Un exercice de physique appliquée aux enjeux climatiques et énergétiques

Thermodynamique

Isolation thermique d'une maison

L'isolation thermique est un enjeu majeur de la transition énergétique : le secteur du bâtiment est reponsable de près de 45 % de la consommation énergétique française, et les politiques gouvernementales ambitionnent de rénover 75 000 logements par an. L'isolation peut s'effectuer en plaçant des matériaux adéquats sur la face intérieure ou extérieure des murs.

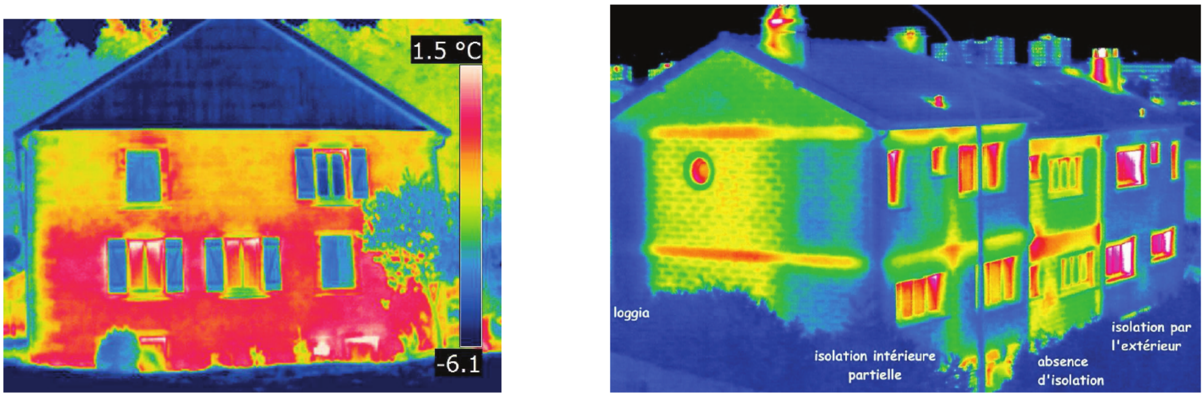


Figure 1 – Exemples d'images obtenues par caméra thermique.

L'objectif de ce problème est de comparer les deux méthodes d'isolation en s'appuyant sur des modèles de plus en plus élaborés. Il se compose de plusieurs parties formant une progression logique qu'il est recommandé d'aborder dans l'ordre proposé. Toutefois, de nombreuses questions sont indépendantes entre les différentes parties et au sein d'une même partie. Leur poids indicatif est le suivant :

I - Montée en température : 26 % ;
II - Maintien d'une température de consigne : 42 % ;
III - Fluctuations de température : 32 %.

Pour restreindre l'étude, on considère une maison de plain pied, modélisée par une unique pièce (cloisons internes négligées) dont les quatre murs sont en contact avec l'extérieur. Cette maison est parallélépipédique de longueur $a = 10\,\mathrm{m}$, largeur $b = 6\,\mathrm{m}$, de hauteur $h = 2{,}5\,\mathrm{m}$. Elle sera supposée parfaitement isolée au niveau du plancher et du plafond : bien que très importantes en pratique, les pertes thermiques par la toiture ne seront pas étudiées ici.

Données numériques :

- Dimensions de la pièce : longueur $a = 10\,\mathrm{m}$, largeur $b = 6\,\mathrm{m}$, hauteur $h = 2{,}5\,\mathrm{m}$;
- Épaisseur des murs de l'habitation : $L = 10\,\mathrm{cm}$.

- Constante des gaz parfaits : $R = 8\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$;
- Coefficient de Laplace de l'air : $\gamma = 1{,}4$;
- Volume molaire des gaz : $V_{\mathrm{mol}} = 25\,\mathrm{L \cdot mol^{-1}}$.

- Masse volumique du béton : $\rho = 2 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$;
- Capacité thermique massique du béton : $c = 1 \cdot 10^3\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$;
- Conductivité thermique du béton : $\lambda = 1{,}5\,\mathrm{SI}$ (unité du système international).

BY-NC-SA

I - Montée en température

On s'intéresse dans cette première partie à la montée en température de la maison partant d'une valeur froide (maison longtemps inoccupée) jusqu'à une valeur de consigne. On suppose l'isolation thermique parfaite : la maison est parfaitement calorifugée, par les faces intérieures ou extérieures des murs.

A - Isolation par l'intérieur : comportement thermique de l'air

La maison contient n mol d'air, modélisé par un gaz parfait diatomique de coefficient de Laplace $\gamma = 1{,}4$. On note C_P et C_V ses capacités thermiques isobare et isochore. La maison est supposée parfaitement étanche : les évolutions de l'air de la maison sont donc isochores.

1 - Déterminer la quantité d'air n en fonction des dimensions de la pièce et du volume molaire des gaz $V_\mathrm{m} = 25\,\mathrm{L\cdot mol^{-1}}$. Calculer sa valeur numérique.

2 - Montrer que la variation infinitésimale d'enthalpie de l'air s'écrit $\mathrm{d}H = \mathrm{d}U + (C_P - C_V)\,\mathrm{d}T$.

3 - Montrer de manière indépendante que pour un gaz parfait $\mathrm{d}H = \mathrm{d}U + nR\,\mathrm{d}T$. Comment se nomme la relation à laquelle conduisent directement cette question et la précédente ?

4 - Établir l'expression de la capacité thermique isochore C_air de l'air contenu dans la pièce en fonction de R et γ. Calculer sa valeur numérique.

La pièce possède un radiateur électrique de puissance maximale $P_0 = 2\,\mathrm{kW}$.

