Tutorat Optique

Étienne Thibierge [1]

Vendredi 17 octobre 2014

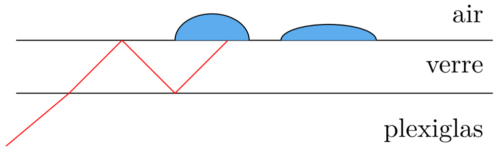
Voici une longue liste d'exercices d'optique, qui couvrent plus ou moins tous les thèmes à votre programme. Évidemment, il y en a bien trop pour être traités en une séance de TD. Au cours de la séance, nous aborderons les exercices 1, 5, 8, et 9 en priorité et l'exercice 12 s'il reste du temps. Je vous distribuerai ensuite une correction complète de tous les exercices. Venez également avec toutes vos questions, nous prendrons du temps pour y répondre.

Pour préparer la séance, le mieux que vous puissiez faire est de travailler un cours d'optique de classe prépa PCSI et PC. Vous pouvez travailler à partir de livres de la BU (celui de Marie-Noëlle Sanz est très bien), mais je vous conseillerais plutôt de travailler le cours de Matthieu Rigaut qu'il met en ligne sur son site internet [2]. C'est un cours très clair et qui explique très, très bien la physique [3].

Exercice 1 : Ordres de grandeur [◊◊◊]

- ▷ Vitesse de la lumière ;
- ▷ Champ visuel d'un œil emmétrope ;
- ▷ Temps de réponse de l'œil ;
- ▷ Temps de réponse d'une photodiode ;
- ▷ Focale d'une lentille de TP ;
- ▷ Indice optique de l'eau ;
- ▷ Indice optique d'un verre typique ;
- ▷ Longueurs d'onde du domaine visible ;
- ▷ Période de l'onde associée ;
- ▷ Longueur d'onde d'un laser HeNe ;
- ▷ Longueur d'onde moyenne du doublet du sodium ;
- ▷ Longueur d'onde de la raie verte du mercure ;
- ▷ Longueur d'onde du maximum d'émission du Soleil ;
- ▷ Longueur de cohérence temporelle d'un laser ;
- ▷ Longueur de cohérence temporelle d'une raie spectrale ;
- ▷ Puissance d'un laser ;
- ▷ Éclairement issu d'un laser.

Exercice 2 : Détecteur de pluie sur un pare-brise [♦◊◊]



De nombreux dispositifs d'aide à la conduite sont apparus ces dernières années, comme par exemple la détection automatique de pluie qui commande la mise en route des essuie-glaces.

Disposée à l'intérieur du véhicule, une diode électroluminescente (DEL) projette un faisceau lumineux sur le pare-brise. Un photocapteur mesure en permanence l'intensité de la lumière réfléchie. Le capteur de pluie pilote ainsi l'essuie-glace en fonction de la quantité d'eau détectée et sélectionne automatiquement la vitesse de balayage la plus efficace.

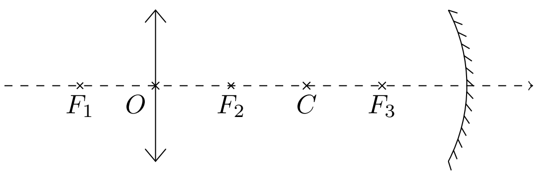
Les rayons lumineux émis par la DEL se propagent jusqu'au pare-brise dans du plexiglas d'indice optique $n_\mathrm{p} = 1{,}50$. Les rayons sont dirigés vers le pare-brise avec un angle d'incidence $\theta = 50°$. Le pare-brise est quant à lui fabriqué en verre d'indice optique $n_\mathrm{v} = 1{,}55$. L'indice optique de l'eau est $n_\mathrm{e} = 1{,}33$ et celui de l'air $n_\mathrm{a} = 1{,}00$.

1 - Existe-t-il un rayon transmis vers l'extérieur du véhicule lorsque le pare-brise est sec ?

2 - Qu'en est-il en présence de pluie ?

3 - Expliquer comment la mesure de l'intensité perçue par le photocapteur permet de connaître la quantité d'eau sur le pare-brise, et donc d'ajuster en conséquence la vitesse de balayage des essuies-glaces.

