventuellement le mode « je révise ». Ces QCM correspondent au programme de PCSI, certaines notions peuvent donc vous être inconnues : me demander en cas de doute.

Thèmes abordés dans ce bloc de révisions : la statique des fluides figure au programme de PCSI, de façon un peu étrange vous trouverez les questions correspondantes avec la thermodynamique plutôt qu'avec la mécanique.

II - Rappels de cours

II.1 - Conséquences de la relation de l'hydrostatique

La relation de l'hydrostatique est la traduction intégrale de la relation de la statique des fluides pour un liquide incompressible ($\rho = \text{cte}$). Pour un axe z **vers le bas**,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = +\rho g \qquad \text{d'où} \qquad P(z) = +\rho g z + \text{cte}\,.$$

La convention classique est de prendre l'origine $z = 0$ à la surface du liquide à l'air libre, $z > 0$ est alors la profondeur du point ou de façon équivalente la hauteur d'eau à la verticale du point. Dans ce cas,

$$\boxed{P(z) = P_{\text{atm}} + \rho g z\,.}$$

Une première conséquence qui peut sembler contre-intuitive est que la pression en un point ne dépend que de la hauteur d'eau à la verticale de ce point, mais pas du tout du volume ou de la masse d'eau qui surplombe le point en question. Ainsi, pour les deux vases de la figure 1, on a

$$z_A = z_B = h \qquad \text{donc} \qquad P_A = P_B = P_{\text{atm}} + \rho g h\,.$$

Et comme la surface du fond des deux vases est la même, ils subissent *exactement la même* force de pression.

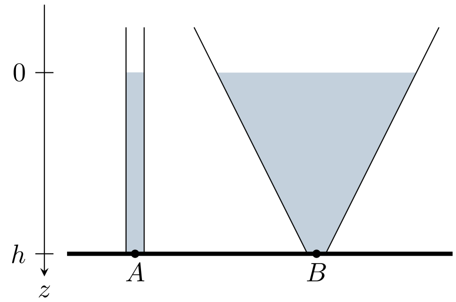

Figure 1 – Pression exercée sur le fond de deux vases de formes différentes.

Une deuxième conséquence est que la pression est égale en deux points d'un même fluide situés à la même profondeur. Ainsi, sur la figure 2,

$$P(M) = P(M') = P_{\text{atm}} + \rho g h\,.$$

On peut alors par exemple en déduire la force subie par le bouchon,

$$\overrightarrow{F} = -P(M) S \overrightarrow{e}_z\,.$$

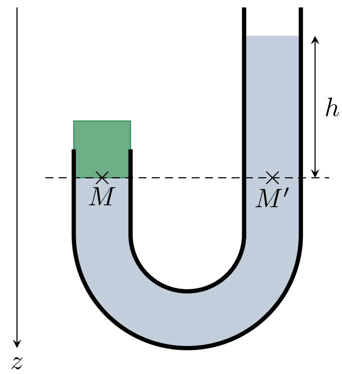

Figure 2 – Tube en U bouché.

II.2 - Théorème(s) de Bernoulli

Commençons par un peu de culture ! D'abord, un rappel orthographique : il n'y a qu'un seul i dans Bernoulli ! Et ensuite un peu de généalogie : le Bernoulli des maths n'est pas le Bernoulli de la physique. En effet, c'est Jacques qui a donné son nom à la célèbre loi de Bernoulli des probabilités alors que c'est en l'honneur de Daniel, le neveu de Jacques, qu'est nommé le non moins célèbre théorème de Bernoulli de la mécanique des fluides. La famille Bernoulli compte tellement de membres illustres qu'elle a droit à son arbre généalogique complet sur Wikipédia.

Beaucoup d'équations un peu différentes s'appellent « théorème de Bernoulli », et il n'est pas toujours simple de s'y retrouver ni de le formuler avec rigueur. De plus, nous n'avons pas en PT les outils pour les démontrer complètement, ce qui n'aide pas.