5 - En procédant à un bilan thermique appliqué à la pièce, établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la température $T(t)$ dans la pièce en fonction de C_air et de P_0.

6 - Résoudre cette équation pour une température initiale T_1. Tracer $T(t)$.

7 - Déterminer la durée de chauffage Δt pour atteindre la température souhaitée $T_\mathrm{int} = 20\,°\mathrm{C}$ partant de $T_1 = 15\,°\mathrm{C}$. Calculer sa valeur numérique.

B - Isolation par l'extérieur : influence des murs

La maison est constituée d'une enceinte en béton d'épaisseur $L = 10\,\mathrm{cm}$. Le béton a une masse volumique $\rho = 2\cdot 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, une capacité thermique massique $c = 1\cdot 10^3\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$. Si l'isolant est disposé à l'extérieur de l'habitation, cette enceinte doit elle aussi monter en température.

8 - Déterminer la surface totale S des murs de la pièce en fonction de a, b et h.

9 - En déduire la capacité thermique C_mur de l'enceinte en béton en fonction de S, L, ρ et c. Comparer numériquement C_mur à C_air.

10 - Déterminer la nouvelle durée montée en température de la pièce $\Delta t'$ en prenant en compte l'influence des murs. Commenter.

11 - Pourquoi cet inconvénient apparent peut-il devenir un avantage ?

II - Maintien d'une température de consigne

On considère maintenant les pertes thermiques au travers des murs de l'habitation, qui ne peuvent être parfaitement isolés.

A - Conduction thermique dans le mur

On étudie la conduction thermique dans le mur modélisé par un parallélépipède de section S, de longueur L, en contact avec deux thermostats de températures T_int et T_ext, voir figure 2. On note $\vec{j} = j(x,t)\,\vec{e}_x$ le vecteur densité de flux thermique et $\lambda = 1{,}5\,\mathrm{SI}$ la conductivité thermique du béton.

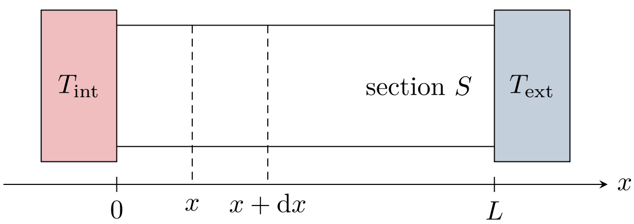


Figure 2 – Modélisation thermique du mur.

BY-NC-SA Étienne Thibierge, 15 novembre 2022, www.etienne-thibierge.fr

12 - Que représente physiquement $j(x, t)$? Préciser son unité.

13 - Rappeler la loi de Fourier. Interpréter son signe. Donner en justifiant les réponses l'unité usuelle puis l'unité dans le système international de la conductivité thermique λ.

14 - En procédant à un bilan thermique de la tranche de mur comprise entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$, établir l'équation de la chaleur, aussi appelée équation de diffusion thermique, c'est-à-dire l'équation différentielle régissant l'évolution de la température $T(x, t)$. Définir la diffusivité du béton et calculer sa valeur numérique.

B - Résistance thermique du mur non isolé

Pour la suite de cette partie, on suppose se placer en régime permanent.

15 - Résoudre l'équation de diffusion thermique pour déterminer $T(x)$ la température à l'intérieur du mur à l'abscisse x. On supposera la continuité de la température aux interfaces avec les thermostats.

16 - Exprimer la densité de flux $j(x)$ qui traverse le mur. Que remarquez-vous ? En déduire la puissance thermique P perdue par conduction au travers du mur.

17 - Calculer numériquement la puissance P_0 que le radiateur doit fournir afin de maintenir la température intérieure à 20 °C pour une température extérieure de 10 °C. Commenter ce résultat par rapport au radiateur envisagé dans la partie précédente.

18 - Rappeler la loi d'Ohm locale pour un conducteur de conductivité électrique γ. Par analogie avec la loi de Fourier, en déduire les analogues de la conductivité électrique, la densité de courant électrique, le potentiel électrique et l'intensité du courant. Donner la réponse sous forme d'un tableau.

19 - Rappeler la définition d'une résistance électrique en termes de courant et potentiel. Par analogie, définir la résistance thermique.

20 - En déduire l'expression de la résistance thermique R_m du mur étudié en fonction de L, λ et S.

C - Performances de l'isolation

Le propriétaire peut disposer l'isolant à l'intérieur ou à l'extérieur du mur. Pour cela, il recouvre les murs d'un isolant de faible capacité thermique, de conductance thermique $\lambda_\mathrm{i} \ll \lambda$ et d'épaisseur $e = L = 10\,\mathrm{cm}$.

21 - Exprimer la résistance thermique R'_m du mur isolé en justifiant. Ce résultat dépend-il de la position intérieure ou extérieure de l'isolation ?

22 - On pose $\beta = R'_\mathrm{m}/R_\mathrm{m} = 10$. Déterminer la puissance nécessaire P'_0 pour maintenir dans la pièce une température de 20 °C pour une température extérieure de 10 °C.

On représente sur le document réponse, figure 3 page 4, le profil de température au sein du mur isolé par un jour d'hiver où la température extérieure est de -5 °C.

23 - La différence de température est-elle plus importante entre les deux faces du béton ou les deux faces de l'isolant ? La réponse sera rigoureusement justifiée. Pour chaque solution d'isolation présentée sur le document réponse page 4 indiquer s'il s'agit d'isolation intérieure ou extérieure. Légender les figures en indiquant les domaines correspondant au béton et à l'isolant.