Exercice 3 : Une lentille et un miroir [♦♦◊]



Considérons le système optique représenté ci-contre. La lentille est une lentille convergente de centre O et de foyers F_1 et F_2. Le miroir est quant à lui un miroir sphérique convergent de centre optique C et foyer F_3, dont la focale est égale à celle de la lentille.

1. etienne.thibierge@ens-lyon.fr, http://perso.ens-lyon.fr/etienne.thibierge
2. http://www.matthieurigaut.net/, voir la rubrique « programme 2002 ».
3. Cette pub est complètement désintéressée, je n'ai jamais rencontré l'auteur.

La lentille et le miroir sont disposés de telle sorte que $\overline{OF_2} = \overline{F_2C} = \overline{CF_3}$.

1 - Tracer la marche d'un rayon quelconque dans le système.

2 - Par une analyse qualitative (mais rigoureuse !), trouver la position du centre optique du système.

3 - Justifier que si le système admet un foyer image, alors celui-ci est nécessairement également foyer objet. Trouver sa position par construction graphique.

4 - Établir une relation de conjugaison du système. En introduisant la position du centre optique et du foyer, déduire les caractéristiques du système optique équivalent.

Exercice 4 : Condition d'obtention des interférences [d'après agreg de chimie 2013, ♦◊◊]

Deux sources lumineuses ponctuelles S_1 et S_2 émettent deux ondes électromagnétiques monochromatiques de pulsations respectives ω_1 et ω_2. Ces deux ondes se propagent dans le vide à la vitesse c et se rencontrent en un point P de l'espace après avoir parcouru les distances $x_1 = S_1P$ et $x_2 = S_2P$. On modélise les amplitudes au point P des ondes émises par les sources S_1 et S_2 par les grandeurs scalaires

$$s_1(P,t) = a_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x_1 + \phi_1) \qquad \text{et} \qquad s_2(P,t) = a_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x_2 + \phi_2)\,, \tag{1}$$

où les coefficients a_n sont supposés positifs, n prenant les valeurs 1 et 2.

1 - Commençons par préciser la modélisation de l'onde lumineuse.
1.a **-** Interpréter les termes a_n, k_n et ϕ_n dans l'expression des fonctions scalaires.
1.b **-** Quel est le lien entre les fonctions scalaires définies équation (1) et le champ électromagnétique ?
1.c **-** La puissance lumineuse $\mathcal{P}_n(P,t)$ reçue en P de la part de la source S_n est proportionnelle au carré de l'amplitude : $\mathcal{P}_n(P,t) = K\, s_n(P,t)^2$. Pourquoi la puissance lumineuse est elle reliée au carré de l'amplitude ?

2 - Donner l'ordre de grandeur de la période d'une onde électromagnétique dans le domaine du visible. La comparer avec le temps de réponse τ de l'œil, dont on donnera également un ordre de grandeur. En déduire que l'œil placé en P n'est en fait pas sensible à la puissance instantanée qu'il reçoit mais seulement à sa valeur moyenne temporelle $\mathcal{E}(P)$, définie par

$$\mathcal{E}(P) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \mathcal{P}(P,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Comment appelle-t-on $\mathcal{E}(P)$?

3 - On pose $\phi_2 = \phi_1 + \Delta\phi$, où $\Delta\phi$ est une constante.
3.a **-** Calculer $\mathcal{E}(P)$ et montrer qu'il prend la forme

$$\mathcal{E}(P) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_{12}(P)\,.$$

3.b **-** Exprimer $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ en fonction de a_1 et a_2.
3.c **-** Justifier que $\mathcal{E}_{12}$ est non nul seulement si $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$. Dans le cas où il est non nul, déterminer alors $\mathcal{E}_{12}$ en fonction de la différence de marche $\delta = x_2 - x_1$. Comment nomme-t-on le terme $\mathcal{E}_{12}$? $\mathcal{E}$ ne dépendant de P que par l'intermédiaire de δ, on le note dans la suite $\mathcal{E}(\delta)$.
3.d **-** Tracer $\mathcal{E}$ en fonction de δ pour une pulsation ω donnée.

