

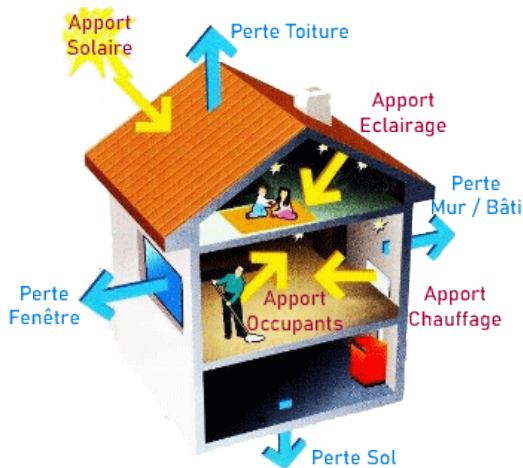


Thermodynamique

Bilan carbone du chauffage au gaz d'une maison

Le but de cet exercice est de réaliser le bilan carbone du chauffage au gaz d'une maison de 100 m^2 habitables, c'est-à-dire d'estimer l'ordre de grandeur de la masse de CO_2 rejetée dans l'atmosphère en un an. Comme l'objectif est un bilan annuel, les variations journalières de température seront négligées pour se concentrer sur les variations saisonnières. La modélisation thermique des bâtiments étant un domaine très complexe, on se contentera du modèle (très) simplifié décrit dans le document 1.

Document 1 : Modélisation thermique d'une maison



- ▷ Les pertes thermiques de la maison, de température T constante et uniforme, vers l'extérieur, de température T_{ext} , sont décrites par une unique conductance thermique équivalente $G = 350\text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$, ce qui correspond à une isolation moyenne.
- ▷ De par son métabolisme, un adulte dégage en permanence une puissance thermique comprise entre 100 et 120 W. On supposera la maison habitée par une famille de quatre personnes, chacun dégageant en continu la même puissance $p = 80\text{ W}$, inférieure aux valeurs précédentes pour tenir compte du temps passé hors de la maison.
- ▷ Les appareils électriques se trouvant dans la maison libèrent également une puissance thermique due à l'effet Joule, appelée charge thermique. Les spécialistes considèrent usuellement une valeur de charge thermique dépendant de la surface habitable et valant $\psi = 5\text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

- ▷ Lorsqu'elle est en fonctionnement, la chaudière apporte une puissance thermique de chauffe \mathcal{P}_c . Usuellement, cette puissance est fixée mais la chaudière ne fonctionne pas en continu. Pour simplifier, on suppose ici au contraire la puissance \mathcal{P}_c apportée en continu mais de valeur variable.

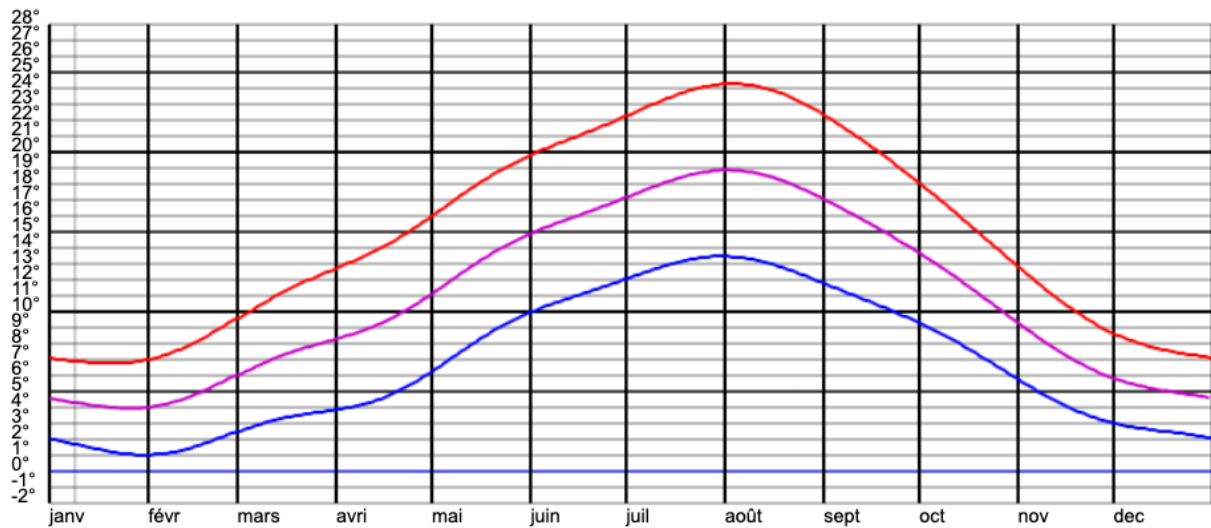
1 - Montrer qu'en régime permanent la température d'équilibre de la maison non chauffée vaut

