BLAISE PASCAL
PT 2024-2025

Programme des colles semaines 10 et 11 : du 18 au 29 novembre

Mécanique des fluides

La colle commence par une application de cours extraite de la liste ci-dessous et se poursuit par un exercice.

Je rappelle que vous trouverez sur mon site la version complétée du poly de cours, les fiches de révision, ainsi que les corrigés des TD et des DM. N'hésitez surtout pas à me signaler s'il en manque !

Attention ! Les trinômes du groupe PT⋆ portent désormais les numéros 7 à 11.

Au programme

Chapitre 9 : Statique des fluides

Applications de cours et exercices.

Chapitre 10 : Description des écoulements

Applications de cours et exercices.

Chapitre 11 : Bilan d'énergie des écoulements, théorème de Bernoulli

Applications de cours et exercices.

- Le TD de ce chapitre sera fait en semaine 11, aussi pour la première semaine de la quinzaine **on se limitera à des exercices très proches des applications de cours**.
- Je rappelle que le programme de PT se limite aux écoulements en conduite. Tous les exercices visant à appliquer le théorème de Bernoulli à un écoulement externe (tube de Pitot notamment) sont hors programme, et ne tombent plus ni aux écrits ni aux oraux. Je n'en corrige donc plus en classe.

Révisions R4 : Théorèmes généraux de la mécanique

Applications de cours uniquement, **aucun exercice**.

Attention ! Je divise les révisions de mécanique en trois blocs. Pour cette semaine, uniquement les théorèmes « généraux », mais rien sur les satellites et planètes, ni à propos des particules chargées.

Applications de cours

Ces applications de cours sont des « briques élémentaires » des raisonnements à mener dans les exercices. Elles sont toutes traitées de manière exhaustive dans le cours ou les fiches de révision.

Le travail demandé consiste à se les approprier, afin d'être capable de les réinvestir dans un sujet d'écrit ou d'oral. Je n'attends pas des étudiants une maîtrise parfaite, encore moins un apprentissage par cœur, mais j'attends qu'ils les aient travaillées suffisamment pour les mener à bien en autonomie, c'est-à-dire savoir refaire seul les raisonnements, en réfléchissant mais sans aide de l'interrogateur.

Seuls les étudiants du groupe PT⋆ (trinômes 7 à 11) seront interrogés sur les applications marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles … mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !

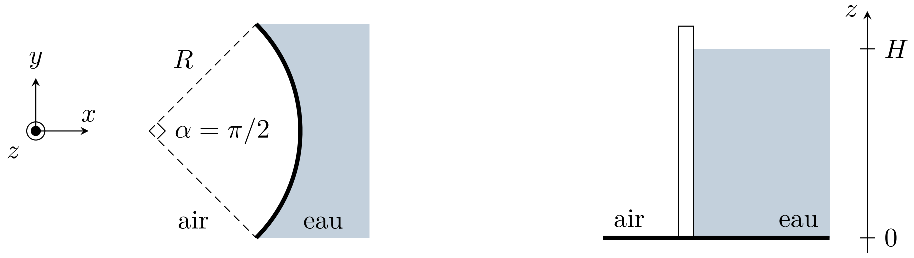
Une impasse notoire sur l'application de cours qui vous sera demandée mettra le colleur de mauvaise humeur et vous vaudra une note inférieure à la moyenne.

9.1 - Établir la relation de la statique des fluides dans le seul champ de pesanteur, en admettant que le champ de pression ne dépend que de la coordonnée verticale z.

9.2 - En partant de la relation de la statique des fluides, exprimer le champ de pression dans le modèle de l'atmosphère isotherme.

9.3 - On considère le barrage voûte schématisé ci-dessous, cylindrique de rayon R, d'angle d'ouverture $\alpha = \pi/2$, et rempli d'eau jusqu'à une hauteur H. Déterminer sans calcul (mais en justifiant !) la direction et le sens de la résultante des forces de pression exercées par l'eau et l'air sur le barrage, puis la calculer.

Donnée : on admettra le champ de pression dans l'eau $P(z) = P_0 + \rho_0 g(H - z)$.