• Rappels de définitions

Les hypothèses intervenant dans les différentes versions du théorème de Bernoulli sont les suivantes, dont il ne sera surement pas inutile de rappeler les définitions :

▷ écoulement **parfait** : $\eta = 0$, ou plus généralement les effets de la viscosité sont négligés ;

▷ écoulement **stationnaire** : les champs eulériens (c'est-à-dire les champs « habituels » qui dépendent de l'espace) sont indépendants du temps ;

▷ écoulement **incompressible** et **homogène** : pour nous, ces deux hypothèses vont toujours ensemble et signifient que la masse volumique prend partout et tout le temps la même valeur,

$$\forall M, \forall t, \quad \rho(M,t) = \rho_0 = \text{cte}$$

• Charge hydraulique

La charge hydraulique n'a pas de définition universelle et bien posée, on dira simplement que c'est « la quantité qui intervient dans le théorème de Bernoulli ». Moralement, elle quantifie l'énergie mécanique massique du fluide en un point de l'écoulement. En fonction des besoins, on peut l'exprimer comme une énergie massique, comme une pression, ou comme une hauteur, le premier cas étant le plus classique :

$$\boxed{K_e = \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz}$$

$$K_p = P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z$$

$$K_h = \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z$$

Il faut retenir l'expression encadrée et savoir retrouver les autres en isolant le terme qui a la dimension voulue en divisant l'expression par « ce qu'il faut ».

• Le « vrai » théorème de Bernoulli : c'est celui qui se démontre à partir de l'équation fondamentale de la mécanique des fluides, l'équation de Navier-Stokes.

▷ *Hypothèses nécessaires :* écoulement parfait, stationnaire, incompressible, homogène.

▷ *Contenu physique :* la charge hydraulique prend la même valeur en tout point d'une même ligne de courant $\mathcal{L}$,

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{L}, \quad \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = K(\mathcal{L}) = \text{cte}\,.}$$

▷ *Comment s'interprètent P et v ?* Valeurs au point M du champ de pression $P(M)$ et de la norme du champ de vitesse $v(M)$.

▷ *Utilisation :* usuellement, on ne fait jamais apparaître la constante $K(\mathcal{L})$, et on écrit directement l'égalité entre deux points A et B bien choisis de la ligne de courant.

▷ *Remarque 1 :* dans le cas (très rare en pratique) où l'écoulement est irrotationnel, alors la valeur de K ne dépend pas de la ligne de courant $\mathcal{L}$ choisie ... la charge hydraulique prend alors la même valeur en tout point de l'écoulement.

▷ *Remarque 2 :* cette relation est vraie non seulement dans le cas des écoulements à l'intérieur d'une conduite, mais aussi pour ceux autour d'un obstacle.

• Théorème de Bernoulli en conduite

▷ Dans le cas d'un écoulement en conduite vérifiant toutes les hypothèses précédentes (ce qui est en toute rigueur impossible mais peut constituer une bonne approximation), on peut transposer la relation précédente entre les sections d'entrée et de sortie d'un volume de contrôle,

$$\boxed{\left(\frac{P_\text{s}}{\rho} + \frac{{v_\text{s}}^2}{2} + gz_\text{s}\right) - \left(\frac{P_\text{e}}{\rho} + \frac{{v_\text{e}}^2}{2} + gz_\text{e}\right) = 0\,.}$$

▷ *Comment s'interprètent P et v ?* Comme on veut ! Dans un écoulement vérifiant ces hypothèses, la pression et la vitesse sont uniformes sur toute section de la conduite : on peut donc les voir comme des valeurs en un point ou comme des valeurs moyennées sur la section considérée.

▷ *Remarque :* c'est cette version que nous avons démontrée en cours.

- **Théorème de Bernoulli avec pertes de charge**

▷ Les pertes de charge traduisent de manière quantitative les effets de la viscosité, moyennés sur un domaine macroscopique de l'écoulement. On peut les exprimer comme une perte de hauteur piézométrique $\Delta h^\star$ ou comme une chute de pression $\Delta p^\star$ qui sont toujours positives par convention. On distingue les pertes de charge régulières et singulières.

▷ *Hypothèses nécessaires :* écoulement stationnaire, incompressible, homogène ... mais l'écoulement n'est plus parfait.

▷ *Contenu physique :* la charge hydraulique moyennée diminue le long de l'écoulement. Entre les sections d'entrée et de sortie d'un volume de contrôle,

$$\boxed{\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\rho} + \frac{{v_\mathrm{s}}^2}{2} + g z_\mathrm{s}\right) - \left(\frac{P_\mathrm{e}}{\rho} + \frac{{v_\mathrm{e}}^2}{2} + g z_\mathrm{e}\right) = -\frac{\Delta p^\star}{\rho} = -g\,\Delta h^\star\,.}$$

Attention ! Ne pas oublier le signe $\ominus$ devant les pertes de charge, ni les préfacteurs ρ ou g nécessaires !

