BLAISE PASCAL
PT 2022-2023

Programme des colles semaine 11 : du 28 novembre au 2 décembre

Mécanique des fluides

La colle commence par une question de cours extraite de la liste ci-dessous et se poursuit par un exercice. Je rappelle que vous trouverez sur mon site la version complétée du poly de cours, ainsi que les corrigés des TD et des DM. N'hésitez surtout pas à me signaler s'il en manque !

Au programme

Chapitre 8 : Statique des fluides

Questions de cours et exercices.

Chapitre 9 : Description des écoulements

Questions de cours et exercices.

Chapitre 10 : Énergétique des écoulements, théorème de Bernoulli

Questions de cours et exercices.

- ▷ Le programme se limite aux écoulements en conduite. Des exercices sur les écoulements externes peuvent être donnés (sonde de Pitot, aile d'avion, etc.) mais doivent alors être relativement guidés.
- ▷ Aucune formule n'est à connaître pour les pertes de charge, la relation de Darcy-Weisbach doit être systématiquement rappelée, mais les étudiants doivent savoir exploiter un diagramme de Moody ou équivalent pour déterminer un coefficient de perte de charge.

Révisions R5 : Théorèmes de la mécanique

Questions de cours. Des questions utilisant les connaissances de PTSI pourront être posées dans des exercices en lien avec le programme de PT.

Questions et applications de cours

Seuls les étudiants du groupe PT⋆ (trinômes 8 à 14) seront interrogés sur les questions marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !

8.1 - Établir la relation de la statique des fluides dans le seul champ de pesanteur, en admettant que le champ de pression ne dépend que de la coordonnée verticale z.

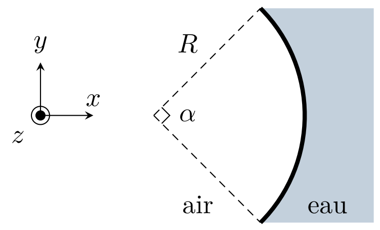
(★) 8.2 - Exprimer la résultante des forces de pression sur une particule fluide de volume $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Définir l'opérateur gradient et exprimer la densité volumique de force équivalente.

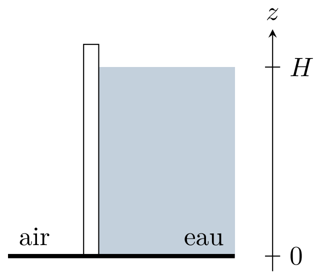
> *Cette démonstration est hors programme. Dans le contexte de la banque PT, la question pourrait éventuellement être posée mais elle serait alors guidée. Je demande néanmoins aux étudiants de l'apprendre pour travailler les développements limités, les dérivées partielles et le gradient ... qui sont eux au cœur du programme !*

8.3 - En partant de la relation de la statique des fluides, exprimer le champ de pression dans le modèle de l'atmosphère isotherme.

8.4 - On considère le barrage voûte schématisé ci-dessous, cylindrique de rayon R et de hauteur d'eau H. Déterminer (sans calcul mais en justifiant soigneusement) la direction et le sens de la résultante des forces de pression exercées par l'eau sur le barrage, puis la calculer.

Données :
- ▷ champ de pression dans l'eau : $P(z) = P_0 + \rho_0 g(H - z)$;
- ▷ angle d'ouverture $\alpha = \pi/2$.





9.1 - Dans une conduite cylindrique de rayon R, le champ des vitesses d'un écoulement laminaire est donné par le profil de Poiseuille :

$$\vec{v}(r) = V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{e}_z \,.$$

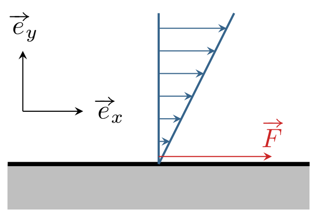
Représenter le profil de vitesse sur une section droite de l'écoulement, et calculer le débit volumique.