4 - Déterminer en fonction des amplitudes a_n l'expression du contraste

$$\Gamma = \frac{\mathcal{E}_{\max} - \mathcal{E}_{\min}}{\mathcal{E}_{\max} + \mathcal{E}_{\min}}\,,$$

où $\mathcal{E}_{\max}$ et $\mathcal{E}_{\min}$ sont les valeurs maximales et minimales de $\mathcal{E}(\delta)$. Quelle condition doivent satisfaire les amplitudes a_n pour que le contraste soit le plus grand possible ?

5 - On s'ntéresse enfin à la cohérence des deux sources S_1 et S_2, condition pour qu'elles puissant donner lieu à des interférences observables.
5.a **-** À quelle condition sur les sources S_n peut-on supposer que la différence de phase $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ est bien constante ? Si tel est le cas, les sources sont dites cohérentes.
5.b **-** Donner l'ordre de grandeur du temps sur lequel ce déphasage varie si les deux sources sont deux lampes spectrales et deux laser. Commenter.
5.c **-** Comment fait-on en pratique pour obtenir deux sources cohérentes ? On distinguera soigneusement les interféromètres à division d'amplitude de ceux à division du front d'onde.

Exercice 5 : Doublet du sodium [♦◊◊]

Un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air à faces parallèles est éclairé par une lampe à vapeur de sodium émettant deux radiations supposées de même intensité[4] et de longueur d'onde voisines λ_1 et $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$. On

4. Ce n'est pas tout à fait le cas en pratique.

Étienne Thibierge, 1er octobre 2014

note λ_0 la longueur d'onde moyenne du doublet. Une mesure à l'aide d'un réseau et d'un goniomètre donne $\lambda_1 = 589{,}0 \pm 0{,}2\,\mathrm{nm}$ et $\lambda_2 = 589{,}6 \pm 0{,}2\,\mathrm{nm}$. On souhaite améliorer la précision obtenue sur la valeur de $\Delta\lambda$. L'éclairement observé au foyer image d'une lentille convergente est enregistré par une photodiode située au centre des anneaux en fonction de l'épaisseur x de la lame d'air.

1 - Pourquoi observe-t-on au foyer image de la lentille ?

2 - Déterminer l'expression de l'éclairement $\mathcal{E}(x)$ et l'écrire sous la forme

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_0 \left[1 + \gamma(x) \cos\left(\frac{4\pi x}{\lambda_0}\right)\right] .$$

Interpréter chacun des termes, et représenter l'allure du signal délivré par la photodiode.

3 - Calculer le nombre N d'anneaux brillants entre deux anticoincidences. L'expérience permet de mesurer $N = 982$. Calculer numériquement $\Delta\lambda$.

4 - Estimer l'incertitude sur cette mesure. Quelle aurait été cette incertitude si $\Delta\lambda$ avait été estimé à l'aide des mesures faites au réseau et au goniomètre ?

5 - Le modèle étudié dans cet exercice prédit un contraste parfaitement périodique. Qu'en est-il en pratique ? Pourquoi ?

Exercice 6 : Spectroscopie par transformée de Fourier [♦♦♦]

Un interféromètre de Michelson est réglé en lame d'air et éclairé par une source lumineuse placée au foyer objet d'une lentille convergente $\mathcal{L}_1$ d'axe optique (Ox). À l'aide d'un moteur, on translate le miroir mobile à vitesse V le long de l'axe (Ox). Un détecteur, placé au foyer image d'une seconde lentille convergente $\mathcal{L}_2$ d'axe optique (Oy) délivre une tension $u = \beta\mathcal{E}$ où $\mathcal{E}$ est l'éclairement qu'il reçoit et β une constante.

1 - Pour étalonner le moteur, on éclaire l'interféromètre avec un laser HeNe, qui peut être considéré comme une source ponctuelle monochromatique émettant une radiation de longueur d'onde 632,8 nm. Montrer que la tension mesurée $u(t)$ varie sinusoïdalement. On mesure sa période $T = 0{,}10\,\mathrm{s}$. En déduire la vitesse de translation du moteur V.

