Un exercice de physique appliquée aux enjeux climatiques et énergétiques

Mécanique des fluides

Rendement d'une éolienne

De par sa grande façade maritime, la France possède le deuxième gisement éolien européen après la Grande-Bretagne. Fin 2022, le parc éolien français atteint une puissance installée d'environ 20 GW, ce qui correspond à 6 à 7 % du mix électrique, auxquels s'ajouteront prochainement environ 15 GW de projets en cours d'instruction. Cet exercice aborde la question du rendement d'une éolienne, dont on va montrer qu'il ne peut dépasser une borne supérieure appelée limite de Betz.

Considérons une éolienne occupant une surface frontale S_0. L'écoulement de l'air est supposé parfait, stationnaire, incompressible, unidimensionnel parallèlement à l'axe (Ox). On raisonne sur le tube de courant représenté figure 1 qui traverse le rotor de l'éolienne. Les deux sections S et S' sont supposées suffisamment éloignées du rotor pour que la pression y soit égale à la pression atmosphérique au repos P_0, comme partout autour du tube de courant considéré. On note S_1 et S_2 les deux sections immédiatement en amont et en aval du rotor, supposées suffisamment proches pour avoir $S_1 = S_2 = S_0$. Les vitesses et les pressions s'entendent comme des moyennes spatiales et temporelles sur la section considérée.

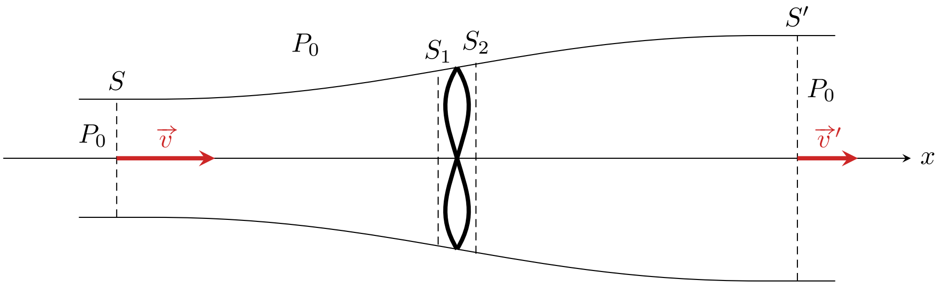

Figure 1 – Tube de courant entourant l'éolienne.

A - Puissance cédée au rotor de l'éolienne

1 - Justifier qualitativement l'allure du tube de courant représenté figure 1.

2 - Montrer qu'il y a égalité des vitesses dans les sections S_1 et S_2. On note v_0 la vitesse correspondante, dont on admet pour le moment (démonstration partie C) qu'elle est reliée à v et v' par

$$v_0 = \frac{v + v'}{2}\,.$$

3 - En utilisant la relation de Bernoulli généralisée, montrer que la puissance reçue par le rotor de l'éolienne peut s'écrire

$$\mathcal{P} = \frac{1}{4}\,\rho\, S_0\,(v + v')\,(v^2 - v'^2)\,.$$

B - Limite de Betz

Du fait de l'écoulement, une surface S est traversée par une certaine masse d'air δm pendant une durée $\mathrm{d}t$. Chaque particule fluide possédant une énergie cinétique, à ce flux de matière est associé un flux d'énergie cinétique δE_c. En se ramenant à l'unité de temps, on appelle $\delta E_\mathrm{c}/\mathrm{d}t$ la puissance cinétique du vent au travers de la section S.

4 - De façon générique, montrer que la puissance cinétique du vent au travers d'une surface S est reliée à la vitesse v d'écoulement et au débit massique D_m au travers de cette surface par

$$\mathcal{P}_\mathrm{cin} = \frac{1}{2} D_\mathrm{m} v^2\,.$$

Le rendement ou coefficient de puissance de l'éolienne est conventionnellement défini comme le rapport entre la puissance $\mathcal{P}$ cédée au rotor et la puissance cinétique $\mathcal{P}_\mathrm{cin}$ du vent au travers d'une surface S_0, égale à celle de l'éolienne, mais à la vitesse v de l'écoulement *non perturbé*.

5 - Justifier qualitativement cette convention de définition du rendement.

6 - Montrer que le rendement de l'éolienne peut s'écrire sous la forme

$$\eta = \frac{1}{2}(1+x)^2(1-x) \qquad \text{avec} \qquad x = \frac{v'}{v}\,.$$

7 - Montrer que ce rendement passe par un optimum η_{max}, appelé limite de Betz, pour une valeur de x à déterminer. Calculer η_{max}.