Le choix d'une solution d'isolation est en particulier gouverné par des contraintes liées à l'humidité : compte tenu de l'humidité enfermée dans le béton, la vapeur d'eau se condense dans la zone où $T < T_\mathrm{sat} = 5$ °C, T_sat étant le point de rosée de la vapeur d'eau. L'eau liquide solidifie si la température baisse en dessous de $T_\mathrm{fus} = 0$ °C, et son volume augmente. Les cycles répétés de gel et dégel entraînent une dégradation des matériaux, et particulièrement celle du béton.

24 - Mettre en évidence sur les deux profils de température du document réponse page 4 les trois domaines du mur correspondant aux différents états physiques de l'eau en les hachurant par des couleurs différentes. Quelle solution d'isolation préconiseriez-vous dans une région froide, par exemple une région montagneuse ?

BY-NC-SA

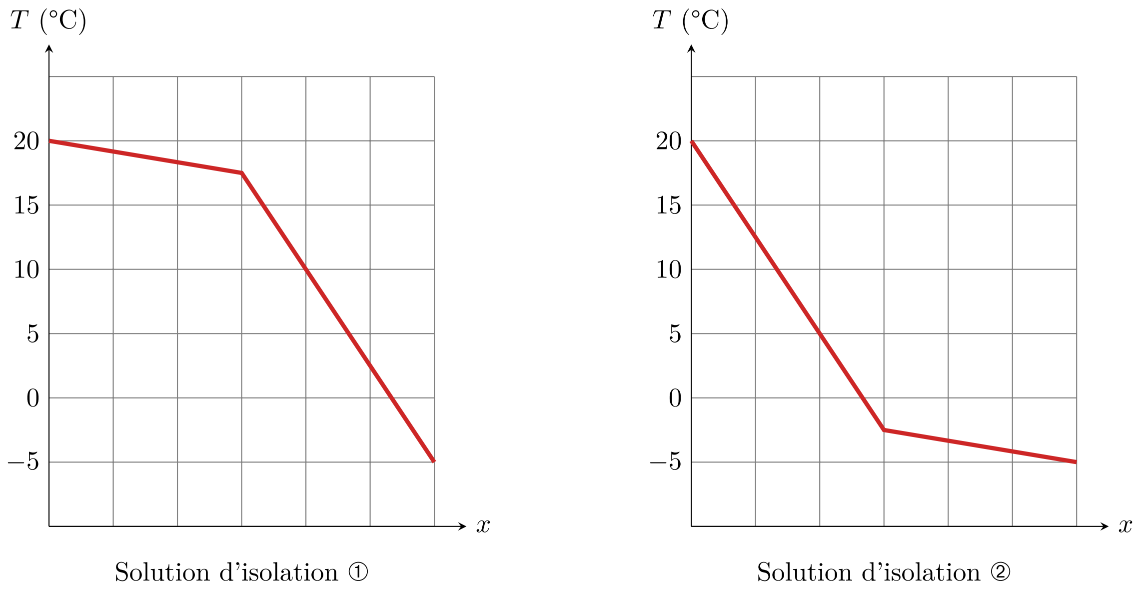


Figure 3 – **Profil de température au sein du mur pour deux solutions d'isolation.**

III - Fluctuations de température

On s'intéresse dans cette dernière partie au comportement des deux solutions d'isolation vis-à-vis des fluctuations de température. L'étude est mené dans le cadre restreint de l'approximation des régimes quasi-stationnaires thermiques, ce qui permet d'exploiter l'analogie électronique même si les températures varient.

A - Approximation des régimes quasi-stationnaires thermiques

25 - Le temps caractéristique de diffusion thermique au travers du mur dépend de son épaisseur L et de sa diffusivité D par une relation de la forme

$$\tau_{\text{diff}} = L^\alpha D^\beta \,.$$

Déterminer les valeurs de α et β. Calculer la valeur numérique de τ_{diff} en admettant qu'elle est fixée par le béton seulement.

26 - Notons τ_{ext} le temps caractéristique de variation de la température extérieure. L'ARQS thermique est-elle valable si $\tau_{\text{ext}} > \tau_{\text{diff}}$ ou $\tau_{\text{ext}} < \tau_{\text{diff}}$?

27 - Les phénomènes suivants peuvent-ils être étudiés dans le cadre de l'ARQS thermique : passage temporaire d'un nuage ? alternance jour-nuit ? alternance saisonnière ?

B - Schéma électrique équivalent

On s'intéresse aux variations de température autour d'une valeur moyenne $\bar{T}$ prise comme référence (masse électrique) en régime sinusoïdal. Toutes les températures considérées dans cette partie sont donc les variations sinusoïdales autour de cette moyenne. Le schéma électrique équivalent de l'habitation est représenté figure 4, où T_{m} est la température moyenne du mur.

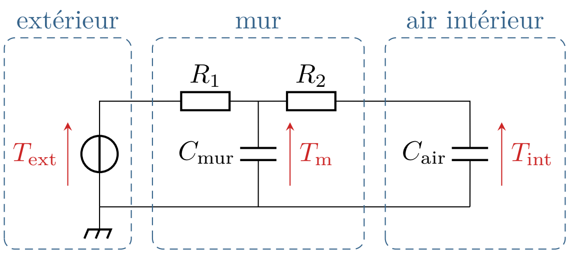


Figure 4 – **Schéma électrique équivalent à l'habitation considérée.**

28 - On rappelle que le profil de température au sein du mur est identique en régime stationnaire et dans l'ARQS thermique. Définir par une intégrale la température moyenne du mur, notée T_{m}. Procéder au calcul de l'intégrale dans le cas du mur non isolé et montrer que

$$T_{\text{m}} = \frac{T_{\text{int}} + T_{\text{ext}}}{2} \,.$$

BY-NC-SA

Ce résultat est-il valable en toute circonstance ?

