



Systèmes linéaires

Analyse spectrale et filtrage

Exercice 1 : Filtrage d'un signal

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 1 | 🔄

- ▷ Décomposition de Fourier ;
- ▷ Signal de sortie d'un filtre.

1 Voir figure 1.

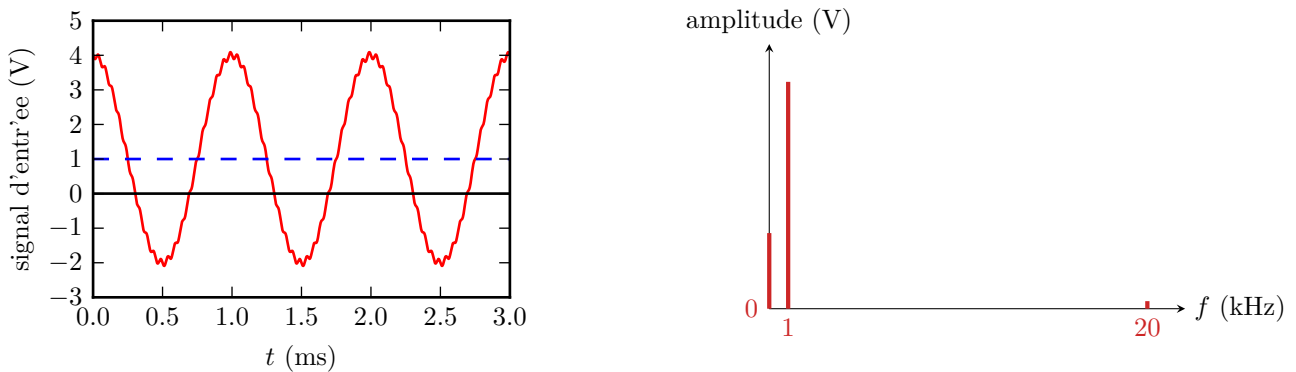


Figure 1 – Signal d'entrée.

2 En posant $f = 1$ kHz et $A = 1$ V, le signal d'entrée s'écrit

$$e(t) = A + 3A \cos(2\pi ft) + \frac{A}{10} \cos\left(40\pi ft + \frac{\pi}{2}\right).$$

3 Voir figure 2. Sans plus de précision, les filtres sont supposés idéaux, c'est-à-dire qu'ils transmettent (resp. coupent) parfaitement les composantes qui appartiennent (resp. qui n'appartiennent pas) à leur bande passante, et de gain unité dans leur bande passante.