8 - En pratique, la vitesse de sortie v' n'est pas directement contrôlable dans le dimensionnement d'une éolienne. Sur quel(s) paramètre(s) peut-on jouer néanmoins pour optimiser le rendement ?

Les nombreuses hypothèses simplificatrices du calcul font de la limite de Betz un maximum théorique, non atteignable en pratique. Les éoliennes modernes parviennent à atteindre jusqu'à 75 % de la limite de Betz dans les conditions de vent optimales.

C - Vitesse d'écoulement au niveau de l'éolienne

Cette dernière partie a pour objectif de démontrer la relation admise à la question 2 : au niveau de l'éolienne, la vitesse moyenne d'écoulement vaut

$$v_0 = \frac{v+v'}{2}\,.$$

La démarche consiste à exprimer de deux façons différentes la force $\overrightarrow{F}$ exercée par le vent sur le rotor de l'éolienne, et à identifier ces deux expressions.

9 - Exprimer les pressions P_1 et P_2 au niveau des sections S_1 et S_2. En déduire que la force exercée par le vent sur le rotor de l'éolienne s'écrit

$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{2}\rho S_0(v^2 - v'^2)\,\overrightarrow{e}_x\,.$$

La deuxième expression s'obtient à partir d'un bilan de quantité de mouvement pour le système ouvert Σ_0 défini la masse d'air appartenant au tube de courant étudié délimité par les deux sections S et S'. La démarche est sensiblement analogue à celle nous ayant permis de démontrer la relation de Bernoulli, si ce n'est que l'on raisonne sur la quantité de mouvement $\overrightarrow{p}$ au lieu de l'énergie mécanique.

Considérons sur une durée infinitésimale dt. Partant du système ouvert Σ_0, on se ramène à un système fermé $\Sigma^\star$ en lui adjoignant la masse de fluide δm entrant dans Σ_0 pendant dt. Toutes les grandeurs relatives au système fermé sont indiquées par une étoile.

10 - Justifier qu'une même masse de fluide δm sort de Σ_0 pendant dt. Faire un schéma sur lequel apparaissent clairement Σ_0 et le système fermé $\Sigma^\star$ aux deux instants t et $t + \mathrm{d}t$.

11 - Exprimer séparément $\overrightarrow{p}^\star(t)$ et $\overrightarrow{p}^\star(t+\mathrm{d}t)$ et en déduire que

$$\overrightarrow{p}^\star(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{p}^\star(t) = D_{\mathrm{m}}(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}')\,\mathrm{d}t\,.$$

12 - Avec le théorème de la résultante cinétique, montrer que $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}^\star}{\mathrm{d}t} = -\overrightarrow{F}$ et déduire une seconde expression de $\overrightarrow{F}$.

13 - Conclure sur l'expression de v_0 par identification des deux expressions obtenues aux questions 9 et 12.

Éléments de correction

A - Puissance cédée au rotor de l'éolienne

1 L'écoulement est horizontal, et la pression est la même au niveau des surfaces S et S'. Ainsi, l'énergie prélevée à l'écoulement d'air par l'éolienne est forcément de type cinétique. On a donc $v' < v$, et la conservation du débit le long du tube de courant impose

$$vS = v'S' \qquad \text{donc} \qquad S' = \frac{v}{v'}S > S\,.$$

Il est donc logique que le tube de courant s'élargisse.

> *Attention, contrairement au cas d'un écoulement en conduite, les surfaces S et S' sont ici inconnues, et dépendent des vitesses v et v' du vent avant et après l'éolienne. On obtient donc des informations sur les sections à partir de connaissances sur les vitesses.*

2 Par conservation du débit, sachant que $S_1 = S_2 = S_0$, on a directement égalité des vitesses au niveau des deux sections S_1 et S_2.

3 Utilisons la relation de Bernoulli généralisée entre les sections S et S', en notant $\mathcal{P}$ la puissance cédée par l'écoulement au rotor de l'éolienne :

$$D_\mathrm{m}\left[\left(\cancel{\frac{P_0}{\rho}} + \frac{v'^2}{2} + \cancel{gz'}\right) - \left(\cancel{\frac{P_0}{\rho}} + \frac{v^2}{2} + \cancel{gz}\right)\right] = -\mathcal{P}$$

En exprimant le débit massique D_m au niveau de l'éolienne, on a

$$D_\mathrm{m} = \rho S_0 v_0 = \rho S_0 \frac{v+v'}{2}\,,$$

ce qui donne

$$\mathcal{P} = \rho S_0 \frac{v+v'}{2} \times \left(\frac{v^2}{2} - \frac{v'^2}{2}\right)$$

et ainsi

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{1}{4}\,\rho\, S_0\,(v+v')\,(v^2 - v'^2)\,.}$$