On éclaire maintenant l'interféromètre par une lampe à vapeur de mercure basse pression dont on isole la raie verte, de longueur d'onde moyenne λ_0, à l'aide d'un filtre interférentiel. Cette source n'est pas monochromatique : la puissance qu'elle émet se répartit suivant les différentes radiations de fréquences ν voisines de $\nu_0 = c\lambda_0$. On définit la densité spectrale de puissance $P_\nu(\nu)$ par la relation $\mathrm{d}P(\nu) = P_\nu(\nu)\mathrm{d}\nu$ où $\mathrm{d}P(\nu)$ est la puissance rayonnée par la source dans la bande infinitésimale de fréquence $[\nu, \nu + \mathrm{d}\nu]$. D'autre part, lorsqu'une voie de l'interféromètre est occultée (pas d'interférences), l'éclairement de référence $\mathrm{d}\mathcal{E}_0(\nu)$ reçu par le détecteur dans la bande de fréquence $[\nu, \nu + \mathrm{d}\nu]$ s'écrit $\mathrm{d}\mathcal{E}_0(\nu) = K\mathrm{d}P(\nu)$ où K est une constante de proportionnalité indépendante de ν mais dépendant de la géométrie et de la transmission de l'interféromètre. On définit la densité spectrale d'éclairement de référence $\mathcal{E}_{0\nu}(\nu)$ par la relation $\mathrm{d}\mathcal{E}_{0\nu}(\nu) = \mathcal{E}_0(\nu)\mathrm{d}\nu$.

2 - Montrer que $\mathcal{E}_{0\nu}(\nu)$ est proportionnel à $P_\nu(\nu)$.

3 - Lorsque les deux voies de l'interféromètre fonctionnent, montrer que l'éclairement reçu par le détecteur s'écrit

$$\mathcal{E} = 2\int_0^{+\infty} \mathcal{E}_{0\nu}(\nu)\left[1 + \cos\left(2\pi\nu\tau\right)\right]\mathrm{d}\nu ,$$

où on pose $\tau = \delta/c$, δ étant la différence de marche au niveau du détecteur et c la vitesse de la lumière dans le vide.

4 - La lampe étant basse pression, l'élargissement de la raie est principalement dû à l'effet Doppler provenant de l'agitation thermique. Cela lui confère un profil gaussien,

$$\mathcal{E}_{0\nu}(\nu) = A\exp\left[-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{\delta\nu^2}\right] ,$$

où A et $\delta\nu \ll \nu_0$ sont des constantes. Représenter $\mathcal{E}_{0\nu}(\nu)$ en fonction de ν.

5 - Écrire l'éclairement sous la forme

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\mathrm{m}\left[1 + \gamma(\tau)\cos(2\pi\nu_0\tau)\right]$$

et donner les expressions de $\mathcal{E}_\mathrm{m}$ et $\gamma(\tau)$. On donne les intégrales suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\cos(\alpha u)\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-\alpha^2/4} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\sin(\alpha u)\,\mathrm{d}u = 0 .$$

Compte tenu de la décroissance très rapide de la fonction $\mathcal{E}_{0\nu}$ lorsque ν s'écarte de ν_0, on pourra étendre les domaines d'intégration à l'intervalle $[-\infty, +\infty]$.

6 - Représenter l'allure de la tension $u(t)$ lorsque le moteur est en marche. Comment déduire $\delta\nu$ de cet enregistrement ?

Étienne Thibierge, 1er octobre 2014

Exercice 7 : Étoile double [agreg interne 2004, ♦◊◊]

On considère un interféromètre astronomique, dont on admet qu'il est équivalent à un système de trous d'Young, distants de a, en lumière monochromatique. On observe les interférences sur un écran placé dans le plan focal image d'une lentille convergente $(\mathcal{L})$ de distance focale f'. La source lumineuse qui éclaire les trous de Young est une étoile E_1 située à l'infini dans la direction de l'axe optique de $(\mathcal{L})$, d'intensité lumineuse I_0. La longueur d'onde de la lumière émise est λ.

1 - Faire un schéma représentant les rayons lumineux qui interfèrent en un point M d'abscisse x de l'écran.