10.1 - Dans une conduite cylindrique de rayon R, le champ des vitesses d'un écoulement laminaire est donné par le profil de Poiseuille :

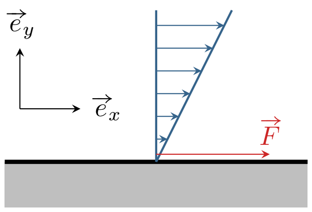
$$\vec{v}(r) = V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{e}_z\,.$$

Représenter le profil de vitesse sur une section droite de l'écoulement, et calculer le débit volumique.

10.2 - Considérons un écoulement au dessus d'une surface solide définissant le plan $y = 0$. Le champ de vitesse de l'écoulement est donné par

$$v(y) = v_0 \frac{y}{h} \vec{e}_x \qquad \text{avec} \qquad v_0 > 0\,.$$

Représenter la situation sur un schéma, en y indiquant la force exercée par le fluide sur une surface S du solide, puis exprimer cette force.

> ***Éléments de réponse :***
>
> 
>
>
> *À partir du tracé du champ de vitesse, on comprend que le fluide « tire » le solide vers la droite, ce qui permet d'identifier la direction et le sens de $\vec{F}$. On calcule ensuite sa norme en adaptant la formule du cours à la géométrie étudiée,*
>
> $$||\vec{F}|| = \eta \left| \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}(y{=}0) \right| S = \eta \frac{v_0}{h} S\,.$$
>
> *Enfin, on conclut en ajoutant le vecteur et le signe à la main à partir du schéma :*
>
> $$\vec{F} = +\eta \frac{v_0}{h} S \vec{e}_x\,.$$

10.3 - Pour un écoulement dont le champ de vitesse **en coordonnées cartésiennes** est donné par l'interrogateur, représenter le profil de vitesse sur une section droite de l'écoulement. Calculer la divergence et le rotationnel du champ de vitesse. En déduire si l'écoulement est compressible et tourbillonnaire.

> *Le but de cette question est la connaissance des expressions de* div *et* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$.

(★) 11.1 - Établir la relation de Bernoulli.

> *La démonstration attendue consiste à refaire le bilan d'énergie,* ***dans le cas particulier où les termes de puissance indiquée et de puissance visqueuse sont nuls****. La démonstration est notoirement très longue : les étudiants doivent non seulement faire un effort de mémorisation* ***mais aussi de concision*** *dans la présentation. Les points clés de la démonstration qui doivent absolument apparaître sont les suivants :*
>
> - ▷ *passage du système ouvert à un système fermé (comment $\delta\Sigma_e$ et $\delta\Sigma_s$ sont ils construits ?)*
> - ▷ *bilan de masse pour montrer que $\delta m_e = \delta m_s$;*
> - ▷ *les deux écritures de la variation d'énergie mécanique $dE_{m,f}$ du système fermé ;*
> - ▷ *l'expression du travail de transvasement en fonction des pressions ;*
> - ▷ *simplifications pour aboutir au résultat.*
>
> *Pour information, cette démonstration a déjà été demandée à un de mes étudiants en exercice de cours à l'oral.*

11.2 - Établir l'expression de la vitesse de vidange d'un réservoir rempli d'une hauteur d'eau H et percé au fond par un orifice de faible section (relation de Torricelli).

11.3 - Établir l'évolution des champs de pression et de vitesse dans un dispositif type Venturi.

> *Bien que très classique, le dispositif de Venturi n'est pas à connaître et pourra donc être rappelé si besoin. Je n'attends pas de longs calculs : l'étudiant doit combiner la conservation du débit et le théorème de Bernoulli pour montrer qu'un resserrement de section entraîne une hausse de vitesse et une chute de pression.*

(PT uniquement) 11.4 - Énoncer sans démonstration le théorème de Bernoulli généralisé en présence de pièces mobiles et de pertes de charge. L'interrogateur précisera la dimension voulue (puissance, pression, etc.), si l'écriture concerne une puissance ou un travail indiqué, et si les pertes de charge doivent s'exprimer sous forme de pression ou de hauteur. L'objectif est de jongler sans erreur avec les dimensions des différents termes.