$$T_{\text{nc}} = T_{\text{ext}} + \frac{4p + \psi S}{G}.$$

2 - La température dans la maison doit être maintenue à une valeur constante $T = 19^\circ\text{C}$. À partir de quelle température extérieure est-il nécessaire de démarrer la chaudière? Est-ce le cas chez vous? Quelle contribution essentielle au chauffage d'une maison, omise dans le modèle précédent, permet d'expliquer la différence?

Pour tenir compte de cet effet de manière empirique, on suppose que la chaudière ne fonctionne que lorsque la température moyenne journalière est inférieure à 10°C . Le document 2 représente les températures enregistrées à Rouen : avec notre convention, la période de chauffe s'étend donc du 25 octobre (jour 298) au 20 avril (jour 110). Dans la suite, **on ne s'intéresse qu'à la température moyenne journalière**.

Document 2 : Normales climatiques à Rouen



Les trois courbes représentent respectivement les températures minimale, moyenne et maximale journalières enregistrées chaque jour à Rouen, moyennées sur la période 1981-2010. Le minimum annuel est atteint au 1^{er} février (jour 32) et le maximum au 1^{er} août (jour 214).

Source : Météo France.

3 - On modélise la courbe de température par une sinusoïde de la forme

$$T_{\text{ext}} = T_0 - \Delta T \cos\left(\frac{2\pi}{\tau}(t - t_0)\right).$$

Déterminer les valeurs numériques des températures T_0 et ΔT , de la période τ (en jours) et du décalage temporel t_0 (en jours).

4 - Exprimer la puissance de chauffe nécessaire pour maintenir $T = 19^\circ\text{C}$ en fonction de la température extérieure.

5 - On note t_1 et $t_2 > t_1$ le début et la fin de la période de chauffe. Montrer qu'au cours de cette période la chaudière fournit le transfert thermique total

$$Q_c = G \Delta T \frac{\tau}{2\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}(t_2 - t_0)\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{\tau}(t_1 - t_0)\right) \right] + G(T - T_0)(t_2 - t_1) - (4p + \psi S)(t_2 - t_1).$$

Proposer (et réaliser !!) trois tests de vraisemblance sur la validité de cette formule. Calculer la valeur numérique, en faisant très attention aux unités.

L'énergie nécessaire est apportée par la combustion du méthane CH_4 au sein de la chaudière. On considérera que la chaudière a un rendement $\eta = 0,9$, c'est-à-dire que seuls 90 % de l'énergie libérée par la combustion est effectivement récupérée par la maison, le reste étant perdue notamment via les fumées de combustion.

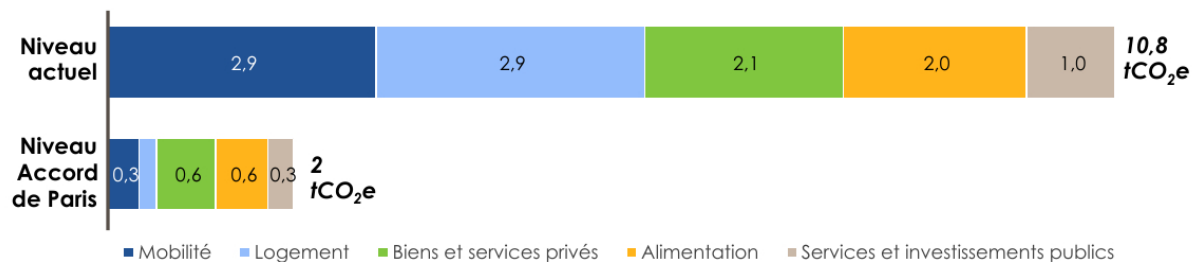
6 - Écrire l'équation de réaction de combustion du méthane et calculer son enthalpie standard de réaction $\Delta_r H^\circ$. Tous les constituants sont à l'état gazeux. Des données thermochimiques sont regroupées dans le document 4, en fin d'énoncé.

