Un exercice de physique appliquée aux enjeux climatiques et énergétiques

Thermodynamique industrielle

Puits canadien

inspiré exemple officiel oral CCINP PSI

On étudie un puits canadien, qui est un système de préchauffage passif de l'air utilisant l'inertie thermique du sol. Il s'agit d'une simple conduite enterrée à environ 2 m de profondeur dans laquelle transite l'air utilisé pour le renouvellement de l'habitation, comme schématisé figure 1. Sous nos latitudes, la température moyenne du sol vaut environ 11 °C et ses variations sont relativement faibles à la profondeur où est enterré le tuyau. Ce faisant, un puits canadien permet non seulement de réchauffer l'air entrant dans la maison en hiver, mais aussi de le rafraîchir en été, permettant de se passer de système de climatisation. Cette technique est de plus en plus utilisée en construction neuve, mais reste difficilement accessible en rénovation à cause des travaux de terrassement qu'elle exige.

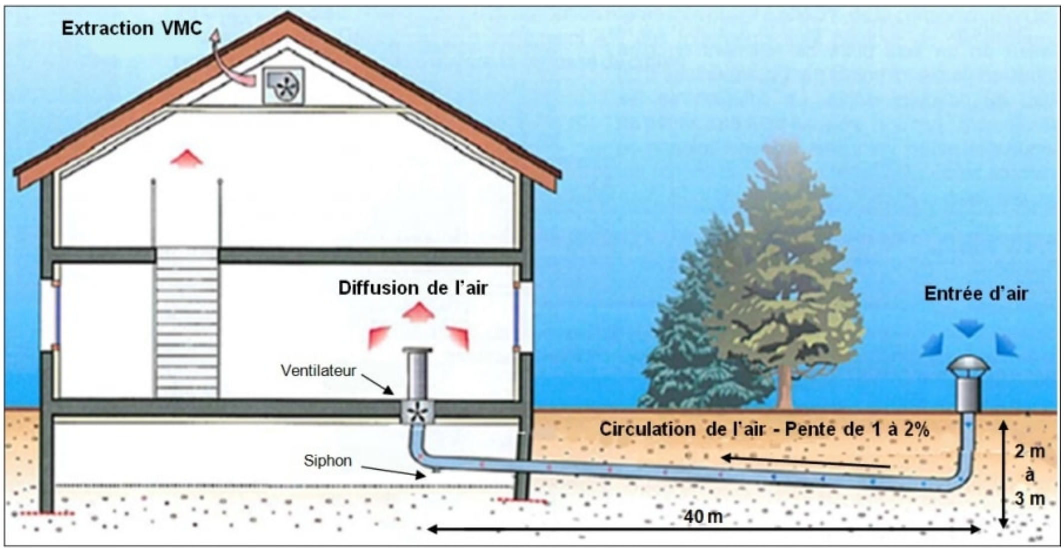

Figure 1 – Principe du préchauffage à l'aide d'un puits canadien.

On suppose l'air dans la conduite en écoulement stationnaire incompressible. L'air qui circule dans le tuyau horizontal reçoit de la chaleur de la part du sol, de température supposée constante, et on note

$$\mathrm{d}\Phi = \alpha\,\mathrm{d}x\,(T_{\mathrm{sol}} - T(x))$$

le flux thermique (puissance thermique) reçu par un élément de longueur $\mathrm{d}x$.

1 - Quelle est la dimension de α ?

2 - En effectuant un bilan d'énergie en régime stationnaire sur un système élémentaire qu'on précisera, montrer que la température de l'air à l'intérieur du tuyau horizontal est solution de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} + \frac{T(x)}{\ell_0} = \frac{T_{\mathrm{sol}}}{\ell_0}$$

où ℓ_0 s'exprime en fonction de D_{m}, débit massique de l'air, c_P capacité thermique massique de l'air, et du coefficient α.

3 - Résoudre cette équation différentielle. On appelle T_{ext} la température de l'air extérieur. Quelle est la température maximale que peut atteindre l'air à l'intérieur du tuyau ? Commenter l'intérêt du puits canadien. Est-il utile en toute saison ?

4 - En déduire la puissance thermique économisée sur le chauffage de l'habitation lorsque l'air a parcouru une longueur L de tuyau.