9.2 - Considérons un écoulement au dessus d'une surface solide définissant le plan $y = 0$. Le champ de vitesse de l'écoulement est donné par

$$v(y) = ky\,\vec{e}_x \qquad \text{avec} \qquad k > 0\,.$$

Représenter la situation sur un schéma, en y indiquant la force exercée par le fluide sur une surface S du solide. Calculer cette force.

Éléments de réponse :



À partir du tracé du champ de vitesse, on comprend que le fluide « tire » le solide vers la droite, ce qui permet d'identifier la direction et le sens de $\vec{F}$. On calcule ensuite sa norme en adaptant la formule du cours à la géométrie étudiée,

$$||\vec{F}|| = \eta \left|\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}(y{=}0)\right| S = \eta k S\,.$$

Enfin, on conclut en ajoutant le vecteur et le signe à la main à partir du schéma :

$$\vec{F} = +\eta k S\,\vec{e}_x\,.$$

9.3 - Pour un écoulement dont le champ de vitesse **en coordonnées cartésiennes** est donné par l'interrogateur, représenter le profil de vitesse sur une section droite de l'écoulement. Calculer la divergence et le rotationnel du champ de vitesse. En déduire si l'écoulement est compressible et tourbillonnaire.

Le but premier de cette question est la connaissance des expressions de div *et* $\overrightarrow{\text{rot}}$.

(★) 10.1 - Établir la relation de Bernoulli.

La démonstration attendue consiste à refaire le bilan d'énergie, ***dans le cas particulier où les termes de puissance indiquée et de puissance visqueuse sont nuls****. La démonstration est notoirement très longue : les étudiants doivent non seulement faire un effort de mémorisation* ***mais aussi de concision*** *dans la présentation. Les points clés de la démonstration qui doivent absolument apparaître sont les suivants :*

- ▷ *passage du système ouvert à un système fermé (comment $\delta\Sigma_e$ et $\delta\Sigma_s$ sont ils construits ?)*
- ▷ *bilan de masse pour montrer que $\delta m_e = \delta m_s$;*
- ▷ *les deux écritures de la variation d'énergie mécanique $\mathrm{d}E_{m,f}$ du système fermé ;*
- ▷ *l'expression du travail de transvasement en fonction des pressions ;*
- ▷ *simplifications pour aboutir au résultat.*

Pour information, cette démonstration a déjà été demandée à un de mes étudiants en exercice de cours à l'oral.

10.2 - Établir l'expression de la vitesse de vidange d'un réservoir rempli d'une hauteur d'eau H et percé au fond par un orifice de faible section (relation de Torricelli).

10.3 - Établir l'évolution des champs de pression et de vitesse dans un dispositif type Venturi.

Bien que très classique, le dispositif de Venturi n'est pas à connaître et pourra donc être rappelé si besoin. Je n'attends pas de longs calculs : l'étudiant doit combiner la conservation du débit et le théorème de Bernoulli pour montrer qu'un resserrement de section entraîne une hausse de vitesse et une chute de pression.

(PT uniquement) 10.4 - Énoncer sans démonstration le théorème de Bernoulli généralisé en présence de pièces mobiles et de pertes de charge. L'interrogateur précisera la dimension voulue (puissance, pression, etc.), si l'écriture concerne une puissance ou un travail indiqué, et si les pertes de charge doivent s'exprimer sous forme de pression ou de hauteur. L'objectif est de jongler sans erreur avec les dimensions des différents termes.

> ***Exemples :***
> ▷ *Écriture en énergie massique, pertes de charge en hauteur d'eau équivalente :*
> $$\left(\frac{P_s}{\rho} + \frac{{v_s}^2}{2} + g z_s\right) - \left(\frac{P_e}{\rho} + \frac{{v_e}^2}{2} + g z_e\right) = w_i - g\,\Delta h^\star\,.$$
> ▷ *Écriture homogène à une pression :*
> $$\left(P_s + \frac{1}{2}\rho {v_s}^2 + \rho g z_s\right) - \left(P_e + \frac{1}{2}\rho {v_e}^2 + \rho g z_e\right) = \rho w_i - \Delta p^\star\,.$$
> ▷ *etc.*

10.5 - Établir l'expression de la puissance disponible sur les turbines d'une centrale hydroélectrique de hauteur de chute h. On négligera les pertes de charge et on supposera que la pression et la vitesse du fluide sont les mêmes en entrée et en sortie de l'installation.

