Viscosimètre à chute de bille

Objectifs

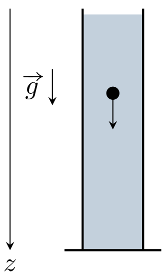
- ▷ Proposer et mettre en œuvre un protocole de mesure des frottements fluides.
- ▷ Mesurer une vitesse.
- ▷ Mesurer une longueur avec un pied à coulisse en lisant convenablement le vernier.
- ▷ Estimer une incertitude par une méthode statistique (type A).

Matériel :

- ▷ Éprouvette de 1 L remplie de glycérol ;
- ▷ Trois élastiques placés autour de l'éprouvette ;
- ▷ Petites billes d'acier calibrées ;
- ▷ Un pied à coulisse ;
- ▷ Chronomètre ;
- ▷ Tige aimantée pour remonter les billes.

L'objectif du TP est de concevoir et mettre en œuvre un protocole de mesure de la viscosité dynamique d'un liquide, en l'occurence le glycérol aussi appelée glycérine. On utilise la technique dite de viscosimétrie à chute de bille.

I - Étude théorique



Un viscosimètre à chute de bille est un dispositif très simple à mettre en place. Il s'agit d'une simple éprouvette, remplie du fluide à étudier, dans laquelle chutent des billes sphériques de masse m et rayon R connu. On utilise dans ce TP à des billes en acier.

Si la bille est de rayon suffisamment petit par rapport au diamètre de l'éprouvette, la force de frottement exercée par le glycérol sur la bille est bien décrite par la loi (empirique) de Stokes,

$$\vec{f} = -6\pi\,\eta_{\mathrm{g}}\,R\,\vec{v}\,,$$

où η_{g} est la viscosité dynamique du glycérol que l'on cherche à mesurer.

Données : masse volumique de l'acier $\rho_{\mathrm{a}} = 7{,}83 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et du glycérol $\rho_{\mathrm{g}} = 1{,}3 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

1 - Montrer qu'en raison de la poussée d'Archimède tout se passe comme si le poids de la bille était modifié avec une masse volumique apparente $\rho' = \rho_{\mathrm{a}} - \rho_{\mathrm{g}}$.

2 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la norme v de la vitesse de la bille.

3 - Exprimer la vitesse limite atteinte par la bille et la durée caractéristique τ pour atteindre cette vitesse limite. En déduire un ordre de grandeur (surestimé) de la distance de chute nécessaire pour atteindre cette vitesse limite.

4 - Proposer un protocole permettant de mesurer la viscosité η_{g} du glycérol.

5 - Comment s'assurer de la validité des hypothèses faites à la question précédente ? Proposer une vérification expérimentale et une vérification par un calcul a posteriori.

II - Mise en œuvre expérimentale

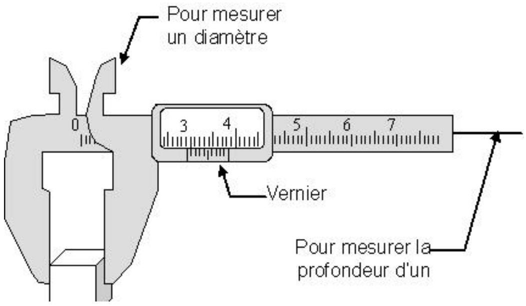
Mettre en œuvre le protocole discuté dans la partie précédente pour mesurer la viscosité du glycérol. Le rayon de la bille est à mesurer au pied à coulisse en s'aidant du document 1.

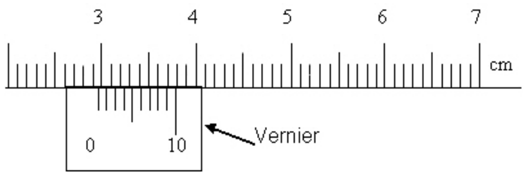
Répéter la mesure pour procéder à une estimation statistique de l'incertitude.

> *La viscosité du glycérol dépend beaucoup de la température et de son degré d'hydratation. Pour les conditions expérimentales qui nous sont accessibles, elle est de l'ordre de $1\,\mathrm{Pa \cdot s}$.*
>
> ***Attention !*** *Pour que la viscosité demeure constante tout au long du TP, vous ne rincerez rien de susceptible d'entrer dans l'éprouvette (billes et tige aimantée) avant la fin du TP.*

Étienne Thibierge, 1er décembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

Document 1 : Mesurer une longueur au pied à coulisse





Un pied à coulisse est un appareil permettant de mesurer une longueur (épaisseur, diamètre ou profondeur) avec une précision de 0,1 mm. Une telle précision est atteinte grâce à un vernier, dispositif inventé par le mathématicien Pierre Vernier au XVI^{e} siècle.