BY-NC-SA

On considère le réseau expérimental de courbes $\Phi = f(L)$ donné figure 2, obtenu pour une température du sol $T_{\text{sol}} = 11\,°\text{C}$ et une température d'entrée de l'air $T_{\text{ext}} = -5\,°\text{C}$. D est le diamètre du tuyau, $Q = D_{\text{m}}/\mu$ le débit volumique de l'écoulement d'air.

5 - Justifier que le palier atteint ne dépend que du débit volumique Q. Comment, à l'aide de ces courbes, accéder à la valeur numérique de ℓ_0 ? Comment justifier, pour un débit donné, l'existence d'un réseau de courbes qui varient en fonction du diamètre D du tuyau ?

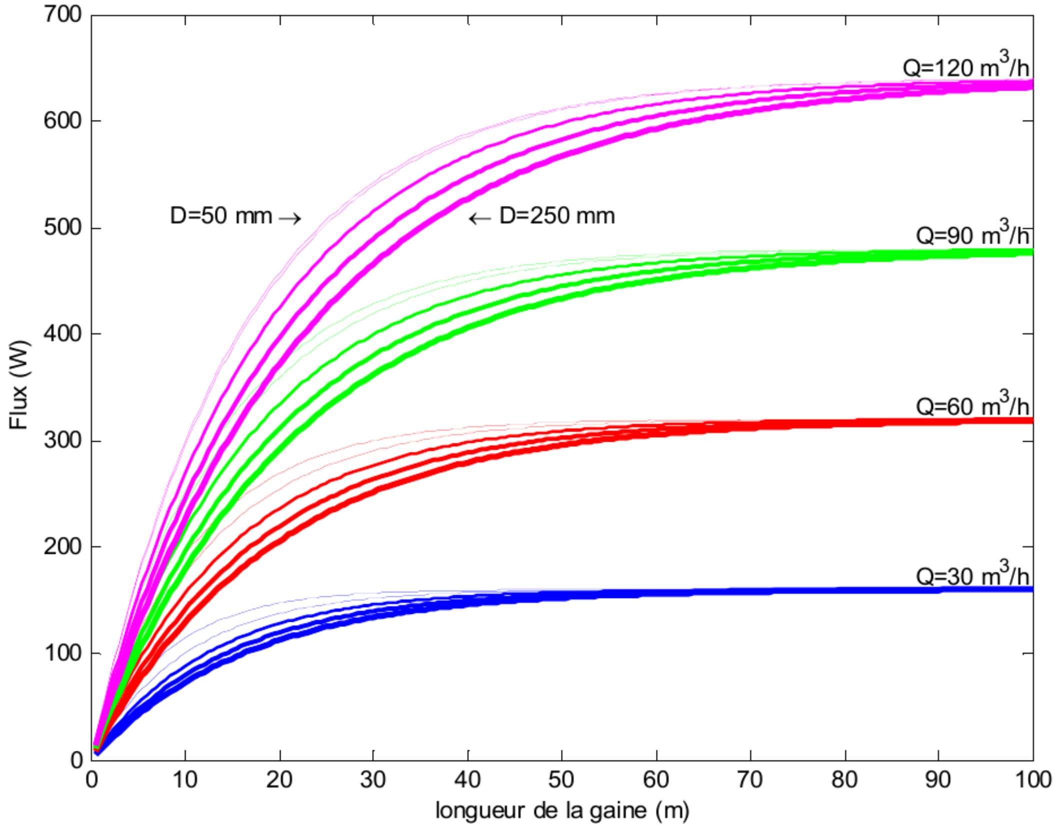

Figure 2 – Relevés expérimentaux.

BY-NC-SA

Éléments de correction

1 La constante α s'exprime en $\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-1}}$. En dimensions fondamentales,

$$[\alpha] = M\,L^2\,T^{-3}\times\Theta^{-1}\times L^{-1} \qquad \text{soit} \qquad [\alpha] = M\,L\,\Theta^{-1}\,T^{-3}\,.$$

2 Appliquons le premier principe à un tronçon de tuyau de longueur $\mathrm{d}x$. On néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle, et ce tuyau ne contient pas de pièce mobile, donc

$$D_\mathrm{m}\,[h(x+\mathrm{d}x)-h(x)] = \mathrm{d}\Phi \qquad \text{soit} \qquad D_\mathrm{m}\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \alpha\,\mathrm{d}x\,[T_\mathrm{sol}-T(x)]$$

En utilisant la loi de Joule et en simplifiant par $\mathrm{d}x$, il vient

$$D_\mathrm{m}\,c_P\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} + \alpha\,[T(x)-T_\mathrm{sol}] = 0$$

et ainsi

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} + \frac{\alpha}{D_\mathrm{m}\,c_P}T(x) = \frac{\alpha}{D_\mathrm{m}\,c_P}T_\mathrm{sol} = 0}$$

ce qui est bien la forme demandée avec $\ell_0 = D_\mathrm{m}c_P/\alpha$.

