BLAISE PASCAL
PT 2019-2020

Révisions – Bloc 13

Conduction thermique

Attention ! Nous avons fait plusieurs exercices sur la conduction thermique dans des systèmes en géométrie cylindrique ou sphérique. Toutefois, depuis la réforme des programmes, tous les sujets d'écrit de la banque PT portant sur la conduction se placent dans une géométrie cartésienne. Les exemples en cylindriques ne sont donc pas la priorité !

Année	Chapitre		Ce qu'il faut réviser	Support	Prioritaire	☺
PT	9	Conduction	Vecteur densité de flux thermique j, flux/puissance thermique Φ = jS, transfert thermique δQ = j S dt (attention à l'algébrisation)	Ex C1	***	
PT	9	Conduction	Loi de Fourier		***	
PT	9	Conduction	Equation de la chaleur 1d cartésien (R+D), généralisation 3d (R)		***	
PT	9	Conduction	Bilans thermiques dans d'autres géométries et/ou avec termes sources et/ou avec la loi de Newton	TD ex 2, révisions ex 1, DM 7		
PT	9	Conduction	Longueur et temps de diffusion	Ex C3, TD ex 10		
PT	9	Conduction	Résistance thermique, exple fondamental d'une paroi plane (R+D)	Ex C5 (loi de Newton)	**	
PT	9	Conduction	Associations de résistances thermiques	Révisions ex 2	**	

Plan de la fiche

I - Ressources en ligne

Scanner ou cliquer sur les QR-code pour accéder aux ressources.

- **L'essentiel du cours sous forme de cartes mémo :** cartes réalisées par Christophe Cayssiols.

Cartes utilisables pour ce bloc de révisions : choisir « thermodynamique » puis « diffusion thermique ».

II - Questions de cours

1 - Établir l'équation de la chaleur à une dimension cartésienne.

2 - Considérons une plaque plane d'épaisseur e, faite d'un matériau de diffusivité D et soumise à « un échelon » de température ΔT. Par analyse dimensionnelle, exprimer la durée τ nécessaire pour atteindre le régime permanent OU exprimer l'abscisse x à laquelle avance le front de diffusion au bout d'un temps t. Commenter les résultats.

> *Commentaires attendus :*
> ▷ *les résultats sont indépendants de ΔT ;*
> ▷ *différence fondamentale entre un phénomène diffusif et un phénomène ondulatoire pour lequel on aurait $x = ct$.*

3 - Établir l'expression de la résistance thermique d'une plaque plane d'épaisseur e, section S, faite dans un matériau de conductivité thermique λ.

III - Pour compléter vos TD

Attention ! Tous ces exercices ne sont pas « à faire », concentrez-vous sur ce qui vous pose des difficultés.

Signification des pictogrammes :

- Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
- Difficulté technique et calculatoire ;
- Exercice important.

Exercice 1 : Géothermie [2 | 1 |]

> *Un exercice pas très compliqué, qui permet de revoir la démonstration de l'équation de la chaleur en présence d'un terme source, c'est-à-dire d'une puissance thermique produite directement à l'intérieur du milieu dans lequel on étudie la conduction thermique.*

La croûte continentale terrestre a une épaisseur moyenne $\ell = 30\,\mathrm{km}$, limitée par la discontinuité de Moho. Sa conductivité thermique moyenne vaut $\lambda = 20\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$. Au niveau de la surface, la température vaut $T_0 = 300\,\mathrm{K}$ alors qu'elle vaut $T_\mathrm{M} = T_0 + \Delta T = 900\,\mathrm{K}$ sur la discontinuité de Moho. Les éléments radioactifs de la croûte terrestre libèrent, en se désintégrant, une puissance volumique $p_\mathrm{rad} = 10\,\mathrm{\mu W\cdot m^{-3}}$.

On néglige localement la courbure de la Terre et on se place en régime permanent : la température ne dépend que de la profondeur z, mesurée le long d'un axe vertical ascendant dont l'origine se trouve à la profondeur ℓ.

1 - Établir l'équation différentielle régissant le champ de température $T(z)$.