▷ *Comment s'interprètent P et v ?* Ce sont les valeurs moyennes de la pression et de la vitesse sur les sections d'entrée et de sortie du volume de contrôle. Dans les cas usuels, les variations de pression sont presque toujours négligeables sur une section donnée, mais les variations de vitesse ne le sont pas : la vitesse qui intervient ici est la vitesse débitante.

- **Théorème de Bernoulli en présence d'un élément actif**

▷ Un élément actif est une pompe ou une turbine, qui apporte ou prélève de l'énergie à l'écoulement. Il est décrit par le travail indiqué massique w_i (par unité de masse traversant) ou par la puissance indiquée $\mathcal{P}_\mathrm{i}$. Le théorème de Bernoulli traduit un bilan d'énergie pour le fluide, on a donc $w_\mathrm{i} > 0$ pour une pompe et $w_\mathrm{i} < 0$ pour une turbine.

▷ *Hypothèses nécessaires :* écoulement stationnaire, incompressible, homogène ... peu importe qu'il soit parfait ou non.

▷ *Contenu physique :* la charge hydraulique moyennée varie au passage de l'élément actif. Entre les sections d'entrée et de sortie d'un volume de contrôle englobant l'élément actif,

$$\boxed{\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\rho} + \frac{{v_\mathrm{s}}^2}{2} + g z_\mathrm{s}\right) - \left(\frac{P_\mathrm{e}}{\rho} + \frac{{v_\mathrm{e}}^2}{2} + g z_\mathrm{e}\right) = w_\mathrm{i}\,.}$$

qui peut aussi s'écrire avec la puissance et le débit massique

$$\boxed{D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\rho} + \frac{{v_\mathrm{s}}^2}{2} + g z_\mathrm{s}\right) - D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{e}}{\rho} + \frac{{v_\mathrm{e}}^2}{2} + g z_\mathrm{e}\right) = \mathcal{P}_\mathrm{i}\,.}$$

Attention ! Ne pas oublier les préfacteurs ρ ou g si la charge est exprimée autrement qu'en énergie massique.

▷ *Comment s'interprètent P et v ?* Valeurs de la pression et de la vitesse moyennées sur les sections d'entrée et de sortie du volume de contrôle. Très souvent, les variations de pression sont négligeables sur une section donnée, en revanche les variations de vitesse ne le sont pas : la vitesse qui intervient ici est la vitesse débitante.

- **Théorème de Bernoulli généralisé**

On peut sans souci prendre en compte simultanément des pertes de charge et la présence d'un élément actif ... mais **attention** à rester cohérent dans les préfacteurs ! Par exemple,

$$D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{s}}{\rho} + \frac{{v_\mathrm{s}}^2}{2} + g z_\mathrm{s}\right) - D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{e}}{\rho} + \frac{{v_\mathrm{e}}^2}{2} + g z_\mathrm{e}\right) = \mathcal{P}_\mathrm{i} - D_\mathrm{m} g\,\Delta h^\star\,,$$

ou encore

$$\left(P_\mathrm{s} + \frac{1}{2}\rho{v_\mathrm{s}}^2 + \rho g z_\mathrm{s}\right) - \left(P_\mathrm{e} + \frac{1}{2}\rho{v_\mathrm{e}}^2 + \rho g z_\mathrm{e}\right) = \rho w_\mathrm{i} - \Delta p^\star\,.$$

II.3 - Effets des pertes de charge ... ou pourquoi il faut se méfier de son intuition

La viscosité traduit le frottement des particules fluides les unes avec les autres et avec les parois de la conduite dans laquelle le fluide s'écoule. Une analogie un peu rapide avec la mécanique des solides peut donc facilement laisser croire que les pertes de charge ont pour effet de ralentir l'écoulement, c'est-à-dire de diminuer le débit. Or il n'en est rien ! En effet, un paramètre supplémentaire intervient en mécanique des fluides : la pression, qui n'a pas d'analogue en mécanique des solides. Les pertes de charge peuvent ainsi modifier la pression le long de l'écoulement et n'avoir aucun effet sur la vitesse.