3 Les solutions de cette équation s'écrivent

$$T(x) = T_\mathrm{sol} + A\,\mathrm{e}^{-x/\ell_0}\,.$$

À l'entrée du tuyau,

$$T(x{=}0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CL}}}{=} T_\mathrm{ext} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} T_\mathrm{sol} + A$$

d'où on conclut

$$\boxed{T(x) = T_\mathrm{sol} + (T_\mathrm{ext}-T_\mathrm{sol})\,\mathrm{e}^{-x/\ell_0}\,.}$$

Au maximum, l'air au sein du tuyau atteint la température T_sol. On comprend ainsi qu'un puits canadien est **intéressant en hiver** (l'air qui entre est plus chaud que l'air extérieur, ce qui permet de gagner en chauffage) **et en été** (l'air qui entre permet de rafraîchir l'intérieur, ce qui permet par exemple de se passer de climatisation). En revanche, il est **inutile voire gênant au printemps et en automne** (mieux vaut faire rentrer de l'air extérieur à 14 °C plutôt de l'air à 11 °C pour un gain en confort, voire en chauffage).

4 La question consiste à calculer la puissance reçue par l'air de la part du sol, qui est autant de puissance que le système de chauffage de la maison n'a pas à fournir. Cette puissance s'écrit

$$\Phi = \int_0^L \mathrm{d}\Phi = \int_0^L \alpha(T_\mathrm{sol}-T(x))\mathrm{d}x$$

D'après la question précédente,

$$\Phi = \alpha(T_\mathrm{ext}-T_\mathrm{sol})\int_0^L \mathrm{e}^{-x/\ell_0}\,\mathrm{d}x = \alpha(T_\mathrm{ext}-T_\mathrm{sol})\left[-\ell_0\,\mathrm{e}^{-x/\ell_0}\right]_0^L$$

ce qui donne finalement

$$\boxed{\Phi = \alpha(T_\mathrm{ext}-T_\mathrm{sol})\,\ell_0\left(1-\mathrm{e}^{-L/\ell_0}\right) = D_\mathrm{m}\,c_P\,(T_\mathrm{ext}-T_\mathrm{sol})\left(1-\mathrm{e}^{-L/\ell_0}\right)\,.}$$

> *Le résultat peut également s'obtenir en appliquant le premier principe industriel directement entre l'entrée ($x=0$) et la sortie ($x=L$) de la conduite :*
>
> $$D_m(h_s-h_e) = D_m c_P\,[T(x{=}L)-T(x{=}0)] = \Phi + \cancel{P_m}$$
>
> *ce qui donne*
>
> $$\Phi = D_m c_P\left[T_{sol} + (T_{ext}-T_{sol})\,\mathrm{e}^{-L/\ell_0} - T_{ext}\right]$$
>
> *et on retrouve exactement la même expression après factorisation.*

5 Au bout d'une longueur L suffisamment élevée,

$$\Phi \simeq D_{\mathrm{m}}\, c_P \left(T_{\mathrm{ext}} - T_{\mathrm{sol}}\right).$$

La température extérieure étant uniforme, Φ ne dépend plus que de D_{m}, qui est directement proportionnel au débit volumique Q car l'écoulement d'air est incompressible.

La longueur caractéristique ℓ_0 peut par exemple se déterminer graphiquement en raisonnant sur l'intersection de la tangente à l'origine et de l'asymptote. En ordre de grandeur, on trouve $\ell_0 \simeq 20\,\mathrm{m}$.

Le réseau de courbe diffère par la longueur caractéristique d'augmentation de Φ, c'est-à-dire ℓ_0. Le diamètre intervient dans le coefficient α : l'échange est de type conducto-convectif, directement proportionnel à la surface d'échange, elle-même proportionnelle au carré du diamètre.

BY-NC-SA