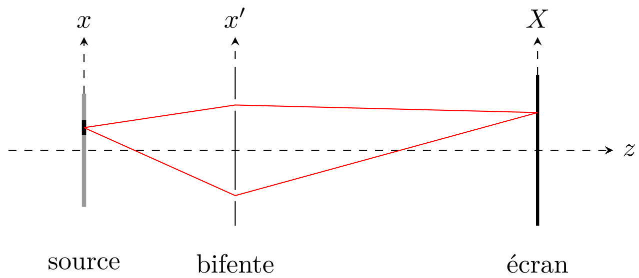
2 - On utilise la lentille dans les conditions de Gauss. Pourquoi ?

3 - Calculer la différence de marche en M en fonction de a, x et f', puis l'intensité lumineuse $I_1(x)$ en fonction de I_0, λ, a, x et f'. Définir et calculer l'interfrange.

4 - Une étoile E_2 est à l'infini dans la direction α par rapport à l'axe optique de $(\mathcal{L})$. L'angle α est très petit. Faire un schéma en représentant les rayons lumineux qui interfèrent en un point M d'abscisse x de l'écran. Calculer la différence de marche en M en fonction de a, x, f' et α, puis l'intensité lumineuse $I_2(x)$ en fonction de I_0, λ, a, x, f' et α. Commenter le résultat.

5 - On étudie l'étoile double d'Orionis dont les deux composantes E_1 et E_2 ont même éclat. E_1 et E_2 éclairent maintenant le dispositif. On augmente progressivement la distance séparant les trous de Young.
5.a **-** Justifier par une analyse qualitative rigoureuse que l'intensité devient uniforme pour certaines valeurs de a.
5.b **-** Calculer explicitement l'intensité lumineuse $I(x)$ sur l'écran. Définir le contraste, et justifier sa dénomination.
5.c **-** On prend $\lambda = 550\,\text{nm}$. La première valeur de a pour laquelle l'intensité est uniforme vaut $a_1 = 28{,}4\,\text{cm}$. Calculer α en radians.

Exercice 8 : Fentes d'Young éclairées par une source large [♦♦◊]



Considérons un dispositif de bifentes d'Young séparées d'une distance a dans la direction (Ox') et supposées infinies dans la direction orthogonale (Oy'). Ces bifentes sont éclairées par une source monochromatique située à une distance d en amont de la bifente, qui émet une intensité totale de référence I_0. La figure d'interférence est observée sur un écran situé à une distance D en aval de la bifente.

1 - En guise de calcul préliminaire, commençons par deux cas idéalisés.
1.a **-** Considérons que la source est ponctuelle, située à une distance x de l'axe du montage. Calculer l'intensité $I(X)$ mesurée sur l'écran en faisant des hypothèses (expérimentalement réalistes) sur les différentes distances.
1.b **-** Regardons maintenant un cas un tout petit peu moins parfait : celui d'une source étendue dans la direction (Oy) parallèle aux fentes. La figure sur l'écran est-elle modifiée ?

2 - Considérons maintenant le cas plus réaliste d'une source étendue, de largeur b dans la direction (Oy), centrée sur l'axe optique.
2.a **-** On définit la densité spatiale d'intensité $\mathcal{I}(x)$ émise par la source comme étant l'intensité émise par la bande élémentaire de source comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$. En supposant la source uniforme, montrer que

$$\mathcal{I}(x) = \begin{cases} I_0/b & \text{si } \; -b/2 \leq x \leq b/2\,, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.b **-** Calculer l'intensité mesurée sur l'écran. Écrire le terme d'interférences sous la forme d'un produit impliquant un terme oscillant sur l'écran et un terme de contraste. On donne la formule de trigonométrie

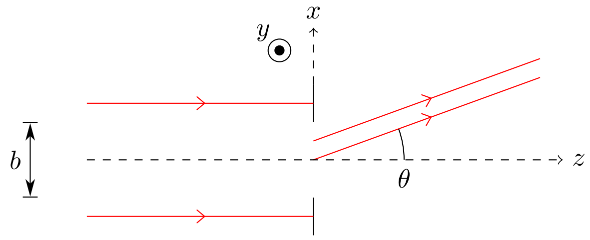
$$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) .$$