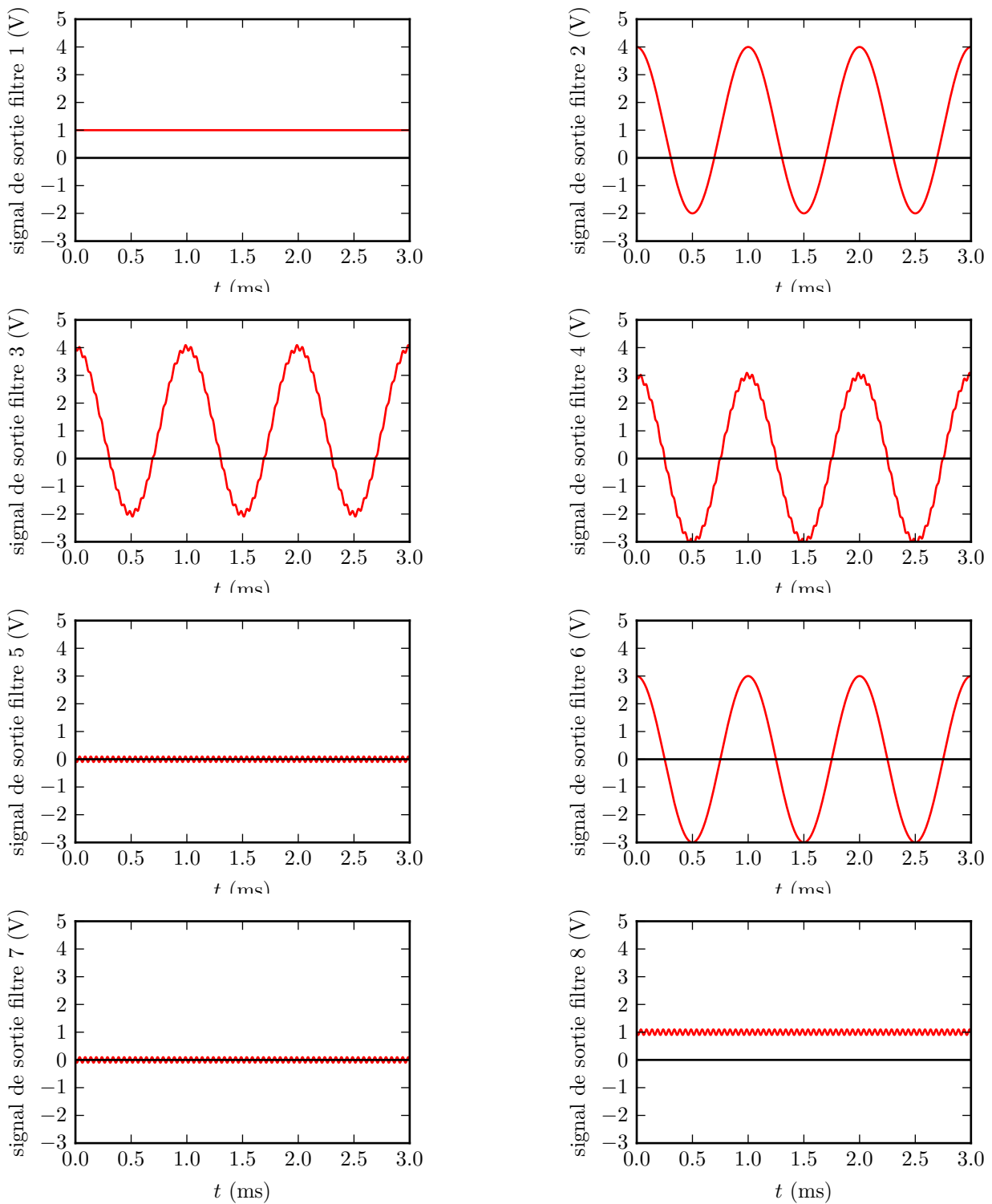


Figure 2 – Signaux de sortie des différents filtres.

Exercice 2 : Filtre RLC

oral banque PT | 💡 3 | ✂️ 1



- ▷ Fonction de transfert ;
- ▷ Diagramme de Bode ;
- ▷ Signal de sortie d'un filtre.

1 Dans la limite très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil et C à un interrupteur ouvert, donc l'intensité dans la branche est nulle, et ainsi $v_s = 0 + 0$. Dans la limite très haute fréquence, C est équivalent à un fil donc on a directement $v_s = v_e$.

↪ le filtre est un passe-haut.

2 Diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{Z_{RL}}{Z_{RL} + Z_C} = \frac{R + jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

Pour passer à la forme canonique, on multiplie en haut et en bas par $jC\omega$,

$$\underline{H} = \frac{jRC\omega - LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

On identifie l'opération à faire en comparant la forme canonique à l'expression que l'on a : le dénominateur n'est pas fractionnaire.

Pour avancer, on peut proposer à l'examinateur d'identifier directement ω_0 et Q car il s'agit d'un RLC série, donc d'un circuit de référence. S'il refuse, il faut alors faire le calcul ...

Par identification du dénominateur avec la forme canonique, on en déduit

$$-LC\omega^2 = -x^2 = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad \text{soit} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et

$$jRC\omega = \frac{jx}{Q} = \frac{j\omega}{Q\omega_0} \quad \text{soit} \quad Q = \frac{1}{RC\omega_0} \quad \text{d'où} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

3 En très basse fréquence,

$$\underline{H} \sim \frac{jx}{Q} = \frac{jx}{1} \quad \text{d'où} \quad G_{dB} \sim 20 \log x - 20 \log Q,$$

la pente est donc de **+20 dB/décade**.

En très haute fréquence,

$$\underline{H} \sim \frac{-x^2}{-x^2} = 1 \quad \text{d'où} \quad G_{dB} = 0$$

ce qui est conforme avec **une asymptote horizontale**.