29 - Déterminer la position particulière x_m où la température est égale à la température moyenne.

30 - En déduire les valeurs des résistances R_1 et R_2 en fonction de la résistance totale du mur R_m dans le cas du mur non isolé.

Dans le cas du système thermique, on a $C_\mathrm{m} \simeq 130\,C_\mathrm{air}$. La fonction de transfert du système peut alors s'écrire sous forme approximée

$$\underline{H} = \frac{\underline{T_\mathrm{int}}}{\underline{T_\mathrm{ext}}} \simeq \frac{1}{1 + \mathrm{j}R_1 C_\mathrm{mur}\omega + \mathrm{j}R_2 C_\mathrm{air}\omega - R_1 R_2 C_\mathrm{mur} C_\mathrm{air}\omega^2}\,.$$

31 - Identifier deux pulsations caractéristiques ω_1 et ω_2.

C - Isolation intérieure

Considérons d'abord le cas d'une isolation par l'intérieur par un isolant de résistance thermique $R_\mathrm{i} = 10\,R_\mathrm{m}$. Le diagramme de Bode obtenu est représenté figure 5.

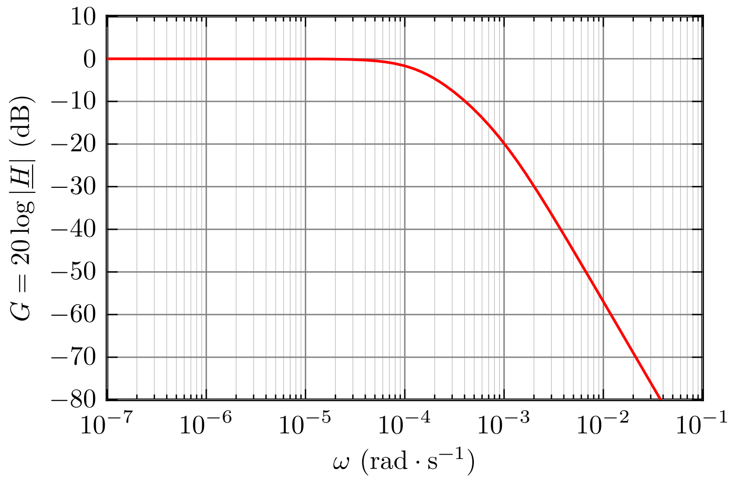


Figure 5 – Diagramme de Bode obtenu pour une isolation par l'intérieur.

32 - Que deviennent dans cette situation les résistances thermiques R_1 et R_2 ?

33 - Déterminer graphiquement la pente de la courbe de gain dans le domaine des hautes pulsations. Interpréter cette valeur à l'aide de la fonction de transfert.

34 - Que dire des fluctuations journalières de température intérieure dans le cas d'une isolation par l'intérieur ($\omega_\mathrm{jour} = 7 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$) ?

D - Isolation extérieure

Considérons maintenant une isolation par l'extérieur avec le même isolant de résistance thermique $R_\mathrm{i} = 10\,R_\mathrm{m}$. Le diagramme de Bode obtenu est représenté figure 6.

35 - Que deviennent dans cette situation les résistances thermiques R_1 et R_2 ?

36 - Déterminer graphiquement la pente de la courbe de gain dans le domaine de pulsations comprises entre 10^{-5} et $10^{-2}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Interpréter cette valeur à l'aide de la fonction de transfert.

37 - Que dire des fluctuations journalières de température intérieure dans le cas d'une isolation par l'extérieur ?

BY-NC-SA

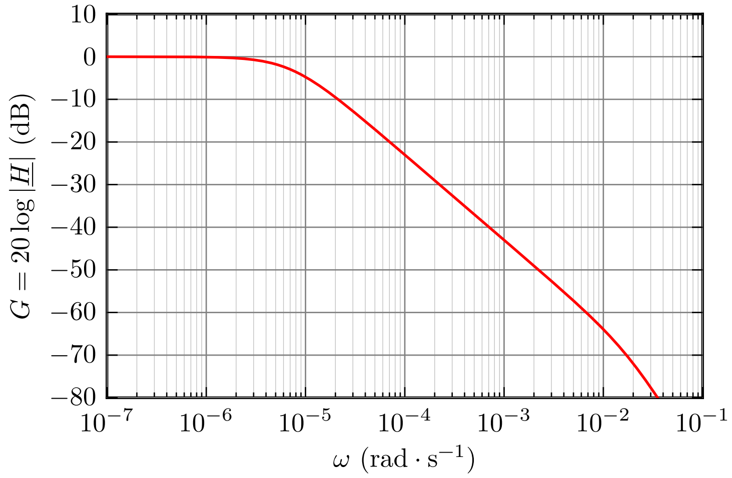


Figure 6 – Diagramme de Bode obtenu pour une isolation par l'extérieur.