B - Limite de Betz

4 Par définition du débit massique, la masse d'air traversant S s'écrit

$$\delta m = D_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t\,.$$

En considérant que toutes les particules fluides formant la masse δm ont la même vitesse v égale à la vitesse de l'écoulement (hypothèse d'écoulement parfait), alors l'énergie cinétique de la masse d'air vaut

$$\delta E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}\,\delta m\, v^2 = \frac{1}{2}\,D_\mathrm{m}\, v^2\,\mathrm{d}t\,.$$

On obtient alors le résultat annoncé,

$$\boxed{\mathcal{P}_\mathrm{cin} = \frac{1}{2}\,D_\mathrm{m}\, v^2\,.}$$

5 La puissance cinétique du vent non perturbé est la puissance maximale qu'il est possible de récupérer au niveau de l'éolienne, ce qui justifie la définition.

6 La puissance cinétique de référence vaut

$$\mathcal{P}_\mathrm{cin} = \frac{1}{2} \times \rho S_0 v \times v^2 = \frac{1}{2}\rho S_0 v^3\,.$$

Ainsi, le rendement s'écrit

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{\frac{1}{4}\,\rho\,S_0\,(v+v')\,(v^2-{v'}^2)}{\frac{1}{2}\rho S_0 v^3}\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{v+v'}{v}\times\frac{v^2-{v'}^2}{v^2}\\ &= \frac{1}{2}\,(1+x)\times(1-x^2)\\ &= \frac{1}{2}\,(1+x)\times(1+x)(1-x)\end{aligned}$$

$$\boxed{\eta = \frac{1}{2}(1+x)^2(1-x)\,.}$$

7 La dérivée s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{2}\left[(1+x)^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x)+(1-x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x)^2\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[-(1+x)^2+(1-x)\times 2(1+x)\right]\\ &= \frac{1}{2}(1+x)\left(-(1+x)+2(1-x)\right)\\ \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{2}(1+x)(1-3x)\end{aligned}$$

La quantité x étant forcément comprise entre 0 et 1, le seul zéro pertinent de la dérivée est pour $x = 1/3$, valeur pour laquelle on a

$$\eta_{\text{opt}} = \frac{1}{2}\times\frac{4^2}{3^2}\times\frac{2}{3} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\eta_{\text{opt}} = \frac{16}{27} \simeq 0{,}59\,.}$$

8 La vitesse de sortie dépend directement de la vitesse de rotation des pales, qui résulte d'un équilibre entre le couple aérodynamique exercé par l'écoulement d'air sur l'éolienne et le couple de freinage électromagnétique résultant de la rotation de la génératrice. Ainsi, pour contrôler indirectement v', il faut **jouer sur la charge électrique vue par la génératrice** se trouvant dans l'éolienne.

C - Vitesse d'écoulement au niveau de l'éolienne

9 Appliquons le théorème de Bernoulli entre les sections S et S_1. L'éolienne ne faisant *pas* partie de ce volume de contrôle, on a directement

$$\frac{P_0}{\rho}+\frac{v^2}{2}+\cancel{gz} = \frac{P_1}{\rho}+\frac{{v_0}^2}{2}+\cancel{gz} \qquad \text{soit} \qquad P_1 = P_0+\frac{1}{2}\rho(v^2-{v_0}^2)\,.$$

De même, le théorème de Bernoulli appliqué entre S_2 et S' donne

$$P_2 = P_0+\frac{1}{2}\rho({v'}^2-{v_0}^2)\,.$$

Considérons un volume de contrôle compris entre les sections S_1 et S_2, englobant l'éolienne. Une face est soumise à la pression P_1, l'autre à la pression P_2, et le pourtour à la pression P_0. Les forces pressantes exercées sur le pourtour s'annulent par symétrie, et il reste finalement

$$\vec{F} = P_1 S_0\,\vec{e}_x - P_2 S_0\,\vec{e}_x = (P_1-P_2)S_0\,\vec{e}_x$$

ce qui donne bien

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{2}\rho S_0(v^2-{v'}^2)\,\vec{e}_x\,.}$$

10 En régime stationnaire, la masse du volume de contrôle est constante : l'entrée d'une masse δm doit forcément être compensée par la sortie d'une masse égale. Schéma représenté figure 2.