Avec l'ordonnée à l'origine de l'asymptote TBF ($x = 10^0 = 1$), $G_{dB} = -20 \log Q = -20$ dB, on déduit $\log Q = 1$ soit $Q = 10$. On peut aussi utiliser le fait que $G_{TBF} = 0$ lorsque $x = Q$, ou encore exprimer la valeur exacte de $|\underline{H}(x=1)|$ en fonction de Q .

Bien que le filtre soit d'ordre 2, il n'a pas d'asymptote de pente ± 40 dB/décade : cela n'a rien de contradictoire, et vient ici du fait qu'on mesure la sortie aux bornes d'une association de dipôles.

4 La question n'est pas simple : changer R modifie la valeur de Q , mais cela a un impact énorme sur le diagramme de Bode, d'une part via l'intermédiaire de l'ordonnée à l'origine de l'asymptote basse fréquence et d'autre part car elle contraint l'existence ou non d'une résonance. Une illustration est donnée sur la figure 3.

Le signal carré est la dérivée du signal triangulaire. Le facteur de qualité du filtre est donc tel que tout le spectre du signal soit dans le domaine très basse fréquence du filtre : comme la pente de l'asymptote est de +20 dB/décade, il se comporte en dérivateur.

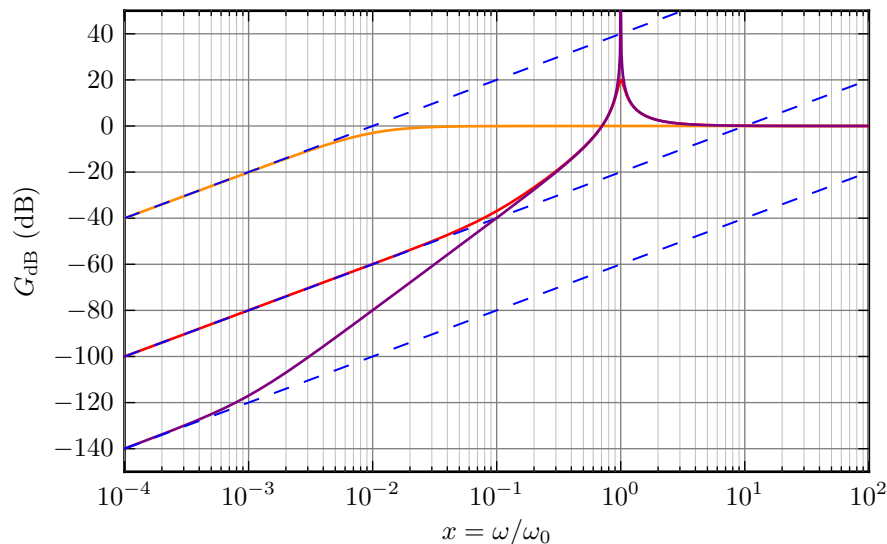


Figure 3 – Diagrammes de Bode asymptotique d'un filtre RLC. Les trois diagrammes sont tracés pour la même fonction de transfert, la même pulsation propre, seule la valeur du facteur de qualité est modifiée : elle vaut 0,01 pour la courbe orange, 10 pour la courbe rouge (cas de l'énoncé) et 1000 pour la courbe violette. Version couleur sur le site de la classe.

Si l'on observe des impulsions, cela signifie que les variations brusques du signal, associées aux hautes fréquences, sont sensiblement mieux transmises que les variations lentes, associées aux basses fréquences et qui décrivent son allure globale. Le facteur de qualité est donc tel que les basses fréquences du spectre soient coupées et les hautes fréquences transmises.

Par exemple, si la fréquence fondamentale du signal est telle que $x = 1 \cdot 10^{-3}$, alors la première situation pourrait correspondre à la courbe rouge de la figure 3, et la deuxième à la courbe orange.

Exercice 3 : Signal de sortie d'un filtre

adapté oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2



- ▷ Analyse de Fourier ;
- ▷ Diagramme de Bode ;
- ▷ Signal de sortie d'un filtre.

⚠ ⚠ ⚠ **Attention !** Les deux voies de l'oscilloscope ne sont pas représentées à la même échelle !

1 Le signal créneau a une **amplitude de 2,5 V**, une **période de 1 ms** soit une **fréquence de 1 kHz** et une **valeur moyenne nulle**.