Éléments de correction

I - Temps de montée en température

A - Isolation par l'intérieur : comportement thermique de l'air

1 La pièce a un volume $V = abh$, la quantité de matière d'air est donc

$$\boxed{n = \frac{abh}{V_\mathrm{m}}\,.}$$

Numériquement,

$$\boxed{n = \frac{10 \times 6 \times 2{,}5}{25 \cdot 10^{-3}} = 6 \cdot 10^3\,\mathrm{mol}\,.}$$

2 Les lois de Joule appliquées à l'air de la maison s'écrivent

$$\begin{cases} \mathrm{d}U = C_V\,\mathrm{d}T \\ \mathrm{d}H = C_P\,\mathrm{d}T \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{d}H - \mathrm{d}U = (C_P - C_V)\,\mathrm{d}T \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\mathrm{d}H = \mathrm{d}U + (C_P - C_V)\,\mathrm{d}T\,.}$$

3 Par définition de l'enthalpie,

$$H = U + PV \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{GP}}}{=} U + nRT \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\mathrm{d}H = \mathrm{d}U + nR\,\mathrm{d}T\,.}$$

En identifiant, on retrouve la **relation de Mayer**

$$\boxed{C_P - C_V = nR\,.}$$

> *Attention à bien lire l'énoncé : la relation doit être établie* de manière indépendante *de la précédente. Utiliser la question précédente et la relation de Mayer n'est donc pas la démarche attendue ... et de fait, l'objectif est de démontrer la relation de Mayer !*

4 Le coefficient de Laplace est défini par $\gamma = C_P/C_V$ donc $C_P = \gamma C_V$. Avec la relation de Mayer,

$$\gamma C_V - C_V = nR \qquad \text{soit} \qquad (\gamma - 1) C_V = nR \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{C_\mathrm{air} = C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}\,.}$$

Numériquement,

$$C_\mathrm{air} = \frac{6 \cdot 10^3 \times 8}{(1{,}4 - 1)} = \frac{6 \cdot 10^3 \times (\cancel{4} \times 2)}{\cancel{4} \cdot 10^{-1}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{C_\mathrm{air} = 1{,}2 \cdot 10^5\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}\,.}$$

BY-NC-SA
Étienne Thibierge, 15 novembre 2022, www.etienne-thibierge.fr

5 Procédons au bilan d'énergie interne instantané de l'air de la maison, qui ne reçoit que la puissance thermique P_0 fournie par le radiateur :

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \underset{\text{1er P}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} P_0 \underset{\text{Joule}}{\underset{\uparrow}{=}} C_{\mathrm{air}} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{P_0}{C_{\mathrm{air}}}\,.}$$

> *Attention, l'évolution est isochore mais a priori pas isobare. Le premier principe ne peut donc pas être écrit avec l'enthalpie.*

6 L'intégration est immédiate et donne

$$\boxed{T(t) = T_1 + \frac{P_0}{C_{\mathrm{air}}} t\,.}$$

La courbe est représentée figure 7.

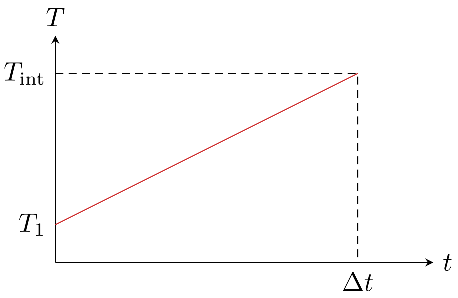


Figure 7 – Courbe de la température dans une pièce parfaitement isolée par l'intérieur.

7 La température finale souhaitée T_{int} est atteinte au bout d'une durée Δt telle que

$$T(\Delta t) = T_{\mathrm{int}} = T_1 + \frac{P_0}{C_{\mathrm{air}}} \Delta t \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\Delta t = \frac{C_{\mathrm{air}}\,(T_{\mathrm{int}} - T_1)}{P_0} = 3 \cdot 10^2\,\mathrm{s} = 5\,\mathrm{min}\,.}$$

B - Isolation par l'extérieur : influence des murs

8 La maison compte deux murs rectangulaires de dimension $a \times h$ et deux autres de dimension $b \times h$, donc

$$\boxed{S = 2(a+b)h = 80\,\mathrm{m}^2\,.}$$

9 Les murs étant de faible épaisseur devant les autres dimensions, le volume de béton vaut approximativement $S \times L$, d'où on déduit la capacité thermique

$$\boxed{C_{\mathrm{mur}} = \rho\, S L\, c = 1{,}6 \cdot 10^7\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}\,.}$$

On constate que $C_{\mathrm{mur}} \gg C_{\mathrm{air}}$.

10 Le bilan d'énergie interne s'écrit comme à la question 5, mais comme les murs doivent également être chauffés alors la capacité thermique est désormais $C_{\mathrm{tot}} = C_{\mathrm{air}} + C_{\mathrm{mur}}$. On en déduit

$$\boxed{\Delta t' = \frac{(C_{\mathrm{air}} + C_{\mathrm{mur}})\,(T_{\mathrm{int}} - T_1)}{P_0} = 4 \cdot 10^4\,\mathrm{s} \simeq 11\,\mathrm{h}\,.}$$

Le temps de montée en température est très différent : l'inertie thermique des murs est en fait le phénomène prépondérant.

11 Cet inconvénient peut devenir un avantage **pour la descente en température** : une fois le chauffage éteint, et en tenant compte des pertes thermiques au travers des murs, une maison isolée par l'extérieur « tiendra » plus longtemps une température confortable qu'une maison isolée par l'intérieur grâce à ce phénomène d'inertie thermique.