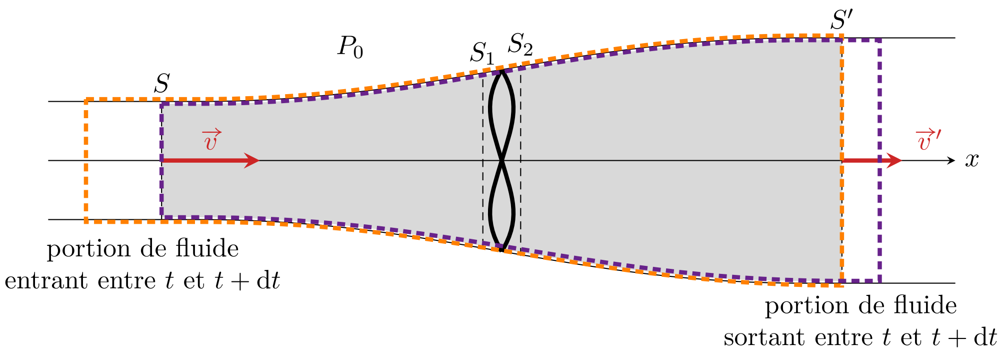

Figure 2 – **Schéma du système fermé.** Le volume de contrôle Σ_0 est coloré en gris, le système fermé $\Sigma^\star$ délimité par les pointillés épais. La position du système fermé à l'instant t est représentée en orange, celle à $t + \mathrm{d}t$ en violet.

11 À l'instant t, la quantité de mouvement de Σ_0 s'ajoute à celle du fluide entrant,

$$\vec{p}^{\,\star}(t) = \vec{p}_0(t) + \delta m \vec{v}\,.$$

À l'instant $t + \mathrm{d}t$, il faut cette fois considérer celle du fluide sortant,

$$\vec{p}^{\,\star}(t + \mathrm{d}t) = \vec{p}_0(t + \mathrm{d}t) + \delta m \vec{v}\,'\,.$$

Or par stationnarité la quantité de mouvement du système ouvert $\vec{p}_0$ est constante. Par soustraction des deux égalités, on aboutit directement à

$$\boxed{\vec{p}^{\,\star}(t + \mathrm{d}t) - \vec{p}^{\,\star}(t) = D_\mathrm{m}(\vec{v}\,' - \vec{v}\,)\,\mathrm{d}t\,.}$$

12 Le système fermé est soumis à la force exercée par l'éolienne sur l'air, égale à $-\vec{F}$ d'après le principe des actions réciproques. Par ailleurs, le tube de courant est une surface fermée soumise à une pression uniforme P_0 : la résultante des forces pressantes est nulle par symétrie. Ainsi, le théorème de la résultante cinétique appliqué au système fermé s'écrit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}^{\,\star}}{\mathrm{d}t} = -\vec{F}\,.}$$

Par ailleurs, en utilisant la formule de Taylor dans le résultat de la question précédente, il vient

$$\cancel{\vec{p}^{\,\star}(t)} + \frac{\mathrm{d}\vec{p}^{\,\star}}{\mathrm{d}t}\cancel{\mathrm{d}t} - \cancel{\vec{p}^{\,\star}(t)} = D_\mathrm{m}(\vec{v}\,' - \vec{v}\,)\cancel{\mathrm{d}t} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}^{\,\star}}{\mathrm{d}t} = D_\mathrm{m}(\vec{v}\,' - \vec{v}\,)\,.}$$

On en déduit finalement

$$\boxed{\vec{F} = -D_\mathrm{m}(\vec{v}\,' - \vec{v}\,) = -D_\mathrm{m}(v' - v)\,\vec{e}_x\,.}$$

13 En identifiant les deux expressions de la force $\vec{F}$, il vient

$$\begin{aligned}
-D_\mathrm{m}(v' - v) &= \frac{1}{2}\rho S_0 (v^2 - v'^2) \\
-\cancel{\rho S_0} v_0 (v' - v) &= \frac{1}{2}\cancel{\rho S_0}(v - v')(v + v') \\
v_0 \cancel{(v - v')} &= \frac{1}{2}\cancel{(v - v')}(v + v')
\end{aligned}$$

ce qui donne bien le résultat annoncé

$$\boxed{v_0 = \frac{v + v'}{2}\,.}$$

> *Pour aller plus loin sur cette thématique, avec en particulier une discussion plus approfondie des hypothèses, on pourra se reporter à l'épreuve de Physique-Chimie 2016 du concours d'entrée à l'ENS Lyon filière PC [1].*

Bibliographie

[1] *Étude d'une éolienne*. Concours d'admission 2016 à l'ENS Lyon, épreuve de physique-chimie, filière PC. URL : https://banques-ecoles.fr/cms/wp-content/uploads/2016/04/16_pc_suj_phychi.pdf.