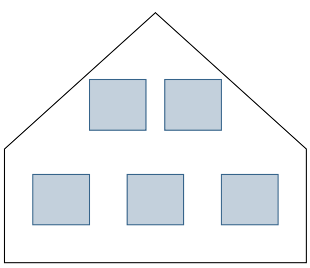
2 - Résoudre cette équation et représenter le profil de température.

3 - En déduire le flux géothermique surfacique au niveau du sol. Commenter l'influence des éléments radioactifs.

4 - Est-il possible de définir une résistance thermique de la croûte terrestre ?

Exercice 2 : Isolation d'un pignon [1 | 2 |]

> *Cet exercice assez simple permet de retravailler les associations de résistances thermiques. Les valeurs numériques ont été choisies de telle sorte que tous les calculs numériques soient faisables de tête ... un bon entraînement en vue des écrits !*



Une famille souhaite isoler le pignon de sa maison. La maçonnerie est en béton cellulaire ($\lambda = 0{,}3\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$), et a une surface (hors fenêtres) $S = 40\,\mathrm{m^2}$ et une épaisseur $e = 12\,\mathrm{cm}$. Il est percé de cinq fenêtres identiques, toutes de surface $S' = 2\,\mathrm{m^2}$, faites d'une épaisseur $e' = 5\,\mathrm{mm}$ de simple vitrage ($\lambda' = 1{,}25\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$).

L'objectif de l'exercice est de comparer deux solutions d'isolation : ou bien recouvrir l'ensemble du béton cellulaire d'une couche de laine de verre, ou bien installer des fenêtres en double vitrage.

Donnée : $1/2600 = 3{,}85\cdot 10^{-4}$ et $1/60 = 1{,}66\cdot 10^{-2}$.

1 - Établir l'expression de la résistance thermique R_th d'une paroi plane d'épaisseur e et de surface S. En déduire la résistance R du mur en béton et celle R' d'une fenêtre.

2 - Exprimer la résistance thermique R_0 du pignon non isolé et la calculer numériquement.

3 - La première possibilité est d'isoler la maçonnerie par une couche de laine de verre ($\lambda_1 = 4\cdot 10^{-2}\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$)

d'épaisseur e_1. Exprimer et calculer numériquement la résistance thermique R_1 du pignon isolé de la sorte pour $e_1 = 16\,\mathrm{cm}$.

4 - Le second choix d'isolation consiste à installer du double vitrage, composé de deux lames de verre d'épaisseur $e'_2 = 4\,\mathrm{mm}$ entourant une couche d'air d'épaisseur $e_2 = 12\,\mathrm{mm}$ ($\lambda_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$), suffisamment fine pour que les mouvements de convection y soient négligeables. Calculer la résistance thermique R'_{dv} d'une fenêtre en double vitrage.

5 - En déduire la résistance thermique R_2 du pignon pour lequel toutes les fenêtres auraient été remplacées.

6 - Conclure : quels travaux faut-il envisager en priorité ?

IV - Correction des exercices

Exercice 1 : Géothermie [2 | 1 |]

$\boxed{1}$ Considérons la tranche mésoscopique de hauteur $\mathrm{d}z$ et de section S schématisée figure 1.

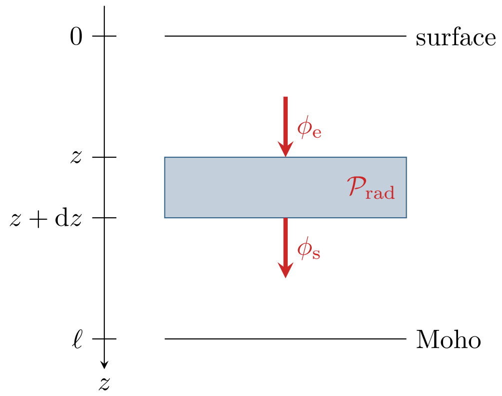


Figure 1 – **Tranche infinitésimale de croûte terrestre.**

- **Bilan des transferts thermiques :** pendant une durée $\mathrm{d}t$, elle échange