3 - Supposons que la source est obtenue en diaphragmant une source plus étendue : cela correspond à une expérience réalisable en TP. Par conséquent, le diaphragme peut être plus ou moins fermé (b variable) et déplacé (d variable). Pour simplifier, on ne tient pas compte des variations de I_0 avec b et d, mais seulement des effets d'interférence.
3.a **-** Montrer qu'il existe des valeurs particulières de b pour lesquelles le contraste est nul. Ces valeurs caractérisent des inversions de contraste : expliquer de quoi il s'agit.
3.b **-** Définir et calculer la largeur de cohérence spatiale de la source.
3.c **-** Pour une ouverture b donnée, que peut-on faire pour améliorer le contraste ? Pourquoi cette solution n'est-elle que théorique ?
3.d **-** En se basant sur la question précédente, justifier que la largeur de cohérence spatiale n'est pas la grandeur

pertinente pour quantifier la cohérence spatiale, mais qu'il est préférable d'introduire un angle de cohérence spatiale. Définir cet angle.

4 - Conclusion : à quoi sert « la fente source » que l'on met systématiquement dans un montage expérimental de fentes d'Young ?

Exercice 9 : Diffraction par une fente [agreg interne 2004, ♦◇◇]



On étudie la figure de diffraction à l'infini donnée par une fente fine rectangulaire, de centre O, de largeur b selon la direction Ox et de longueur h selon la direction Oy. On suppose $h \gg b$. La fente est éclairée en incidence normale par un faisceau parallèle d'intensité I_0.

1 - Analyse qualitative.
1.a **-** Quelle est l'allure de la figure de diffraction lorsque h est infinie ?
1.b **-** Quelle influence a la valeur finie de h ?
1.c **-** Qu'en est-il en pratique, par exemple si la fente est éclairée par un laser ?

2 - Amplitude de l'onde diffractée.
2.a **-** Énoncer le principe de Huygens-Fresnel.
2.b **-** Calculer alors l'amplitude complexe diffractée à l'infini dans la direction θ, l'origine des phases étant celle du rayon qui passe par le centre O de la fente.

3 - Intensité diffractée.
3.a **-** En déduire l'expression de l'intensité diffractée I en fonction de $\sin\theta$.
3.b **-** Tracer l'allure de I en fonction de $\sin\theta$. Quelle est la valeur de θ correspondant au premier minimum ?

Exercice 10 : Visualisation d'un écoulement par strioscopie [♦♦♦]

La strioscopie ou contraste de phase est un procédé permettant de faire apparaître de faibles variations d'indice de réfraction. On peut l'utiliser par exemple pour observer la compression de l'air lors de son écoulement autour d'une maquette d'avion.

Pour en illustrer le principe avec des calculs les plus simples possibles, nous allons considérer le cas d'un écoulement dans une canalisation transparente plane de hauteur a. L'écoulement est invariant par translation selon (Oy). L'onde incidente est monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 et se propage le long de la normale (Oz) à l'écoulement, sur lequel elle arrive en incidence normale. La compression dans l'écoulement se fait sur une épaisseur e le long de la direction (Oz). L'air y est à la pression atmosphérique partout, sauf sur une faible largeur εa, avec $\varepsilon \ll 1$. Du point de vue optique, cet écoulement est décrit par une pupille diffractante de transparence complexe $\underline{t}(x)$ valant

$$\underline{t}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |x| > a/2\,; \\ \exp\left[-\mathrm{i}\phi_0\right] & \text{pour } -a/2 \leq x < -\frac{1}{2}\varepsilon a \text{ et } \frac{1}{2}\varepsilon a < x \leq a/2\,; \\ \exp\left[-\mathrm{i}(\phi_0 + \delta\phi)\right] & \text{pour } -\frac{1}{2}\varepsilon a \leq x \leq \frac{1}{2}\varepsilon a \end{cases}$$

Ainsi, en notant n l'indice de l'air à la pression atmosphérique et $(1+\eta)n, \eta \ll 1$ celui de l'air ayant subi une compression, ϕ_0 et $\delta\phi$ ont pour expression

$$\phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\,n\,e \qquad \text{et} \qquad \delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\,\eta\,n\,e\,.$$

Nous supposons η suffisamment petit pour assurer $\delta\phi \ll 1$.

