BLAISE PASCAL
PT 2022-2023

Programme des colles semaine 19 : du 30 janvier au 3 février

Conduction thermique
Dosages

La colle commence par une question de cours extraite de la liste ci-dessous et se poursuit par un exercice.
Je rappelle que vous trouverez sur mon site la version complétée du poly de cours,
ainsi que les corrigés des TD et des DM. N'hésitez surtout pas à me signaler s'il en manque !

Au programme

Chapitre 15 : Conduction thermique

Questions de cours et exercices.

- **Attention !** Le programme est désormais explicitement limité aux géométries unidimensionnelles **cartésiennes**. Les exercices nécessitant une simple application de la loi de Fourier en coordonnées cylindriques ou sphériques (calcul de résistance thermique, profil de température, etc.) me semblent toujours pouvoir être donnés car les techniques sont les mêmes qu'en électromagnétisme, en revanche tous les bilans mésoscopiques dans une géométrie autre que cartésienne, en particulier pour démontrer l'équation de la chaleur, sont clairement exclus. Si nécessaire, l'équation de la chaleur tridimensionnelle est à connaître et l'expression du laplacien scalaire peut être fournie.
- Pour étoffer les exercices sur les bilans mésoscopiques, ne pas hésiter en revanche à considérer le cas de production interne de chaleur ou d'échange en surface par convection et/ou rayonnement. Toutefois, rien n'est à connaître à ce sujet, et les questions doivent donc être relativement guidées.

Révisions R9 : Dosages

Questions de cours uniquement. **Aucun exercice cette semaine.**

Questions et applications de cours

Seuls les étudiants du groupe PT* (trinômes 1 à 7) seront interrogés sur les questions marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !

15.1 - Établir le profil de température en régime permanent $T(x)$ dans une plaque plane d'épaisseur e, section S, faite dans un matériau de conductivité thermique λ.

> *La méthode utilisée (conservation du flux ou double intégration de l'équation de la chaleur) est laissée au choix de l'étudiant.*

15.2 - Établir l'expression de la résistance thermique d'une plaque plane d'épaisseur e, section S, faite dans un matériau de conductivité thermique λ.

15.3 - Établir l'équation de la chaleur à une dimension cartésienne.

15.4 - Considérons une plaque plane d'épaisseur e, faite d'un matériau de diffusivité D et soumise à « un échelon » de température ΔT. Au choix de l'interrogateur, exprimer ou bien la durée τ caractéristique du régime transitoire ou bien exprimer l'abscisse x à laquelle avance le front de diffusion au bout d'un temps t, en raisonnant par analyse dimensionnelle. Commenter les résultats.

> ***Élements de réponse :*** *On cherchera les expressions sous la forme $e^\alpha\, D^\beta\, \Delta T^\gamma$ ou équivalent. On insistera ensuite sur le fait que les résultats sont indépendants de ΔT ($\gamma = 0$), ce qui n'a rien d'intuitif, et sur la différence fondamentale entre un phénomène diffusif et un phénomène propagatif (ondulatoire) pour lequel on aurait $x = ct$.*

15.5 - On considère l'espace et le temps discrétisés avec des pas respectifs Δx et Δt. Établir en fonction des températures aux différents points l'expression discrétisée de la dérivée spatiale seconde

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_j, t_i)\,.$$

15.6 - Compléter le code Python ci-dessous permettant de résoudre l'équation de la chaleur unidimensionnelle par le schéma d'Euler explicite. Les températures sont stockées sous forme d'une liste de listes. On rappelle l'expression de la dérivée seconde discrétisée :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_j, t_i) = \frac{T(x_j + \Delta x, t_i) + T(x_j - \Delta x, t_i) - 2T(x_j, t_i)}{\Delta x^2}\,.$$

Avant toute écriture de code, on commencera par établir les relations de récurrence utiles.

```python
### Conditions aux limites données à gauche et à droite
Tg = 30
Td = 20

### Initialisation de la liste des températures
T = [[None for j in range(Nx)] for i in range(Nt)]
T[0] = [20 for j in range(Nx)]   # température initiale uniforme

### à compléter !
```

R9.1 - On dose un volume V d'une solution d'eau oxygénée (couple O_2/H_2O_2) de concentration C inconnue par une solution de permanganate de potassium (couple MnO_4^-/Mn^{2+}) de concentration C_0. Écrire l'équation de la réaction de titrage, puis exprimer la concentration C en fonction du volume équivalent V_E.