2 On constate sur le chronogramme que le signal créneau est impair, $v_e(-t) = -v_e(t)$, soit en termes de développement de Fourier

$$-\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2\pi k ft) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(2\pi k ft) = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2\pi k ft) - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(2\pi k ft)$$

soit à tout instant

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(2\pi k ft) = 0$$

ce qui ne peut être vérifié que si

$$\boxed{\forall k, B_k = 0.}$$

En termes mathématiques, on utilise le fait que les fonctions sinusoidales constituent une famille libre. Physiquement, un signal est constamment nul si et seulement si toutes les harmoniques de ce signal sont d'amplitude nulles.

3 Le diagramme de Bode du filtre est celui d'un filtre passe-bande dont la fréquence centrale est $f_0 = 3 \text{ kHz}$.

4 Si on modélise le signal de sortie par une unique sinusoïde, on lit graphiquement que celle-ci aurait une période égale à un tiers de la période du créneau, soit une **fréquence $3f = 3 \text{ kHz}$** , et une amplitude que l'on peut estimer **égale à 1 V** , en tenant compte de l'échelle différente. Cette sinusoïde correspond à l'harmonique de rang $k = 3$ du signal d'entrée.

5 Les deux harmoniques « candidates » sont celles dont la fréquence est la plus proche de la fréquence centrale du filtre, car ce seront les moins atténuées par le filtre : les deux harmoniques envisageables sont donc le fondamental $k = 1$ et l'harmonique de rang $k = 5$.

6 On constate graphiquement que la « sinusoïde » envisagée précédemment a une amplitude qui varie à la même fréquence que le créneau. La deuxième harmonique à considérer serait donc le fondamental $k = 1$ du créneau. Retrouvons ce résultat à partir du diagramme de Bode.

▷ pour le fondamental $k = 1$: $f = 1 \text{ kHz}$ donc $G_{\text{dB}} = -22 \text{ dB}$, si bien que dans le signal de sortie l'harmonique a une amplitude

$$A_{1,s} = |H(1 \text{ kHz})| A_{1,e} = 10^{-22/20} \frac{4A}{\pi}.$$

▷ pour l'harmonique $k = 5$: $f = 5 \text{ kHz}$, donc $G_{\text{dB}} = -15 \text{ dB}$, si bien que dans le signal de sortie l'harmonique a une amplitude

$$A_{5,s} = |H(5 \text{ kHz})| A_{5,e} = 10^{-15/20} \frac{4A}{5\pi}.$$

Finalement, le rapport des amplitudes de ces deux harmoniques vaut

$$\frac{A_{1,s}}{A_{5,s}} = \frac{10^{-22/20}}{10^{-15/20}} \times 5 = 2,2,$$

ce qui confirme que le fondamental joue un rôle plus important dans le signal de sortie que l'harmonique $k = 5$.

7 L'amplitude de toutes les harmoniques de rang $k \geq 7$ est inférieure à celle de rang 5 dans le signal d'entrée, et on constate sur le diagramme de Bode qu'elles sont encore plus atténuées par le filtre que l'harmonique de rang 5. Comme l'harmonique de rang 5 est déjà négligée, celles de rang $k \geq 7$ le sont forcément aussi.

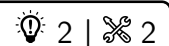
8 On calcule d'abord les valeurs des amplitudes ... puis on trace !

Harmonique k	Fréquence f_k (kHz)	Amplitude en entrée $4A/k\pi$ (V)	Amplitude en sortie $10^{G_{\text{dB}}(f_k)/20} \times 4A/k\pi$ (V)
1	1	3,2	0,24
3	3	1,1	2,2
5	5	0,64	0,12
7	7	0,45	0,05

On remarque que le caractère négligeable des harmoniques 5 et 7 s'avère finalement assez discutable !

Liens entre représentations temporelle et fréquentielle

Exercice 4 : Obtention d'une équation différentielle



▷ Lien entre représentations temporelle et fréquentielle.

Raisonnons à partir de la figure 4.

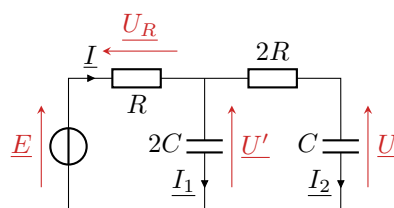


Figure 4 – Schéma des notations.

