Un exercice de physique appliquée aux enjeux climatiques et énergétiques

Conduction thermique

Crayon combustible nucléaire

adapté écrit CCP PC 2013

Un crayon combustible est constitué de pastilles d'oxyde d'uranium ou d'oxyde mixte d'uranium et de plutonium (d'un diamètre et d'une hauteur d'environ $r_\mathrm{c} \sim 1\,\mathrm{cm}$) empilées dans des tubes de métal (gaines en alliage de zirconium) fermés aux extrémités formant un cylindre de hauteur totale $H \gg r_\mathrm{c}$. Les transformations nucléaires au sein du crayon produisent une puissance thermique volumique P_v. On étudie le régime permanent, et on suppose que les échanges thermiques ne se font que par conduction radiale. Les conductivités thermiques du combustible et de la gaine sont respectivement notée λ_c et λ_g. Le contact thermique entre le cœur et la gaine est supposé parfait, si bien que la température est continue à l'interface.

Données :

▷ Forme générale de l'équation de la chaleur en présence d'un terme source :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = P_v + \lambda\, \Delta T\,.$$

▷ Expression de l'opérateur laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\,.$$

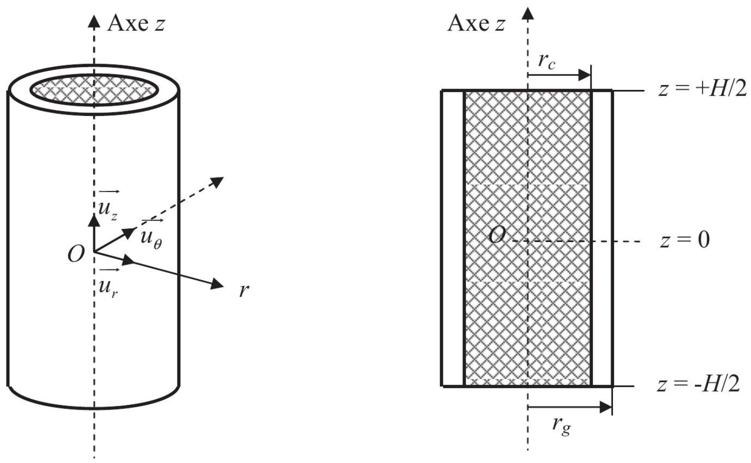

Figure 1 – Repère et dimensions du crayon combustible.

1 - En remarquant que le système possède une symétrie de révolution autour de l'axe Oz et que le régime est permanent, simplifier l'équation de la chaleur proposée.

2 - En déduire l'expression de l'évolution de la température selon r dans le combustible en fonction de la température au centre $T(r\!=\!0) = T_0$.

3 - Exprimer alors l'écart de température moyen entre le centre et la périphérie du combustible $\Delta T_\mathrm{comb} = T_0 - T_\mathrm{c}$, où $T_\mathrm{c} = T(r\!=\!r_\mathrm{c})$.

4 - Exprimer la température $T(r)$ dans la gaine en fonction de la température T_c et celle de la paroi de la gaine $T_\mathrm{g} = T(r\!=\!r_\mathrm{g})$.

5 - Exprimer le flux thermique surfacique ϕ s'échappant de la paroi du crayon en $r = r_\mathrm{c}$ en fonction de P_v et de r_c.

6 - En déduire l'expression de $\Delta T_\mathrm{tot} = T_\mathrm{c} - T_\mathrm{g}$ en fonction de P_v, r_c, r_g et λ_g.

Éléments de correction

1 La symétrie et le régime stationnaire indiquent que T dépend de la seule variable r, donc

$$\boxed{0 = P_v + \frac{\lambda_c}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\,.}$$

2 Cette équation s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{P_v}{\lambda_c}r$$

Une première intégration donne

$$r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{P_v}{2\lambda_c}r^2 + A$$

avec A une constante, et pour une deuxième intégration on écrit

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{P_v}{2\lambda_c}r + \frac{A}{r} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{T(r) = -\frac{P_V}{4\lambda_c}r^2 + A\ln(r) + B\,,}$$

avec B une autre constante.

Les constantes se déterminent avec les conditions aux limites. En $r = 0$, $T(0) = T_0$: cela impose $A = 0$, sans quoi la température divergerait, et $B = T_0$, d'où

$$\boxed{T(r) = -\frac{P_V}{4\lambda_c}r^2 + T_0\,.}$$

3 En écrivant cette solution en $r = r_c$, on a directement

$$\boxed{\Delta T_{\text{comb}} = \frac{P_V}{4\lambda_c}{r_c}^2\,.}$$

4 L'équation de la chaleur prend exactement la même forme avec cette fois $P_V = 0$. La solution est donc de la forme

$$T(r) = A'\ln r + B'\,.$$

Les conditions aux limites s'écrivent

$$T(r_c) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CL}}}{=} T_c \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} A'\ln(r_c) + B' \qquad \text{et} \qquad T(r_g) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CL}}}{=} T_g \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} A'\ln(r_g) + B'$$

Le plus simple est d'en prendre d'abord la différence, d'où

$$A' = \frac{T_g - T_c}{\ln r_g - \ln r_c} = \frac{T_g - T_c}{\ln\dfrac{r_g}{r_c}} \qquad \text{puis} \qquad B' = -A'\ln r_c + T_c\,.$$

Finalement, au sein de la gaine,

$$T(r) = \frac{\ln\frac{r}{r_c}}{\ln\dfrac{r_g}{r_c}}\,(T_g - T_c) + T_c\,.$$

5 En régime permanent, il n'y a pas d'accumulation d'énergie, donc toute la puissance produite au sein du crayon s'échappe nécessairement par sa paroi latérale, ce qui s'écrit

$$\pi{r_c}^2 H \times P_v = 2\pi r_c H \times \phi \qquad \text{d'où} \qquad \phi = \frac{P_v r_c}{2}\,.$$

6 Le flux peut également s'obtenir avec la loi de Fourier en $r = r_c$,

$$\phi = -\lambda_g\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}(r{=}r_c) = -\lambda_g\frac{T_g - T_c}{\ln\dfrac{r_g}{r_c}}\frac{1}{r_c}\,.$$

En égalisant les deux expressions de ϕ, on en déduit

$$\boxed{\Delta T_{\text{tot}} = \frac{P_V{r_c}^2}{2\lambda_g}\ln\frac{r_g}{r_c}\,.}$$