7 - Déterminer la quantité de matière de méthane que la chaudière doit brûler pour apporter à la maison le transfert thermique Q_c . En déduire que la masse de CO_2 rejetée dans l'atmosphère s'écrit

$$m_{\text{CO}_2} = -\frac{Q_c}{\eta \Delta_r H^\circ} M_{\text{CO}_2}.$$

Proposer (et réaliser !!) trois tests de vraisemblance sur la validité de cette formule.

8 - Calculer la valeur numérique et commenter le résultat au regard du document 3.

Document 3 : Empreinte carbone moyenne d'un français

L'empreinte carbone d'un pays quantifie les émissions directes et indirectes de gaz à effet de serre induites par la consommation intérieure de ce pays, ici ramenées à l'échelle d'un individu. Les valeurs sont exprimées en « tonnes de CO₂ équivalentes », ce qui permet de prendre en compte l'émission d'autres gaz à effet de serre que le CO₂ à condition de tenir compte de leur pouvoir de réchauffement comparé à celui du CO₂.

Source : Carbone4, cabinet spécialisé dans la transition bas-carbone.

Document 4 : Extrait de table thermodynamique

	CH ₄	CO ₂	O ₂	H ₂ O
$\Delta_f H^\circ$ (kJ · mol ⁻¹)	-74,8	-393,5	0	-241,8
M (g · mol ⁻¹)	16	44	32	18

Éléments de correction

1 On suppose l'air de la maison à pression constante, ce qui permet de réaliser un bilan d'enthalpie en régime permanent. Comme la maison est habitée par 4 personnes et possède une surface habitable S , ce bilan s'écrit

$$\frac{dH}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RP}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{modèle}}}{=} G(T_{\text{ext}} - T) + 4p + \psi S \quad \text{d'où} \quad T_{\text{nc}} = T_{\text{ext}} + \frac{4p + \psi S}{G}.$$

2 La chaudière doit être allumée dès que $T_{\text{nc}} < T$, c'est-à-dire dès que

$$T_{\text{ext}} < T - \frac{4p + \psi S}{G}.$$

D'après ce calcul, il faudrait donc démarrer la chaudière dès que la température devient inférieure à $16,7^\circ\text{C}$! Cette valeur est heureusement irréaliste : pour une telle température, qui correspond à un matin d'été, il est inutile d'allumer le chauffage! Cet écart s'explique par l'**influence du soleil** qui réchauffe naturellement la maison en journée.

Il conviendrait aussi d'ajouter l'inertie thermique de la maison, qui accumule l'énergie thermique disponible en journée pour pouvoir la restituer la nuit. La grandeur physique quantifiant l'inertie thermique n'est autre que la capacité thermique.

3 La température est comprise entre 4 et 19°C , d'où on déduit

$$\begin{cases} T_0 - \Delta T = 4^\circ\text{C} \\ T_0 + \Delta T = 19^\circ\text{C} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} T_0 = \frac{19+4}{2} = 11,5^\circ\text{C} \\ \Delta T = \frac{19-4}{2} = 7,5^\circ\text{C} \end{cases}$$

La période correspond évidemment à un an, soit $\tau = 365$ jours. Enfin, la température minimale est atteinte lorsque $t - t_0 = 0$ car le cosinus vaut 1, d'où on déduit $t_0 = 32$ jours.

4 On reprend le bilan thermique, en y ajoutant la puissance de chauffe \mathcal{P}_c fournie par la chaudière,

$$G(T_{\text{ext}} - T) + 4p + \psi S + \mathcal{P}_c = 0 \quad \text{soit} \quad \mathcal{P}_c = G(T - T_{\text{ext}}) - 4p - \psi S.$$