D'après la loi des nœuds,

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

et en utilisant les admittances,

$$\frac{1}{R} \underline{U}_R = 2jC\omega \underline{U}' + jC\omega \underline{U}.$$

Pour limiter les fractions on multiplie directement par R ,

$$\underline{U}_R = 2j\omega\tau \underline{U}' + j\omega\tau \underline{U}$$

D'après la loi des mailles dans la maille de droite,

$$\underline{U}' = \underline{U} + 2R\underline{I}_2 = \underline{U} + 2jRC\omega \underline{U}$$

et dans la maille de gauche

$$\underline{U}_R = \underline{E} - \underline{U}' = \underline{E} - \underline{U} - 2jRC\omega \underline{U}.$$

En regroupant et en identifiant $RC = \tau$,

$$\underline{E} - \underline{U} - 2j\omega\tau \underline{U} = 2j\omega\tau (\underline{U} + 2j\omega\tau \underline{U}) + j\omega\tau \underline{U}$$

soit

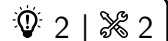
$$\underline{E} = \underline{U} + 5j\omega\tau \underline{U} + 4\tau^2(j\omega)^2 \underline{U}$$

En identifiant les puissances de $j\omega$ à l'ordre des dérivées pour retourner dans le domaine des représentations réelles, on aboutit à

$$e = u + 5\tau \frac{du}{dt} + 4\tau^2 \frac{d^2u}{dt^2}$$

ce qui est bien le résultat escompté.

Exercice 5 : Mesure d'impédance par détection synchrone



- ▷ Fonction de transfert ;
- ▷ Signal de sortie d'un filtre ;
- ▷ Lien entre représentations temporelle et fréquentielle.

1 • **Nature du filtre** : Une cellule RC série forme un filtre passe-bas du premier ordre lorsque la tension de sortie est mesurée aux bornes du condensateur. Du point de vue temporel, ce filtre peut servir à lisser un signal (p.ex. élimination du bruit), mais aussi comme filtre moyenneur et intégrateur si la fréquence du signal est très supérieure à la fréquence de coupure du filtre.

Attention avec le comportement intégrateur : certes, le signal de sortie est proportionnel à l'intégrale du signal d'entrée ... mais au prix d'une forte atténuation. Pour réaliser un intégrateur, on préférera donc systématiquement utiliser un montage actif, du type du montage intégrateur à ALI qui sera discuté dans le cours dédié.

• **Fonction de transfert** : par un pont diviseur, sa fonction de transfert s'écrit

$$\underline{H} = \frac{v_s}{v_3} = \frac{1/jC_1\omega}{R_1 + 1/jC_1\omega} \quad \text{d'où} \quad \underline{H} = \frac{1}{1 + jR_1C_1\omega}$$

On identifie la pulsation de coupure $\omega_c = 1/R_1C_1$, ce qui permet d'écrire

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_c}.$$

• **Diagramme de Bode** : dans la limite basse fréquence,

$$\underline{H} \sim \frac{1}{1} \quad \text{donc} \quad G_{\text{dB}} \sim 20 \log 1 = 0.$$

Dans la limite haute fréquence,

$$\underline{H} \sim \frac{1}{j\omega/\omega_c} = -j \frac{\omega_c}{\omega} \quad \text{donc} \quad G_{\text{dB}} \sim 20 \log \frac{\omega_c}{\omega} = -20 \log \frac{\omega}{\omega_c},$$

le diagramme de Bode présente donc une pente de -20 dB/décade.

• **Tracé** : cf cours de PTSI!

2 Comme l'impédance d'entrée du multiplieur est infinie, alors \underline{Z} et R_0 sont traversés par le courant i , donc

$$v_1(t) = R_0 i = R_0 I_0 \cos(\omega t).$$

et

$$\underline{V}_2 = \underline{Z} I_0 e^{j\omega t} = (X + jY) (\cos \omega t + j \sin(\omega t)) I_0 \quad \text{d'où} \quad v_2(t) = \text{Re } \underline{V}_2 = X I_0 \cos(\omega t) - Y I_0 \sin(\omega t).$$

3 On déduit de ce qui précède

$$v_3(t) = k v_1(t) v_2(t) = k R_0 X I_0^2 \cos^2(\omega t) - k R_0 Y I_0^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t).$$

Or $\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega t))$ et $\cos(\omega t) \sin(\omega t) = \frac{1}{2} \sin(2\omega t)$, d'où

$$v_3(t) = \frac{1}{2} k R_0 X I_0^2 + \frac{1}{2} k R_0 X I_0^2 \cos(2\omega t) - \frac{1}{2} k R_0 Y I_0^2 \sin(2\omega t).$$

Son spectre est donc composé d'un pic à fréquence nulle et d'un pic à la pulsation 2ω (dont il n'est pas immédiat de déterminer l'amplitude). On constate de l'**enrichissement spectral**, dû au fait que la multiplication de signaux est une opération non-linéaire.

