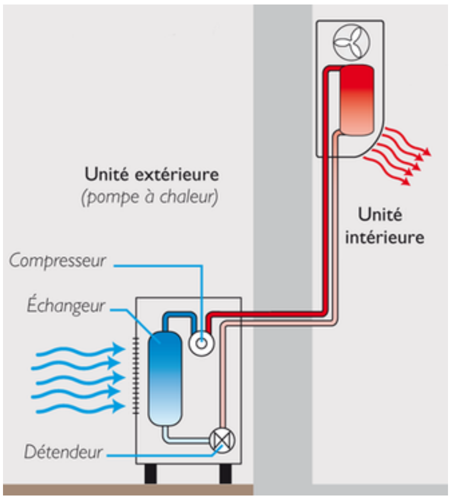
Un exercice de physique appliquée aux enjeux climatiques et énergétiques

Thermodynamique différentielle

Chauffage par une pompe à chaleur



Une pompe à chaleur (abrégée PAC) est une machine thermique permettant d'effectuer un transfert thermique effectif de sens opposé au sens naturel, c'est-à-dire « du froid vers le chaud ». Dans une PAC, un fluide caloporteur est en écoulement dans un circuit passant alternativement à l'extérieur et à l'intérieur de la maison à chauffer. Rappelons que dans ce contexte l'extérieur de la maison est qualifié de « source froide » et l'intérieur de « source chaude ». À l'extérieur de la maison, le fluide reçoit une puissance thermique $\mathcal{P}_\mathrm{f} > 0$ ainsi qu'une puissance mécanique $\mathcal{P}_\mathrm{m} > 0$ au sein du compresseur, et à l'intérieur il reçoit une puissance thermique algébrique $\mathcal{P}_\mathrm{c} < 0$, ce qui revient à dire que le fluide restitue un transfert thermique à l'intérieur de la maison.

Cet exercice s'intéresse à l'évolution de la température intérieure T_c lorsque la PAC est mise en marche alors que la température extérieure T_f est constante.

Hypothèses de travail :

- ▷ Puissance du compresseur $\mathcal{P}_\mathrm{m} = \mathrm{cte}$;
- ▷ Le démarrage de la PAC est de durée négligeable : celle-ci est toujours supposée en régime permanent ;
- ▷ Les pertes thermiques au travers des murs de la maison sont également négligées ;
- ▷ Toutes les évolutions thermodynamiques de la PAC sont considérées réversibles.

1 - Par application des principes de la thermodynamique au fluide caloporteur de la PAC pendant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$, établir deux relations entre les puissances échangées et les températures des sources.

2 - Établir une relation supplémentaire en appliquant le premier principe à l'intérieur de la maison, de capacité thermique totale C, incluant l'air, les murs, le mobilier, etc.

3 - En déduire que la température T_c de la source chaude vérifie la relation

$$\left(1 - \frac{T_\mathrm{f}}{T_\mathrm{c}}\right) \frac{\mathrm{d}T_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{P}_\mathrm{m}}{C} \,.$$

4 - En déduire la durée de chauffage τ nécessaire pour que la température intérieure s'élève de T_0 à $T_0 + \Delta T$.

Éléments de correction

1 Comme la PAC fonctionne en régime permanent, alors l'énergie totale du fluide caloporteur est constante. Le bilan d'énergie interne du fluide caloporteur s'écrit donc

$$\mathrm{d}U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} \mathcal{P}_\mathrm{f}\,\mathrm{d}t + \mathcal{P}_\mathrm{c}\,\mathrm{d}t + \mathcal{P}_\mathrm{m}\,\mathrm{d}t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RP}}}{=} 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\mathcal{P}_\mathrm{f} + \mathcal{P}_\mathrm{c} + \mathcal{P}_\mathrm{m} = 0\,.} \tag{1}$$

Par ailleurs, comme le fluide évolue de manière réversible, il n'y a pas de création d'entropie. Le bilan d'entropie s'écrit donc

$$\mathrm{d}S \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2nd P}}}{=} \frac{\mathcal{P}_\mathrm{c}\,\mathrm{d}t}{T_\mathrm{c}} + \frac{\mathcal{P}_\mathrm{f}\,\mathrm{d}t}{T_\mathrm{f}} + \cancel{\delta\mathcal{S}_\mathrm{c}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RP}}}{=} 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{\mathcal{P}_\mathrm{c}}{T_\mathrm{c}} + \frac{\mathcal{P}_\mathrm{f}}{T_\mathrm{f}} = 0\,.} \tag{2}$$

2 Au cours d'une évolution inifinitésimale, l'intérieur de la maison reçoit de la part du fluide caloporteur le transfert thermique infinitésimal $\delta Q = -\mathcal{P}_\mathrm{c}\,\mathrm{d}t$. Le bilan d'énergie interne de l'intérieur de la maison s'écrit donc

$$\mathrm{d}U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} -\mathcal{P}_\mathrm{c}\,\mathrm{d}t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} C\,\mathrm{d}T_\mathrm{c}\,, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}T_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathcal{P}_\mathrm{c}}{C}\,.} \tag{3}$$

3 D'après la relation (2),

$$\mathcal{P}_\mathrm{f} = -\frac{T_\mathrm{f}}{T_\mathrm{c}}\mathcal{P}_\mathrm{c}\,,$$

donc en injectant dans la relation (1)

$$\left(1 - \frac{T_\mathrm{f}}{T_\mathrm{c}}\right)\mathcal{P}_\mathrm{c} + \mathcal{P}_\mathrm{m} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{P}_\mathrm{c} = -\frac{\mathcal{P}_\mathrm{m}}{C\,(1 - T_\mathrm{f}/T_\mathrm{c})}$$

ce qui conduit avec la relation (3) au résultat attendu,

$$\boxed{\left(1 - \frac{T_\mathrm{f}}{T_\mathrm{c}}\right)\frac{\mathrm{d}T_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{P}_\mathrm{m}}{C}\,.}$$

4 Par séparation des variables,

$$\mathrm{d}T_\mathrm{c} - T_\mathrm{f}\frac{\mathrm{d}T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{c}} = \frac{\mathcal{P}_\mathrm{m}}{C}\,\mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad \int_{T_0}^{T_0+\Delta T} \mathrm{d}T_\mathrm{c} - T_\mathrm{f}\int_{T_0}^{T_0+\Delta T}\frac{\mathrm{d}T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{c}} = \frac{\mathcal{P}_\mathrm{m}}{C}\int_0^\tau \mathrm{d}t$$

ce qui donne en procédant aux intégrations

$$\Delta T - T_\mathrm{f}\ln\frac{T_0 + \Delta T}{T_0} = \frac{\mathcal{P}_\mathrm{m}}{C}\,\tau$$

et ainsi

$$\boxed{\tau = \frac{C}{\mathcal{P}_\mathrm{m}}\left[\Delta T - T_\mathrm{f}\ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)\right]\,.}$$