1 - Déterminer l'amplitude complexe diffractée à l'infini par une fente parfaitement transparente, de largeur a, pour une observation à l'infini se faisant dans la direction $\vec{u} = (\alpha, 0, \gamma)$, où $\alpha \ll 1$ et $\vec{u}$ est un vecteur unitaire.

2 - Donner l'expression de l'amplitude complexe diffractée par l'écoulement pour une observation à l'infini se faisant dans la direction $\vec{u} = (\alpha, 0, \gamma)$. Calculer cette amplitude en utilisant le résultat de la première question.

3 - Calculer l'éclairement $\mathcal{E}(X)$ que l'on observe en un point M d'abscisse X situé dans le plan focal image d'une lentille convergente (L) de distance focale f située en aval de l'écoulement.

4 - Quelle est la largeur de la tâche de diffraction qui correspondrait à chacun des deux termes de $\mathcal{E}(X)$? Comparer leur amplitude relative.

5 - On place au foyer de la lentille (L) un rectangle opaque de grande dimension suivant (Oy) et de largeur $2\lambda f/a$. Qu'observe-t-on sur un écran disposé dans le plan conjugué de l'écoulement par (L) ? Conclure.

Exercice 11 : Spectroscopie à réseau [agreg interne 2004, ♦♦◊]

Considérons un réseau de transmission plan, de largeur utile L, possédant $n = 600$ traits par millimètre. Notons N le nombre total de traits éclairés et a la distance entre deux traits consécutifs. Ce réseau est éclairé par un faisceau parallèle d'incidence θ_i, monochromatique de longueur d'onde λ. Ce faisceau provient d'une fente d'entrée considérée comme infiniment fine, parallèle aux traits du réseau, située dans le plan focal objet d'une lentille convergente. On appelle θ_p l'angle correspondant au maximum d'ordre p.

1 - Calculer la différence de marche δ entre les rayons issus de deux traits consécutifs qui parviennent en un même point de l'écran. En déduire la relation des réseaux pour l'ordre p.

2 - On utilise ce réseau pour étudier la rayonnement d'une lampe à vapeur de sodium, dont les différentes raies sont à des longueurs d'onde comprises entre 449,4 nm et 819,5 nm.
***2.a* -** Déterminer, en incidence normale, les ordres complètement visibles.
***2.b* -** Définir le recouvrement d'ordre. À partir de quel ordre observe-t-on un recouvrement dans le cas de la lampe étudiée ?

3 - On cherche maintenant à déterminer le pouvoir de résolution du réseau. Celui-ci est limité par la diffraction due à la largeur utile du faisceau. On admet le critère de Rayleigh : deux radiations de longueurs d'onde respectives λ et $\lambda + \Delta\lambda$ sont séparées si le maximum de l'une se trouve au delà du premier minimum de la figure de diffraction de l'autre. Le pouvoir de résolution est alors défini par $\Delta\lambda$ à la limite de séparation

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}\,.$$

***3.a* -** En utilisant la formule des réseaux, exprimer la relation entre les éléments différentiels $\mathrm{d}\theta_p$ et $\mathrm{d}\lambda$.
***3.b* -** Déterminer la largeur du faisceau dans la direction θ_p sortant du réseau et calculer la demi-largeur angulaire $\mathrm{d}\theta$ de la tache de diffraction associée.
***3.c* -** En déduire la pouvoir de résolution du réseau. Dans quelles conditions est-il maximal ?
***3.d* -** Question complémentaire : en TP, quel est le facteur limitant le pouvoir de résolution ? Pourquoi l'énoncé est-il maladroit ?

4 - L'intensité n'est pas la même dans les différents ordres. Expliquer brièvement. Quel type de réseau permet d'obtenir simultanément un bon pouvoir de résolution et une bonne luminosité ?

Exercice 12 : Lames à retard [♦♦◊]

Une lame à retard est une lame anisotrope fabriqué à partir d'un matériau polymère étiré. Son indice de réfraction dépend de la direction de polarisation de l'onde électromagnétique qui le traverse. Le matériau dans lequel la lame est fabriquée est uniaxe, c'est-à-dire qu'il possède un axe dit « extraordinaire » : une onde polarisée selon cet axe voit un indice différent d'une onde polarisée dans le plan orthogonal. Les indices associés sont appelés indice extraordinaire n_e et indice ordinaire n_o. La biréfringence de la lame est la quantité $\Delta n = n_\mathrm{e} - n_\mathrm{o}$. Une lame à retard est fabriquée de telle sorte que l'axe extraordinaire soit parallèle aux faces de la lame.