R5 - Préambule : même si elles ne feront pas l'objet de questions de cours posées en colle, vous devez absolument connaître les lois de force usuelles et, le cas échéant, les énergies potentielles associées.

R5.1 - Établir l'expression de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires, d'abord dans le cas particulier d'un mouvement circulaire, puis dans le cas général.

> *Ne pas oublier que $r = cte \Longrightarrow \dot r = 0$ et $\ddot r = 0$ pour un mouvement circulaire.*

(★) R5.2 - Rappeler **puis ensuite** démontrer l'expression de l'accélération dans le cas particulier d'un mouvement circulaire uniforme et la commenter.

> *On montre que $\vec a = -\dfrac{v^2}{R}\vec e_r$ ... ce qu'il faut retenir, et donc savoir énoncer sans démonstration !*
> ▷ *Bien que le mouvement soit uniforme, l'accélération n'est pas nulle ! ! ! En effet, le vecteur vitesse n'est pas constant, seule sa norme l'est.*
> ▷ *Elle est centripète, c'est-à-dire dirigée vers le centre de la trajectoire, ce qui est logique car l'accélération est* toujours *dirigée vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire.*

R5.3 - Établir l'équation de la trajectoire d'un point matériel en chute libre sans frottement, lancé avec une vitesse $\vec v_0$ formant un angle α avec l'horizontale.

R5.4 - Établir l'équation du mouvement d'un pendule simple par application du PFD en coordonnées polaires (**la méthode est imposée**).

R5.5 - Établir l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique masse-ressort en exploitant la conservation de l'énergie mécanique (**la méthode énergétique est imposée**). La résoudre pour des conditions initiales $x(0) = X_0$ et $v(0) = V_0$.

> ***Méthode :*** *Schéma obligatoire pour définir les notations. Le système est la masse, on choisit le repère tel que la longueur du ressort soit x. Son énergie mécanique s'écrit*
> $$E_m = \frac{1}{2} m \dot x^2 + \frac{1}{2} k (x - \ell_0)^2\,.$$
> *La masse n'est soumise qu'à des forces conservatives ou des forces qui ne travaillent pas, son énergie mécanique est donc constante. On en déduit*
> $$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} \underset{\substack{\uparrow\\ expr}}{=} m\dot x \ddot x + k(x - \ell_0)\dot x \underset{\substack{\uparrow\\ cte}}{=} 0\,,$$
> *ce qui permet de retrouver l'équation du mouvement en simplifiant par $\dot x$.*
>
> *Pour trouver les constantes d'intégration, il est plus simple de raisonner sur la solution en cos + sin. Après calculs, on trouve*
> $$x(t) = \ell_0 + (X_0 - \ell_0)\cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega}\sin(\omega_0 t)\,.$$

R5.6 - On lance à la verticale un projectile de masse m avec une vitesse v_0. Quelle hauteur maximale peut-il atteindre avant de retomber ?

> ***Méthode :*** *comme on cherche la hauteur « maximale », on néglige les frottements si bien que l'énergie mécanique du projectile se conserve. Il suffit d'écrire l'égalité de l'énergie mécanique aux deux points particuliers qui nous intéressent :*
>
> $$E_m \underset{\substack{\uparrow \\ CI}}{=} \frac{1}{2} m {v_0}^2 + 0 \underset{\substack{\uparrow \\ max}}{=} 0 + mgh_{max} \qquad d'où \qquad h_{max} = \frac{{v_0}^2}{2g}\,.$$

(★) R5.7 - Établir l'équation du mouvement du pendule pesant par application du théorème du moment cinétique et/ou par conservation de l'énergie mécanique (méthode au choix de l'étudiant).

> *Ne pas confondre pendule pesant (solide de moment d'inertie J dont le centre de masse se trouve à une distance d de l'axe de rotation) et pendule simple (point matériel attaché à un fil idéal de longueur ℓ).*

Et après ?

▷ Électrostatique.