BY-NC-SA

II - Maintien d'une température de consigne

A - Conduction thermique dans le mur

12 La puissance thermique traversant une surface $\mathcal{S}$ est le flux de $\vec{j}$ au travers de cette surface,

$$\mathcal{P}_{\text{th}} = \iint \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}\,.$$

Ainsi, la densité de flux thermique $j(x,t)$ est donc une **puissance thermique par unité de surface**. L'équation aux dimensions associée à la relation précédente s'écrit

$$[\mathcal{P}_{\text{th}}] = [j] \times [\mathrm{d}S] \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{[j] = \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}\,.}$$

13 La loi de Fourier s'écrit

$$\boxed{\vec{j} = -\lambda\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T\,.}$$

Le signe $\ominus$ traduit le fait que les transferts thermiques se font des zones chaudes vers les zones froides. Dimensionnellement,

$$\left[\vec{j}\right] = [\lambda] \left[\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T\right] \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} = [\lambda] \times \mathrm{K} \cdot \mathrm{m}^{-1} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{[\lambda] = \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}\,.}$$

Dans le système international,

$$1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}^{-1} = 1\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{-1} = 1\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-3}$$

en raisonnant par exemple avec la définition de l'énergie cinétique. On en déduit l'unité SI de la conductivité thermique,

$$\boxed{[\lambda] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-3} \cdot \mathrm{K}^{-1}\,.}$$

14 Procédons au bilan d'enthalpie de la tranche mésoscopique entre t et $t + \mathrm{d}t$.

> *Comme il s'agit d'un solide, il est ici équivalent de raisonner en enthalpie ou en énergie interne, contrairement au cas de l'air dans la partie précédente.*

- **Premier principe :** par la face situé en x, elle reçoit le flux

$$\phi_{\text{e}} = j(x,t)\,S\,,$$

alors que par la face en $x + \mathrm{d}x$ elle cède le flux

$$\phi_{\text{s}} = j(x + \mathrm{d}x, t)\,S\,.$$

> *Attention à préciser clairement les conventions d'orientation des flux. Si vous n'êtes pas sûrs de bien le rédiger, le plus prudent reste encore de faire un schéma !*

D'après le premier principe,

$$\mathrm{d}H = j(x,t)\,S\,\mathrm{d}t - j(x + \mathrm{d}x, t)\,S\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial j}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,S\,\mathrm{d}t\,.$$

Enfin, avec la loi de Fourier,

$$j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{d}H = +\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.$$

- **Loi de Joule :** la tranche mésoscopique a une masse $\mathrm{d}m = \rho\,S\,\mathrm{d}x$, donc

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d}m\,c\,\big(T(x, t + \mathrm{d}t) - T(x,t)\big) = \rho\,S\,\mathrm{d}x\,c \frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,.$$

- **Conclusion :** en identifiant les deux expressions,

$$\rho\,S\,\mathrm{d}x\,c \frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \lambda \frac{\partial T}{\partial x}\,S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,.}$$

La diffusivité du béton est

$$\boxed{D = \frac{\lambda}{\rho c} = 7{,}5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}\,.}$$

BY-NC-SA

B - Résistance thermique du mur non isolé

15 En régime stationnaire, l'équation de la chaleur se simplifie en

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad T(x) = Ax + B\,,$$

avec A et B deux constantes qui se déterminent avec les conditions aux limites :

$$T(x{=}0) \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{CL}}}{=} T_\mathrm{int} \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{expr}}}{=} B \qquad \text{donc} \qquad B = T_\mathrm{int}$$

et

$$T(x{=}L) \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{CL}}}{=} T_\mathrm{ext} \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{expr}}}{=} Ae + T_\mathrm{int} \qquad \text{donc} \qquad A = \frac{T_\mathrm{ext} - T_\mathrm{int}}{L}\,,$$

soit finalement

$$\boxed{T(x) = \frac{T_\mathrm{ext} - T_\mathrm{int}}{L} x + T_\mathrm{int}\,.}$$

16 D'après la loi de Fourier,

$$j(x) = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\lambda \frac{T_\mathrm{ext} - T_\mathrm{int}}{L} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{j(x) = \frac{\lambda(T_\mathrm{int} - T_\mathrm{ext})}{L}\,.}$$

On constate que la densité de flux thermique j est **indépendante de x**. La puissance totale P perdue par conduction au travers du mur vaut donc

$$\boxed{P = j(x) S = \frac{\lambda S (T_\mathrm{int} - T_\mathrm{ext})}{L}\,.}$$

17 Si la température est maintenue constante, c'est que le radiateur compense exactement les pertes par conduction, soit

$$P_0 = P = \frac{\lambda S (T_\mathrm{int} - T_\mathrm{ext})}{L} = 12\,\mathrm{kW}\,.$$

Le radiateur envisagé en première partie n'est donc **pas capable** de maintenir la température constante car $P_0 < P$.

18 La loi d'Ohm locale s'écrit

$$\vec{j}_\mathrm{e} = \gamma \vec{E} = -\gamma\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V\,.$$

Par analogie avec la loi de Fourier,

$$\begin{array}{rcl}
\vec{j}_\mathrm{e} = -\gamma\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V & \longleftrightarrow & \vec{j}_\mathrm{th} = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T \\
\gamma & \longleftrightarrow & \lambda \\
\vec{j}_\mathrm{e} & \longleftrightarrow & \vec{j}_\mathrm{th} \\
V & \longleftrightarrow & T \\
I = \displaystyle\iint \vec{j}_\mathrm{e} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} & \longleftrightarrow & \phi = \displaystyle\iint \vec{j}_\mathrm{th} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}
\end{array}$$

19 D'après la loi d'Ohm intégrale, en supposant la résistance orientée en convention récepteur,

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\Delta V}{I}\,.$$

Par analogie, on définit la résistance thermique en convention récepteur par

$$R_\mathrm{th} = \frac{T_\mathrm{int} - T_\mathrm{ext}}{\phi}$$

où ϕ est le flux thermique traversant le mur de l'intérieur vers l'extérieur de la maison, égal ici à la puissance thermique P perdue par conduction.