L'échelle principale sur le pied à coulisse est graduée en millimètres tandis qu'un centimètre sur le vernier est divisé en dix intervalles de 0,9 mm. Pour lire l'ouverture des mâchoires du pied à coulisse, on lit la position indiquée sur la graduation par la première ligne du vernier. La décimale suivante est donnée par la division du vernier qui coïncide avec une des graduations du pied à coulisse.

Sur l'exemple ci-contre, le zéro du vernier (premier trait vertical) correspond à la graduation 2,9 de l'échelle principale. La décimale suivante est la ligne du vernier qui coïncide avec une ligne de la graduation : ici c'est la huitième. La longueur mesurée est alors de 2,98 cm.

Adapté du site du Cégep de Sainte-Foy (Québec)

III - Solution de l'exercice

1 - La bille étant de rayon R, son poids vaut $\overrightarrow{P} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_\mathrm{a}\,\overrightarrow{g}$, et comme elle est complètement immergée la poussée d'Archimède s'exerçant sur la bille est $\overrightarrow{\Pi} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_\mathrm{g}\,\overrightarrow{g}$. Ainsi, le poids apparent, c'est-à-dire la force résultante de la poussée d'Archimède et du poids, s'écrit

$$\boxed{\overrightarrow{P}_\mathrm{app} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{\Pi} = \frac{4}{3}\pi R^3 \underbrace{(\rho_\mathrm{a} - \rho_\mathrm{g})}_{\rho'}\,\overrightarrow{g}}$$

ce qui donne un poids apparent de la forme indiquée par l'énoncé.

2 - La bille est étudiée dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, supposé galiléen. On la modélise par un point matériel de masse m, et de quantité de mouvement $\overrightarrow{p}_{/\mathcal{R}}$. Elle est soumise au poids apparent $\overrightarrow{P}_\mathrm{app}$, et à la force de Stokes $\overrightarrow{f}$. D'après le PFD,

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}_{/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{f} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho'\,\overrightarrow{g} - 6\pi\,\eta_\mathrm{g}\,R\,\overrightarrow{v}_{/\mathcal{R}}$$

Pour aboutir à l'équation différentielle vérifiée par $v = ||\overrightarrow{v}||$, il reste à projeter la loi de la quantité de mouvement sur un axe vertical z. Pour avoir $\overrightarrow{v} = +v\,\overrightarrow{e}_z$, il faut orienter l'axe vers le bas. Comme par ailleurs pour un point matériel $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$, on en déduit

$$\boxed{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_\mathrm{a} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho' g - 6\pi\,\eta_\mathrm{g}\,R\,v}$$

3 - Par définition, lorsque la vitesse limite v_lim est atteinte, la vitesse de bille demeure constante, donc

$$0 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho' g - 6\pi\,\eta\,R\,v_\mathrm{lim} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_\mathrm{lim} = \frac{2\,R^2\,\rho'\,g}{9\eta}}$$

Le temps caractéristique pour l'atteindre s'obtient en écrivant l'équation différentielle sous forme canonique,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{9\eta}{2R^2\rho_\mathrm{a}} v = \frac{\rho_\mathrm{a} - \rho_\mathrm{gl}}{\rho_\mathrm{a}} g$$

On identifie alors

$$\boxed{\tau = \frac{2R^2\rho_\mathrm{a}}{9\eta}}$$

La distance pour que cette vitesse limite soit atteinte est de l'ordre de $\delta = v_\mathrm{lim}\tau$, tout en étant inférieure : ce serait la distance parcourue pendant τ à la vitesse v_lim, mais la bille démarre plus lentement, et parcourt donc forcément moins de distance pendant la durée τ. Ainsi,

$$\boxed{\delta = \frac{4\,R^4\,\rho_\mathrm{a}\,\rho'\,g}{81\eta^2}}$$

> *En toute rigueur, pour atteindre* vraiment *la vitesse limite il faudrait un temps de chute de 5τ ou 7τ, mais nous verrons dans la suite de l'exercice que ce n'est pas crucial et que cet ordre de grandeur assez approximatif nous permet de conclure.*

4 - Supposons la vitesse limite atteinte. Pour la mesurer, il suffit de mesurer le temps de chute Δt entre deux repères distants de L, ce qui donne

$$v_\mathrm{lim} = \frac{L}{\Delta t}\,.$$

Ainsi,

$$\boxed{\eta = \frac{2\,R^2\,\rho'\,g}{9\,v_\mathrm{lim}}}$$

5 - Pour confirmer que la vitesse mesurée est bien la vitesse limite, il faut que la profondeur h du premier repère soit supérieure à la distance δ définie précédemment. Pour s'en assurer expérimentalement, on peut par exemple diviser en deux ou trois l'intervalle de longueur L et s'assurer que la bille met le même temps à parcourir chaque tronçon : c'est le signe qu'elle n'accélère plus. Un calcul simple pour le vérifier peut être d'estimer numériquement δ à partir de la valeur mesurée de viscosité.