De façon plus mathématique, comparons le théorème de Bernoulli avec pertes de charge au théorème de l'énergie mécanique en présence de frottements. En réorganisant les termes par rapport à l'écriture habituelle, le théorème de Bernoulli s'écrit

$$\left(\underbrace{\frac{1}{2}\rho {v_\mathrm{s}}^2}_{=e_\mathrm{c,s}} + \underbrace{\rho g z_\mathrm{s}}_{=e_\mathrm{pp,s}} + P_\mathrm{s}\right) - \left(\frac{1}{2}\rho {v_\mathrm{e}}^2 + \rho g z_\mathrm{e} + P_\mathrm{e}\right) = \underbrace{-\Delta p^\star}_{<0}$$

alors que le théorème de l'énergie mécanique appliqué à un solide indéformable sur une trajectoire $\widehat{AB}$ sur laquelle il subit une force de frottements donne

$$\left(\underbrace{\frac{1}{2} m v_B^2}_{=E_{\mathrm{c},B}} + \underbrace{m g z_B}_{=E_{\mathrm{pp},B}}\right) - \left(\frac{1}{2} m v_A^2 + m g z_A\right) = \underbrace{W_\mathrm{fr}}_{<0} .$$

Supposons que les valeurs à l'entrée de la conduite (resp. le début de la trajectoire) sont imposées, de même que les altitudes en sortie z_s (resp. à l'arrivée de la trajectoire z_B). Dans le cas de la mécanique des solides, la présence ou l'absence de la force de frottement modifie *forcément* la vitesse v_B alors que dans le cas de la mécanique des fluides les deux paramètres P_s et v_s peuvent varier indépendamment. Toutefois, outre cette variable supplémentaire, la mécanique des fluides implique une équation supplémentaire : la conservation du débit. Il n'y a donc bien qu'un unique couple $(P_\mathrm{s}, v_\mathrm{s})$ qui soit compatible avec le théorème de Bernoulli et la conservation du débit.

Étudions deux exemples pour comprendre dans quel cas la pression ou la vitesse débitante en sortie de conduite sont modifiées, en considérant dans les deux cas une même conduite de longueur ℓ donnant lieu à une perte de charge $\Delta p^\star = \rho g \, \Delta h^\star$.

- **Premier exemple :** la conduite est reliée à un réservoir de grande section S_0 ouvert à l'air libre, voir figure 3, la pression en entrée et en sortie de conduite est égale à la pression atmosphérique P_0. En revanche, le débit n'est pas contraint.

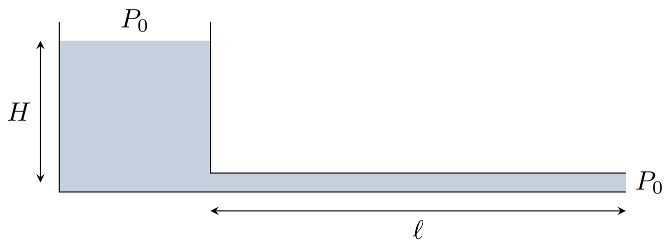

Figure 3 – Conduite connectée à un réservoir.

Raisonnons entre le haut du réservoir et la sortie de la conduite. La section S_0 du réservoir est très supérieure à la section S de la conduite, donc la conservation du débit donne

$$v_\mathrm{e} S_0 = v_\mathrm{s} S \qquad \text{soit} \qquad v_\mathrm{e} = \frac{S}{S_0} v_\mathrm{s} \ll v_\mathrm{s} .$$

On négligera donc la vitesse d'entrée. Le théorème de Bernoulli s'écrit alors

$$\left(\cancel{\frac{P_0}{\rho}} + \frac{{v_\mathrm{s}}^2}{2} + 0\right) - \left(\cancel{\frac{P_0}{\rho}} + \frac{0^2}{2} + gH\right) = -g\,\Delta h^\star \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_\mathrm{s} = \sqrt{2g(H - \Delta h^\star)} \, .}$$

Dans cet exemple, la pression est imposée en entrée et en sortie de la conduite. Les pertes de charge ont donc un impact sur la vitesse en sortie de conduite, mais pas sur la pression.

- **Deuxième exemple :** la même conduite est reliée à une pompe (non représentée figure 4) qui impose un débit volumique D_V. La pression de sortie est égale à la pression atmosphérique P_0, mais la pression d'entrée dépend de la pompe et n'est pas contrainte.

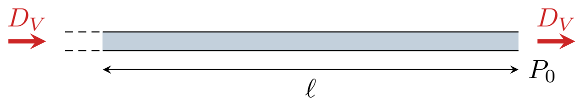

Figure 4 – Conduite traversée par un débit imposé.