4 Pour que v_s soit quasi-constant, il faut que la composante à 2ω soit coupée par le filtre, ce qui est le cas si

$$\omega_c \ll \omega \quad \text{soit} \quad \frac{1}{R_1 C_1} \ll \omega \quad \text{et} \quad R_1 C_1 \gg \frac{1}{\omega}.$$

Le filtre agit alors en tant que moyennneur du signal v_3 . Comme tout est connu, mesurer la valeur du signal de sortie permet de déterminer X .

5 Si on met un condensateur C_0 à la place de R_0 , alors

$$\underline{V}'_2 = \frac{1}{jC_0\omega} I_0 e^{j\omega t} = \frac{I_0}{C\omega} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

ce qui permet d'écrire

$$v'_2(t) = \frac{I_0}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{I_0}{C\omega} \sin(\omega t).$$

On a alors

$$v'_3(t) = \frac{kX I_0^2}{C\omega} \cos(\omega t) \sin(\omega t) - \frac{Y I_0^2}{C\omega} \sin^2(\omega t).$$

La logique est la même que précédemment, puisque $\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t))$.

Problème ouvert

Exercice 6 : Dipôles masqués

oral CCINP MP | 💡 3 | ✂ 1



▷ Résolution de problème.

- ▷ Comme le courant dans le circuit est non nul en régime continu, alors le condensateur est forcément monté en parallèle d'un autre dipôle;
- ▷ Comme la tension de sortie est nulle en basse fréquence, elle est forcément mesurée aux bornes de la bobine;
- ▷ Comme la tension de sortie est nulle en haute fréquence, elle est forcément mesurée aux bornes du condensateur.
 - ↪ Le dipôle D_2 est nécessairement une association parallèle entre la bobine et le condensateur;
 - ↪ Le dipôle D_1 est donc forcément la résistance : s'il s'agissait d'un fil on aurait $s = e$ à toute fréquence;

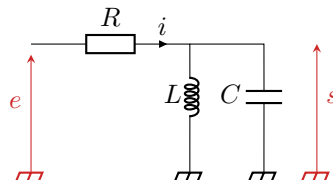


Figure 5 – Les dipôles démasqués !.

↪ Le montage est donc celui de la figure 5.

- **Analyse en régime continu** : la bobine équivaut à un fil, donc la tension aux bornes de la résistance est directement égale à E , d'où avec la loi d'Ohm

$$E = RI \quad \text{soit} \quad \boxed{R = \frac{E}{I} = 3 \text{ k}\Omega .}$$

- **Analyse en régime sinusoïdal** : l'admittance équivalente de l'association de la bobine et du condensateur est

$$\underline{Y} = \frac{1}{jL\omega} + jC\omega .$$

Avec un pont diviseur de tension,

$$\underline{H} = \frac{1/\underline{Y}}{R + 1/\underline{Y}} = \frac{1}{1 + \underline{Y}R} \quad \text{soit} \quad \underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{R}{jL\omega} + jRC\omega} .$$

On peut donc identifier avec la forme canonique donnée,

$$\begin{cases} \frac{R}{jL\omega} = -\frac{jQ\omega_0}{\omega} \\ jRC\omega = jQ\frac{\omega}{\omega_0} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} Q\omega_0 = \frac{R}{L} \\ \frac{Q}{\omega_0} = RC \end{cases}$$

D'après les valeurs expérimentales,

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 6,3 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 5 .$$

On en déduit

$$\boxed{L = \frac{R}{Q\omega_0} = 95 \text{ mH} \quad \text{et} \quad C = \frac{Q}{\omega_0 R} = 2,7 \cdot 10^{-7} \text{ F} .}$$