20 En combinant les résultats précédents,

$$R_\mathrm{m} = \frac{T_\mathrm{int} - T_\mathrm{ext}}{P} = \frac{L}{\lambda S (T_\mathrm{int} - T_\mathrm{ext}} \times (T_\mathrm{int} - T_\mathrm{ext})$$

d'où on obtient

$$\boxed{R_\mathrm{m} = \frac{L}{\lambda S}\,.}$$

BY-NC-SA

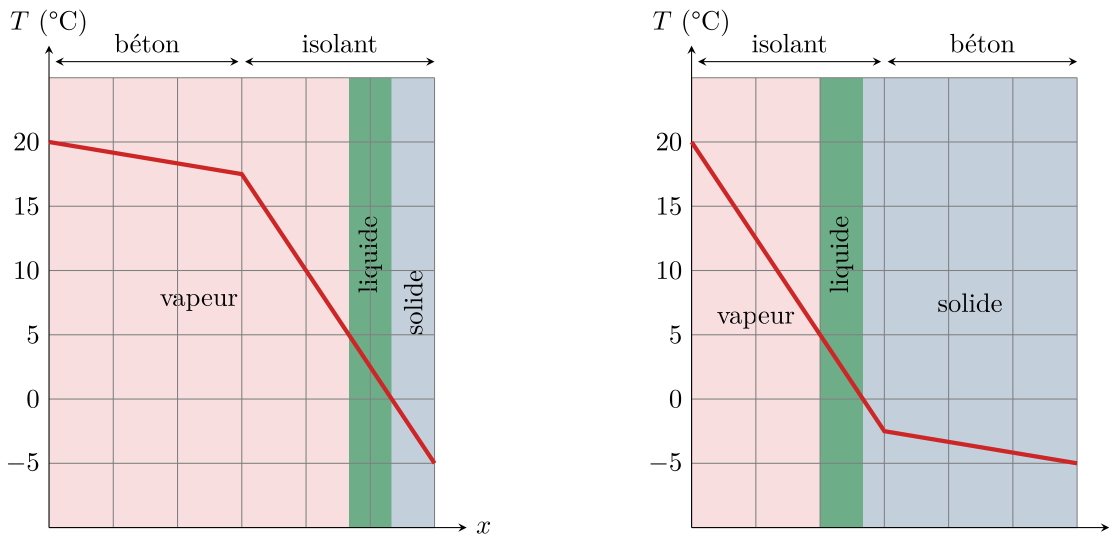
C - Performances de l'isolation

21 L'isolant recouvre la totalité de la surface S du mur avec la même épaisseur L que le béton, il a donc une résistance thermique
$$R_\mathrm{i} = \frac{L}{\lambda_\mathrm{i} S}\,.$$
Il est placé par dessus le béton, les deux matériaux sont donc montés en série. Ainsi,
$$\boxed{R'_\mathrm{m} = R_\mathrm{m} + R_\mathrm{i} = \frac{L}{S}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_\mathrm{i}}\right)\,.}$$
Cette expression est la même que l'isolant soit placé à l'intérieur ou à l'extérieur de l'habitation.

22 En reprenant ce qui précède, la puissance perdue par conduction vaut désormais
$$P' = \frac{T_\mathrm{int} - T_\mathrm{ext}}{R'_\mathrm{m}} = \frac{T_\mathrm{int} - T_\mathrm{ext}}{\beta R_\mathrm{m}} = \frac{P}{\beta}\,.$$
Avec le mur ainsi isolé, le radiateur ne doit plus fournir que
$$\boxed{P'_0 = \frac{P_0}{\beta} = 1{,}2\,\mathrm{kW}}$$
pour maintenir constante la température de l'habitation. Cette fois-ci, il en est capable ... mais il n'y a pas énormément de marge.

23 Les deux résistances thermiques sont traversées par le même flux thermique P'. D'après la loi d'Ohm thermique,
$$\begin{cases} \Delta T_\mathrm{b} = R_\mathrm{m} P' \\ \Delta T_\mathrm{i} = R_\mathrm{i} P' \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\Delta T_\mathrm{b} < \Delta T_\mathrm{i}\,.}$$
La différence de température est plus élevée entre les faces de l'isolant qu'entre celles du béton : on en déduit que la solution d'isolation ① correspond à une **isolation par l'extérieur** et la solution ② à une **isolation par l'intérieur**.

24 Voir figure 8. L'isolation par l'extérieur permet de garantir que le volume de béton est totalement hors gel, au contraire d'une isolation par l'intérieur où le béton se retrouve presque totalement gelé. Si les épisodes de gel sont fréquents, par exemple en montagne, choisir une solution d'isolation extérieure est donc nettement préférable de ce point de vue.



Solution d'isolation ① Solution d'isolation ②

Figure 8 – Profil de température au sein du mur pour deux solutions d'isolation.

> *J'ai également accordé des points aux réponses du type « ça ne pourra qu'être mieux de protéger le béton en plaçant l'isolant côté extérieur », qui relèvent du bon sens même si elles ne sont pas parfaitement*

BY-NC-SA

> *justifiées.*

III - Fluctuations de température

A - Approximation des régimes quasi-stationnaires thermiques

25 Raisonnons avec les unités. La longueur L s'exprime en m et la diffusivité D en $\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$. L'équation aux dimensions correspondant à la relation donnée s'écrit donc

$$\mathrm{s} = \mathrm{m}^\alpha \times \mathrm{m}^{2\beta}\mathrm{s}^{-\beta} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} 1 = -\beta \\ 0 = \alpha + 2\beta \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

ce qui conduit à

$$\boxed{\tau_\text{diff} = \frac{L^2}{D} = 1{,}3 \cdot 10^4\,\mathrm{s}\,.}$$

> *Ne considérer que le béton pour calculer τ_diff pourrait poser question : et l'isolant ? En pratique, l'isolant est moins dense et de faible capacité thermique par rapport au béton, si bien que, même si sa conductivité thermique est également plus faible, la diffusivité de l'isolant est supérieure ou du même ordre que celle du béton. La négliger dans ce calcul d'ordre de grandeur n'est donc pas une approximation si grossière ... en tout cas pas plus que de négliger les fenêtres ou les portes !*