Raisonnons entre l'entrée et la sortie de la conduite. La section est identique, donc la conservation du débit donne

$$v_\mathrm{e} S = v_\mathrm{s} S \qquad \text{soit} \qquad v_\mathrm{e} = v_\mathrm{s} = V\,.$$

Le théorème de Bernoulli s'écrit donc

$$\left(\frac{P_0}{\rho} + \cancel{\frac{V^2}{2}} + 0\right) - \left(\frac{P_\mathrm{e}}{\rho} + \cancel{\frac{V^2}{2}} + 0\right) = -g\,\Delta h^\star \qquad \text{d'où} \qquad P_\mathrm{e} = P_0 + \rho g\,\Delta h^\star\,.$$

Dans cet exemple, le débit est imposé ainsi que la pression en sortie de la conduite. Les pertes de charge ont donc un impact sur la pression d'entrée que doit imposer la pompe pour garantir le débit voulu, d'autant plus élevée que les pertes de charge sont importantes. Dans cet exemple, les pertes de charge ont donc un impact sur la pression, mais pas sur la vitesse.

Les pertes de charge peuvent modifier ou bien la vitesse de l'écoulement, ou bien la pression :
tout dépend des conditions aux limites imposées à l'écoulement.

III - Questions de cours

Remarque importante : j'ai décidé d'introduire les opérateurs vectoriels (gradient, divergence, rotationnel) en mécanique des fluides pour vous y familiariser le plus tôt possible dans l'année ... mais les propriétés des écoulements formulées chapitre 4 en termes de divergence et rotationnel ne figurent pas dans le programme de PT. Elles vous seront rappelées si elles sont utiles, il n'est pas nécessaire que vous les reteniez.

1 - Établir la relation de la statique des fluides dans le seul champ de pesanteur, en admettant que le champ de pression ne dépend que de la coordonnée verticale z.

> *La démonstration attendue est celle par un bilan 1d sur une tranche mésoscopique d'épaisseur dz plutôt que celle par bilan sur une particule fluide qui utilise le gradient.*

2 - Montrer que la résultante des forces de pression sur une particule fluide est équivalente à une force de densité volumique $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P$.

> *Cette démonstration est théoriquement hors programme, de même que la forme générale de la relation de la statique des fluides. Dans le contexte d'un écrit de la banque PT, la question pourrait éventuellement être posée mais elle serait alors guidée.*

3 - En partant de la relation de la statique des fluides, exprimer le champ de pression dans le modèle de l'atmosphère isotherme.

4 - Énoncer la relation de Bernoulli en indiquant sa signification physique. Retrouver l'évolution des champs de pression et de vitesse dans un dispositif type Venturi.

> *Bien que très classique, le dispositif de Venturi n'est pas à connaître et pourra donc être rappelé si besoin. Je n'attends pas de longs calculs : l'étudiant doit combiner la conservation du débit et le théorème de Bernoulli pour montrer qu'un resserrement de section entraîne une hausse de vitesse et une chute de pression.*

5 - Écrire sans démonstration la relation de Bernoulli en présence de pièces mobiles et de pertes de charge. L'interrogateur précisera si l'on veut une écriture en puissance ou en énergie massique, et si les pertes de charge doivent s'exprimer sous forme de pression ou de hauteur. L'objectif est de jongler sans erreur avec les dimensions des différents termes.

> ***Exemples :***
> ▷ *Écriture en énergie massique, pertes de charge en hauteur d'eau équivalente :*
>
> $$\left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{v_s^2}{2} + g z_s\right) - \left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{v_e^2}{2} + g z_e\right) = w_i - g\,\Delta h^\star\,.$$

▷ *Écriture homogène à une pression :*

$$\left(P_s + \frac{1}{2}\rho {v_s}^2 + \rho g z_s\right) - \left(P_e + \frac{1}{2}\rho {v_e}^2 + \rho g z_e\right) = \rho w_i - \Delta p^\star \,.$$

▷ *etc.*

IV - Pour compléter vos TD

Pas de nouvel exercice cette fois-ci ! Je pense que le programme de révisions est suffisamment chargé, et il n'est probablement pas question de tout refaire. Le point le plus important à retravailler est l'application du théorème de Bernoulli avec pertes de charges et/ou élément actif.