Considérons une onde électromagnétique plane progressive harmonique se propageant dans la direction z normale aux faces de la lame. On choisit de noter y l'axe extraordinaire.

1 - Une lame demi onde est une lame qui ajoute un déphasage de π entre les composantes E_x et E_y de l'onde électromagnétique.
***1.a* -** Déterminer, en fonction notamment de la longueur d'onde dans le vide λ_0 de l'onde incidente, l'épaisseur L de lame qui doit être traversée pour réaliser une lame demi-onde. Calculer la plus petite valeur de L qui convient pour une onde dans le domaine visible et $\Delta n = 10^{-4}$.
***1.b* -** Justifier l'appellation « demi-onde » de la lame.
***1.c* -** Expliquer pourquoi une telle lame n'est demi-onde que pour une longueur d'onde donnée.

2 - Une onde lame quart d'onde provoque un déphasage de $\pm\pi/2$. Calculer la nouvelle épaisseur minimale et justifier le nom de la lame.

3 - Supposons l'onde polarisée rectilignement et en incidence normale sur la lame demi-onde. Notons α l'angle entre la direction de polarisation et l'axe x. Décrire l'état de polarisation de l'onde issue de la lame demi-onde. Justifier la dénomination « lignes neutres » donnée aux axes rapide et lent.

4 - La même onde arrive sur une lame quart d'onde. Décrire l'état de polarisation en sortie en fonction de α. Cela implique de déterminer le cas échéant si la polarisation est droite ou gauche.

Étienne Thibierge, 1er octobre 2014

Exercice 13 : Couleur observée en sortie d'une lame biréfringente [♦♦♦]

Bien que ce ne soit pas indispensable, il est conseillé de chercher d'abord l'exercice 12 avant celui-ci.

Le quartz est un cristal anisotrope uniaxe : son indice de réfraction dépend de la direction de polarisation de l'onde électromagnétique qui le traverse. Sa structure cristalline possède un axe dit « extraordinaire » : une onde polarisée selon cet axe verra un indice différent d'une onde polarisée dans le plan orthogonal. Les indices associés sont appelés indice extraordinaire n_e et indice ordinaire n_o. On appelle biréfringence la quantité $\Delta n = n_\mathrm{e} - n_\mathrm{o}$, qui vaut 9×10^{-3} pour le quartz.

Considérons une lame de quartz d'épaisseur $e = 40\,\mu\mathrm{m}$, taillée de telle sorte que l'axe extraordinaire soit parallèle aux faces de la lame. La lame est placée entre un polariseur et un analyseur. Elle est éclairée en incidence quasi-parallèle par une source de lumière blanche. Notons z la direction de propagation de la lumière, et y celle de l'axe extraordinaire.

1 - Les termes « axe rapide » et « axe lent » sont utilisés pour ce type de lame. Attribuer ces qualificatifs aux axes x et y. Ces axes sont également appelés « lignes neutres » de la lame car seules les ondes polarisées rectilignement selon un de ses axes voient leur état de polarisation préservé en sortie de la lame, voir exercice 12.

2 - Le polariseur et l'analyseur sont orientés selon l'axe x. Quelle est la couleur observée sur l'écran ? Même question s'ils sont tous deux orientés selon l'axe y, et si ils sont orientés l'un selon l'axe x et l'autre selon l'axe y.

3 - On tourne le polariseur pour le placer à 45° des lignes neutres de la lame. Quelle est la couleur observée sur l'écran si le polariseur et l'analyseur sont croisés ? Même question s'ils sont parallèles ? Comment ces deux couleurs sont-elles reliées l'une à l'autre ?

4 - Si la lame est plus épaisse, par exemple $e = 400\,\mu\mathrm{m}$, on observe du blanc sur l'écran dans les deux situations envisagées à la question précédente. Expliquer.

On rappelle les formules de trigonométrie

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \text{et} \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

Étienne Thibierge, 1er octobre 2014