▷ un transfert thermique entrant par la face située en z

$$\delta Q_\mathrm{e} = \phi_\mathrm{e}\,\mathrm{d}t = j_z(z)\,S\,\mathrm{d}t$$

▷ un transfert thermique sortant par la face située en $z + \mathrm{d}z$

$$\delta Q_\mathrm{s} = \phi_\mathrm{s}\,\mathrm{d}t = j_z(z + \mathrm{d}z)\,S\,\mathrm{d}t$$

▷ un transfert thermique effectif fourni par les désintégrations radioactives

$$\delta Q_\mathrm{rad} = \mathcal{P}_\mathrm{rad}\,\mathrm{d}t = p_\mathrm{rad}\,S\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t\,.$$

> *Comme $T_M > T_0$, alors les transferts thermiques sont dirigés du Moho vers la surface ... donc dans le sens contraire à celui dans lequel j'ai orienté les flux ... et ce n'est pas grave !! Pour ne pas se tromper, mieux vaut orienter les flux dans le sens de l'axe plutôt que dans leur sens réel ... et il ne faut **SURTOUT PAS** rajouter un signe ⊖ « à la main » ... même si c'est peut être très tentant ! La raison profonde à tout ceci est le caractère algébrique des flux : les conventions choisies ici imposent simplement $\phi_\mathrm{e}, \phi_s < 0$ et $j_z < 0$.*

- **Bilan d'enthalpie :** en régime permanent,

$$\mathrm{d}H \underbrace{=}_{\mathrm{RP}} 0 \underbrace{=}_{\mathrm{1er\ P}} j_z(z)\,S\,\mathrm{d}t - j_z(z + \mathrm{d}z)\,S\,\mathrm{d}t + p_\mathrm{rad}\,S\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t\,.$$

Par un développement limité, on obtient

$$-\frac{\mathrm{d}j_z}{\mathrm{d}z}\,\cancel{\mathrm{d}z\,S\,\mathrm{d}t} + p_\mathrm{rad}\,\cancel{S\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t} = 0\,,$$

et en utilisant la loi de Fourier,

$$j_z = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\lambda \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}z^2} + p_\mathrm{rad} = 0\,.}$$

2 Par double intégration,

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{p_{\text{rad}}}{\lambda} \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -\frac{p_{\text{rad}}}{\lambda}z + A \qquad \text{et} \qquad T(z) = -\frac{p_{\text{rad}}}{2\lambda}z^2 + Az + B\,.$$

Avec les conditions aux limites,

$$T(z=0) \underbrace{=}_{\text{CL}} T_0 \underbrace{=}_{\text{expr}} B \qquad \text{donc} \qquad B = T_0$$

et

$$T(z=\ell) \underbrace{=}_{\text{CL}} T_0 + \Delta T \underbrace{=}_{\text{expr}} -\frac{p_{\text{rad}}}{2\lambda}\ell^2 + A\ell + T_0 \qquad \text{donc} \qquad \Delta T = -\frac{p_{\text{rad}}}{2\lambda}\ell^2 + A\ell \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{\Delta T}{\ell} + \frac{p_{\text{rad}}\ell}{2\lambda}\,.$$

Finalement,

$$\boxed{T(z) = -\frac{p_{\text{rad}}}{2\lambda}z^2 + \left(\frac{\Delta T}{\ell} + \frac{p\ell}{2\lambda}\right)z + T_0\,.}$$

Le profil de température est donc parabolique. Comme il est physiquement évident que la température est forcément une fonction croissante de z, on en déduit l'allure de la figure 2 qui ne présente pas de minimum.

> *La concavité de la courbe est donnée par la dérivée seconde $-p_{\text{rad}}/\lambda < 0$: la dérivée diminue avec z, donc la température est « de moins en moins croissante ».*

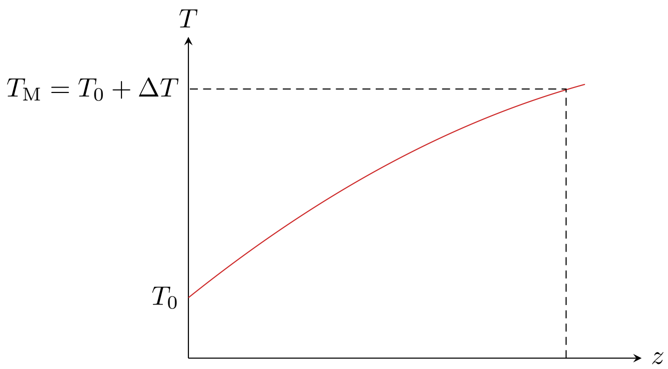


Figure 2 – Profil de température dans la croûte terrestre.