Réaction de titrage :

$$\mathrm{MnO_4^- + 8\,H^+ + 5\,e^- = Mn^{2+} + 4\,H_2O} \qquad (\times 2)$$
$$\mathrm{H_2O_2 = O_2 + 2\,H^+ + 2\,e^-} \qquad (\times 5)$$

$$\mathrm{2\,MnO_4^- + 5\,H_2O_2 + 6\,H^+ = 5\,O_2 + 2\,Mn^{2+} + 8\,H_2O}$$

À l'équivalence, les deux réactifs sont limitants donc (ne pas hésiter à faire un tableau d'avancement)

$$\begin{cases} C_0 V_E - 2\xi_E = 0 \\ CV - 5\xi_E = 0 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad C = \frac{5}{2}\frac{V_E}{V} C_0\,.$$

R9.2 - On fait réagir un volume V d'une solution d'eau de Javel (couple ClO^-/Cl^-) de concentration C inconnue avec un excès d'iodure de potassium (couple I_2/I^-). On dose ensuite le diiode formé au cours de la première réaction par une solution de thiosulfate de sodium (couple $S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}$) de concentration C_0. Écrire les équations des deux réactions mises en jeu, puis exprimer la concentration C en fonction du volume équivalent V_E.

Première réaction (totale mais lente) :

$$\mathrm{ClO^- + 2\,H^+ + 2e^- = Cl^- + H_2O}$$
$$\mathrm{2\,I^- = I_2 + 2e^-}$$

$$\mathrm{ClO^- + 2\,I^- + 2\,H^+ = Cl^- + I_2 + H_2O}$$

(remarque culturelle : cette écriture est « stoëchiométriquement correcte », mais pas chimiquement, car elle a en réalité lieu en milieu basique ... comme ça ne change rien pour la suite, inutile de s'en soucier dans cette question de cours !)

Deuxième réaction (totale et rapide) :

$$\mathrm{I_2 + 2\,e^- = 2\,I^-}$$
$$\mathrm{2\,S_2O_3^{2-} = S_4O_6^{2-} + 2\,e^-}$$

$$\mathrm{I_2 + 2\,S_2O_3^{2-} = 2\,I^- + S_4O_6^{2-}}$$

La première réaction permet de former une quantité de matière n_f de diiode, dont on montre à partir d'un tableau d'avancement (ou on le voit sur l'équation bilan) qu'elle est égale à la quantité de matière initiale CV en ions ClO^-. La deuxième réaction permet de déterminer cette quantité de matière n_f : à l'équivalence (ne pas hésiter à faire un deuxième tableau d'avancement),

$$\begin{cases} n_f - \xi_E = 0 \\ C_0 V_E - 2\xi_E = 0 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad n_f = \frac{C_0 V_E}{2}$$

d'où on déduit finalement

$$C = \frac{V_\mathrm{E}}{2V} C_0\,.$$

R9.3 - On fait réagir un volume V d'une solution de glucose (réducteur noté symboliquement $R{-}\mathrm{CHO}$ du couple $R{-}\mathrm{COO^-}/R{-}\mathrm{CHO}$) de concentration C inconnue avec une quantité de matière connue n_0 de diiode, supposé en excès. On dose ensuite le diiode restant par une solution de thiosulfate de sodium (couple $\mathrm{S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}}$) de concentration C_0. Écrire les équations des deux réactions mises en jeu, puis exprimer la concentration C en fonction du volume équivalent V_E.

Première réaction (totale mais lente) :

$$\begin{array}{c}
R{-}\mathrm{CHO} + \mathrm{H_2O} = R{-}\mathrm{COO^-} + 3\,\mathrm{H^+} + 2e^- \\
\mathrm{I_2} + 2e^- = 2\,\mathrm{I^-} \\
\hline
\mathrm{I_2} + R{-}\mathrm{CHO} + \mathrm{H_2O} = 2\,\mathrm{I^-} + R{-}\mathrm{COO^-} + 3\,\mathrm{H^+}
\end{array}$$

Deuxième réaction (totale et rapide) :

$$\begin{array}{c}
\mathrm{I_2} + 2\,e^- = 2\,\mathrm{I^-} \\
2\,\mathrm{S_2O_3^{2-}} = \mathrm{S_4O_6^{2-}} + 2\,e^- \\
\hline
\mathrm{I_2} + 2\,\mathrm{S_2O_3^{2-}} = 2\,\mathrm{I^-} + \mathrm{S_4O_6^{2-}}
\end{array}$$

À partir d'un tableau d'avancement, on montre qu'à la fin de la première réaction, il reste une quantité de matière de diiode n_r qui vaut $n_\mathrm{r} = n_0 - CV$. La deuxième réaction permet de déterminer cette quantité de matière n_r : à l'équivalence (ne pas hésiter à faire un deuxième tableau d'avancement),

$$\begin{cases} n_r - \xi_E = 0 \\ C_0 V_E - 2\xi_E = 0 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad n_r = \frac{C_0 V_E}{2}$$

d'où on déduit finalement

$$C = \frac{1}{V}\left(n_0 - \frac{C_0 V_E}{2}\right)\,.$$

Et après ?

- ▷ Chapitre 16 : Diagrammes thermodynamiques ;
- ▷ Chpaitre 17 : Thermodynamique industrielle ;
- ▷ Révisions R10 : Optique géométrique et ondes mécaniques.