5 Par définition,

$$\begin{aligned} Q_c &= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_c dt \\ &= G \int_{t_1}^{t_2} (T - T_{\text{ext}}) dt - (4p + \psi S)(t_2 - t_1) \\ &= G \int_{t_1}^{t_2} \left[T - T_0 + \Delta T \cos\left(\frac{2\pi}{\tau}(t - t_0)\right) \right] dt - (4p + \psi S)(t_2 - t_1) \\ &= G \Delta T \int_{t_1}^{t_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\tau}(t - t_0)\right) dt + G(T - T_0)(t_2 - t_1) - (4p + \psi S)(t_2 - t_1) \\ &= G \Delta T \times \frac{\tau}{2\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}(t - t_0)\right) \right]_{t_1}^{t_2} + G(T - T_0)(t_2 - t_1) - (4p + \psi S)(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

ce qui mène bien à

$$Q_c = G \Delta T \frac{\tau}{2\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}(t_2 - t_0)\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{\tau}(t_1 - t_0)\right) \right] + G(T - T_0)(t_2 - t_1) - (4p + \psi S)(t_2 - t_1).$$

De très nombreux tests de vraisemblance sont possibles :

- ▷ l'homogénéité! en particulier, la conductance G s'exprime en $\text{W} \cdot \text{K}^{-1}$, elle doit donc être multipliée par une température et un temps pour donner une énergie ;
- ▷ le premier terme n'est pas évident à tester qualitativement à cause de la différence des sinus dont il n'est pas simple de deviner le signe, mais c'est plus simple pour les termes suivants ;
- ▷ plus la durée de chauffe $t_2 - t_1$ est élevée, plus l'énergie consommée est élevée ;

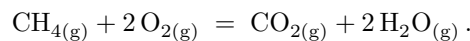
- ▷ plus la conductance thermique G est élevée, plus les pertes thermiques le sont, plus l'énergie dépensée est élevée;
- ▷ plus les sources internes de chaleur $4p$ et ψS sont importantes, moins il faut que la chaudière apporte d'énergie.

Numériquement, on trouve

$$Q_c = 5,6 \cdot 10^{10} \text{ J}.$$

Attention pour le calcul numérique : le calcul est valable pour $t_2 > t_1$, il faut donc intégrer entre le 25 octobre de l'année n et le 20 avril de l'année $n + 1$, soit entre les jours 298 et $110 + 365 = 475$.

6 La réaction de combustion du méthane s'écrit



D'après la loi de Hess,

$$\Delta_r H^\circ = -393,5 - 2 \times 241,8 + 74,8 - 2 \times 0 = -802,3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

7 Notons Q_{lib} l'énergie libérée par la combustion de n mol de méthane. La maison récupère $Q_c = \eta Q_{\text{lib}}$. En supposant cette combustion isotherme, le bilan d'enthalpie s'écrit

$$\Delta H \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} -Q_{\text{lib}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{transf}}}{=} n \Delta_r H^\circ \quad \text{soit} \quad -\frac{Q_c}{\eta} = n \Delta_r H^\circ \quad \text{donc} \quad n = -\frac{Q_c}{\eta \Delta_r H^\circ}.$$

D'après l'équation bilan de la réaction, une mole de méthane brûlée dégage une mole de CO_2 . La masse de CO_2 émise est donc

$$m_{\text{CO}_2} = n M_{\text{CO}_2} \quad \text{soit} \quad m_{\text{CO}_2} = -\frac{Q_c}{\eta \Delta_r H^\circ} M_{\text{CO}_2}.$$

Pour les trois tests de vraisemblance, citons par exemple :

- ▷ l'analyse du signe, le $-$ se compensant avec $\Delta_r H^\circ < 0$;
- ▷ plus la maison a besoin d'être chauffée, plus Q_c est élevé, plus les émissions de CO_2 le sont, il est donc logique que Q_c soit au numérateur ;
- ▷ plus le rendement est faible, plus la chaudière doit brûler de méthane pour produire le même transfert thermique, ce qui augmente d'autant les émissions, il est donc logique que η soit au dénominateur ;
- ▷ plus la réaction est exothermique, moins la chaudière doit brûler de méthane pour une même chaleur produite, il est donc logique que $\Delta_r H^\circ$ soit au dénominateur.

8 Numériquement, on trouve $m_{\text{CO}_2} = 3,4$ tonnes de CO_2 émises chaque année pour le chauffage de la maison étudiée, ce qui correspond à 850 kg par habitant. On constate sur le document que, bien que rudimentaire, le modèle utilisé **donne le bon ordre de grandeur** (le poste « chauffage » représente entre un tiers et la moitié de l'empreinte carbone attribuable au logement) ... et malheureusement loin d'atteindre les objectifs de l'accord de Paris.