3 Par flux géothermique « surfacique », il faut comprendre qu'on se ramène à $S = 1\,\mathrm{m}^2$ ... ou qu'on calcule directement j_z. D'après la loi de Fourier,

$$j_z(z=0) = -\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}(z=0) = +p_{\text{rad}} \times 0 - \lambda\left(\frac{\Delta T}{\ell} + \frac{p_{\text{rad}}\ell}{2\lambda}\right)$$

et ainsi

$$\boxed{\phi_{\text{surf}} = |j_z(z=0)| = \frac{\lambda\,\Delta T}{\ell} + \frac{p_{\text{rad}}\ell}{2} = 0{,}55\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}\,.}$$

S'il n'y avait pas la radioactivité ($p_{\text{rad}} = 0$), le flux surfacique ne serait que de $0{,}4\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$: elle joue donc un rôle important.

4 Non ! En effet, à cause de la puissance interne, le flux n'est pas proportionnel à la différence de température.

> *Profitons-en pour rappeler les hypothèses pour pouvoir définir et utiliser les résistances thermiques : elles ne peuvent être utilisées qu'en régime permanent et s'il n'y a pas de libération d'énergie (= puissance interne = terme source) à l'intérieur de l'élément considéré.*

Exercice 2 : Isolation d'un pignon [1 | 2 |]

1 Voir cours,

$$\boxed{R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}\,.}$$

On a alors

$$\boxed{R = 1\cdot 10^{-2}\,\mathrm{K\cdot W^{-1}} \qquad \text{et} \qquad R' = 2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}\,.}$$

2 Les résistances thermiques du mur et des fenêtres sont montées en parallèle, donc

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R} + \frac{5}{R'} = 2600\,\mathrm{W \cdot K^{-1}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{R_0 = \frac{1}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{5}{R'}} = 3{,}85 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}\,.}$$

3 Le béton cellulaire et la laine de verre sont superposées, leurs résistances thermiques sont donc montées en série, ainsi

$$R_{\mathrm{m+l}} = R + \frac{e_1}{\lambda_1 S} = 0{,}11\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}\,.$$

La résistance thermique du mur est donc largement améliorée (facteur 10). Ainsi,

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_{\mathrm{m+l}}} + \frac{5}{R'} = 2508\,\mathrm{W \cdot K^{-1}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{R_1 = \frac{1}{\dfrac{1}{R_{\mathrm{m+l}}} + \dfrac{5}{R'}} = 3{,}98 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}\,.}$$

Une fois les fenêtres prises en compte, l'impact des travaux est peu perceptible !

> *La résistance thermique du mur est tellement supérieure à celle des fenêtres que, finalement, tout se passe comme si seules les fenêtres étaient des conducteurs thermiques. On peut faire l'analogie avec l'électronique : quand deux résistances très différentes sont montées en parallèle, la plus élevée équivaut à un interrupteur ouvert ... et l'association devient équivalente à la plus faible des deux résistances.*

4 Les deux lames de verre et la couche d'air sont montées en série, donc

$$\boxed{R'_{\mathrm{dv}} = \frac{2e'_2}{\lambda' S'} + \frac{e_2}{\lambda_2 S'} = 2{,}43 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}\,.}$$

5 Finalement,

$$\boxed{R_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{5}{R'_{\mathrm{dv}}}} = 1{,}6 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}\,.}$$

6 Pas beaucoup de doute à avoir : il vaut mieux changer les fenêtres !

> *Cette conclusion est largement vérifiée, même si les valeurs numériques choisies dans cet exercice rendent les résultats un peu caricaturaux. De plus, en pratique, le toit joue également un rôle crucial dans l'isolation d'une maison.*