> ***Exemples :***
>
> ▷ *Écriture en énergie massique, pertes de charge en hauteur d'eau équivalente :*
>
> $$\left(\frac{P_s}{\rho}+\frac{{v_s}^2}{2}+gz_s\right)-\left(\frac{P_e}{\rho}+\frac{{v_e}^2}{2}+gz_e\right)=w_i-g\,\Delta h^\star\,.$$
>
> ▷ *Écriture homogène à une pression :*
>
> $$\left(P_s+\frac{1}{2}\rho{v_s}^2+\rho gz_s\right)-\left(P_e+\frac{1}{2}\rho{v_e}^2+\rho gz_e\right)=\rho w_i-\Delta p^\star\,.$$
>
> ▷ *Voir l'exercice 2 du TD pour plus d'exemples !*

11.5 - Établir l'expression de la puissance disponible sur les turbines d'une centrale hydroélectrique de hauteur de chute h. On négligera les pertes de charge et on supposera que la pression et la vitesse du fluide sont les mêmes en entrée et en sortie de l'installation.

R5.1 - Établir l'expression de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires, d'abord dans le cas particulier d'un mouvement circulaire, puis dans le cas général.

> *Ne pas oublier que $r = cte \implies \dot r = 0$ et $\ddot r = 0$ pour un mouvement circulaire, ce qui simplifie grandement le calcul.*

R5.2 - Établir l'équation de la trajectoire d'un point matériel en chute libre sans frottement, lancé avec une vitesse $\vec{v}_0$ formant un angle α avec l'horizontale.

R5.3 - Établir l'équation du mouvement d'un pendule simple par application du PFD en coordonnées polaires (**la méthode est imposée**). On commencera par établir l'expression utile de l'accélération.

R5.4 - Établir l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique masse-ressort en exploitant la conservation de l'énergie mécanique (**la méthode énergétique est imposée**). La résoudre pour des conditions initiales $x(0) = X_0$ et $v(0) = V_0$.

> ***Méthode :*** *Schéma obligatoire pour définir les notations. Le système est la masse, on choisit le repère tel que la longueur du ressort soit x. Son énergie mécanique s'écrit*
>
> $$E_m=\frac{1}{2}m\dot x^2+\frac{1}{2}k(x-\ell_0)^2\,.$$
>
> *La masse n'est soumise qu'à des forces conservatives ou des forces qui ne travaillent pas, son énergie mécanique est donc constante. On en déduit*
>
> $$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=}m\dot x\ddot x+k(x-\ell_0)\dot x\underset{\substack{\uparrow\\ \text{cte}}}{=}0\,,$$
>
> *ce qui permet de retrouver l'équation du mouvement en simplifiant par $\dot x$.*
>
> *Pour trouver les constantes d'intégration, il est plus simple de raisonner sur la solution en cos + sin. Après calculs, on trouve*
>
> $$x(t)=\ell_0+(X_0-\ell_0)\cos(\omega_0 t)+\frac{V_0}{\omega}\sin(\omega_0 t)\,.$$

R5.5 - On lance à la verticale un projectile de masse m avec une vitesse v_0. Quelle hauteur maximale peut-il atteindre avant de retomber ?

> ***Méthode :*** *comme on cherche la hauteur « maximale », on néglige les frottements si bien que l'énergie mécanique du projectile se conserve. Il suffit d'écrire l'égalité de l'énergie mécanique aux deux points particuliers qui nous intéressent :*
>
> $$E_m \underset{\substack{\uparrow \\ CI}}{=} \frac{1}{2} m {v_0}^2 + 0 \underset{\substack{\uparrow \\ max}}{=} 0 + mgh_{max} \qquad \text{d'où} \qquad h_{max} = \frac{{v_0}^2}{2g}\,.$$

(★) R5.6 - Établir l'équation du mouvement du pendule pesant par application du théorème du moment cinétique et/ou par conservation de l'énergie mécanique (méthode au choix de l'étudiant).

> *Ne pas confondre pendule pesant (solide de moment d'inertie J dont le centre de masse se trouve à une distance d de l'axe de rotation) et pendule simple (point matériel attaché à un fil idéal de longueur ℓ).*

À quoi s'attendre pour le programme suivant ?

- Chapitre 12 : Champ électrostatique, théorème de Gauss ;
- Chapitre 13 : Potentiel électrostatique, condensateur ;
- Révisions R6 : Gravitation.