26 Le temps de diffusion quantifie la durée nécessaire pour atteindre le régime permanent. L'approximation des régimes quasi-stationnaires consiste à supposer que le régime permanent est *toujours* atteint : elle est donc valable si la température extérieure varie sur des durées plus longues que le temps de diffusion, soit

$$\tau_\text{ext} > \tau_\text{diff}\,.$$

> *Comme il peut s'agir d'une question « pile ou face », aucun point n'est accordé s'il n'y a pas de justification.*

27 Un nuage passe en quelques minutes, soit $10^2\,\mathrm{s}$: il ne peut donc pas être traité dans l'ARQS thermique. L'alternance jour-nuit se fait sur une durée caractéristique de l'ordre de $24 \times 3600 = 8 \cdot 10^4\,\mathrm{s} > \tau_\text{diff}$, elle peut donc être analysée dans l'ARQS thermique. C'est encore plus le cas pour l'alternance des saisons.

B - Schéma électrique équivalent

28 La température moyenne du mur se définit par

$$\begin{aligned} T_\mathrm{m} &= \frac{1}{L}\int_0^L T(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{L}\left[\frac{T_\text{ext} - T_\text{int}}{L}\frac{x^2}{2} + T_\text{int}x\right]_0^L \\ &= \frac{1}{L}\frac{T_\text{ext} - T_\text{int}}{L}\frac{L^2}{2} + \frac{1}{L}T_\text{int}L \\ \Aboxed{T_\mathrm{m} &= \frac{T_\text{int} + T_\text{ext}}{2}} \end{aligned}$$

On retrouve l'expression intuitive de la moyenne ... mais c'est « une coïncidence » si celle-ci s'applique, liée au fait que le profil de température est affine.

29 La température est égal à la température moyenne en x_m tel que

$$\begin{aligned} \frac{T_\text{ext} - T_\text{int}}{L}x_\mathrm{m} + T_\text{int} &= \frac{T_\text{int} + T_\text{ext}}{2} \\ \frac{T_\text{ext} - T_\text{int}}{L}x_\mathrm{m} &= \frac{T_\text{ext} - T_\text{ext}}{2} \\ \frac{x_\mathrm{m}}{L} &= \frac{1}{2} \\ \Aboxed{x_\mathrm{m} &= \frac{L}{2}\,.} \end{aligned}$$

BY-NC-SA

30 La température moyenne est atteinte au milieu du mur, on peut donc considérer

$$\boxed{R_1 = R_2 = \frac{R_\mathrm{m}}{2}\,.}$$

31 Les deux pulsations caractéristiques qui apparaissent sur cette fonction de transfert sont

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_\mathrm{mur}} \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = \frac{1}{R_2 C_\mathrm{air}}$$

ce qui permet de la réécrire

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + \dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_1} + \dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_2} - \dfrac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}}\,.}$$

C - Isolation intérieure

32 Si l'isolant est à l'intérieur de l'habitation, R_1 est inchangée mais $R_2 = R_\mathrm{m}/2 + R_\mathrm{i} \simeq 20 R_1$.

33 On lit graphiquement pour les hautes fréquences une pente de $-40\,\mathrm{dB/décade}$. Dans la limite des hautes fréquences, $\omega \gg \omega_1, \omega_2$ donc

$$\underline{H} \sim \frac{1}{-\dfrac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}} \qquad \text{d'où} \qquad G_\mathrm{dB} \sim 20\log\frac{\omega_1\omega_2}{\omega^2} = 20\log(\omega_1\omega_2) - \underbrace{40}\log\omega\,.$$

34 On lit sur le diagramme de Bode que le gain est quasiment nul pour $\omega = 7\cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$: les fluctuations de température extérieure ne sont presque pas atténuées, autrement dit la température intérieure varie d'une amplitude presque égale à celle de la température extérieure.

D - Isolation extérieure

35 L'isolant est placé à l'extérieur de l'habitation, donc on a cette fois $R_1 = R_\mathrm{m}/2 + R_\mathrm{i}$ et $R_2 = R_\mathrm{m}/2$.

36 Dans le domaine de pulsations intermédiaires, on lit graphiquement une **pente de $-20\,\mathrm{dB/décade}$**. On a $R_1 \gg R_2$ et $C_\mathrm{mur} \gg C_\mathrm{air}$, soit $\omega_1 \sim 7\cdot 10^{-6}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} \ll \omega_2 \sim 2\cdot 10^{-2}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Dans ce domaine où $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$, la fonction de transfert équivalente est

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_1}\left(1 + \dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_2}\right) + \dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_2}} \simeq \frac{1}{1 + \dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_1} + \dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_2}} \sim \frac{1}{\dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_1}}$$

On en déduit

$$G_\mathrm{dB} \sim 20\log\frac{\omega_1}{\omega} = 20\log\omega_1 - \underbrace{20}\log\omega$$

37 On lit graphiquement $G_\mathrm{dB}(\omega_\mathrm{jour}) \simeq -20\,\mathrm{dB}$, ce qui signifie que l'amplitude des fluctuations journalières au sein de l'habitation est égale à un dixième ($10^{-20/20}$) de celles des fluctuations de température extérieure. Ainsi, la température intérieure de la maison varie relativement peu sous l'effet des alternances jour-nuit.

(cc) BY-NC-SA