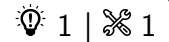


# Transformations infinitésimales en thermodynamique

## Transitoires thermiques

### Exercice 1 : Chauffage isobare d'un gaz parfait



▷ *Transitoire thermique.*

**1** Appliquons le premier principe au gaz entre les instants  $t$  et  $t + dt$ . La transformation est isobare avec  $p = p_0$  ( $p$  pression du gaz) grâce au piston libre de coulisser. Le bilan d'enthalpie s'écrit

$$\frac{dH}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} RI^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{GP}}}{=} C_P \frac{dT}{dt}.$$

d'où on déduit

$$\frac{dT}{dt} = \frac{RI^2}{C_P}$$

et en utilisant l'expression de  $R(T)$  on obtient l'équation différentielle

$$\frac{dT}{dt} = \frac{R_0 I^2}{C_P T_0} T = \frac{T}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{C_P T_0}{R_0 I^2}.$$

Cette équation s'intègre en

$$T(t) = A e^{+t/\tau},$$

et à l'instant initial

$$T(0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} T_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} A$$

d'où on déduit finalement

$$T(t) = T_0 e^{+t/\tau}.$$

*Si on écrit l'équation différentielle sous forme canonique, on constate que les deux préfacteurs sont de signe différents : le système est instable (cf. chapitre sur les systèmes linéaires), il est donc logique de trouver une solution divergente.*

**2** On en déduit

$$V(t) = \frac{nRT(t)}{p_0} = \frac{nRT_0}{p_0} e^{+t/\tau} \quad \text{soit} \quad V(t) = V_0 e^{+t/\tau}.$$

### Exercice 2 : Canon à neige

oral banque PT |  2 |  2 | 



▷ *Transitoire thermique;*  
▷ *Changement d'état.*

**1** La goutte d'eau est un système fermé, en transformation monobare avec équilibre mécanique, qui n'échange d'énergie que par transfert thermique.

Bilan d'enthalpie entre  $t$  et  $t + dt$  :

$$dH \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} m_0 c dT \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} -\phi dt = -h(T - T_a) S dt.$$

| Il y a un signe car  $\phi$  est une puissance cédée.

La goutte étant sphérique de rayon  $R$  constant, on en déduit

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \mu c dT = -h(T - T_a) \times 4\pi R^2 dt$$

et finalement

$$\boxed{\mu c R \frac{dT}{dt} = -3h(T - T_a)}.$$

**2** Cette relation se réécrit

$$\frac{dT}{dt} + \frac{3h}{\mu c R} T = \frac{3h}{\mu c R} T_a,$$

où on identifie le temps caractéristique

$$\boxed{\tau = \frac{\mu c R}{3h}}.$$

Les solutions de cette équation s'écrivent

$$T = T_a + A e^{-t/\tau}.$$

As-tu bien pensé à la solution particulière  $T = T_a$ ? Pour la retrouver : le second membre est constant, donc la solution particulière  $T_{part}$  aussi, et on la trouve directement sur l'équation différentielle :

$$0 + \frac{T_{part}}{\tau} = \frac{T_a}{\tau}.$$

La condition initiale donne

$$T(0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{T_0} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{T_a} + A \quad \text{donc} \quad A = T_0 - T_a.$$

Finalement,

$$T = T_a + (T_0 - T_a) e^{-t/\tau}$$

ce qui se met bien sous la forme cherchée,

$$\boxed{\frac{T - T_a}{T_0 - T_a} = e^{-t/\tau}}.$$

À l'instant  $t_1$ ,

$$e^{-t_1/\tau} = \frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} \quad \text{donc} \quad t_1 = -\tau \ln \frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} \quad \text{soit} \quad \boxed{t_1 = \tau \ln \frac{T_0 - T_a}{T_1 - T_a} = 4,0 \text{ s.}}$$

**3** La transformation est cette fois supposée instantanée et implique des changements macroscopiques. Elle est supposée sans travail, adiabatique et monobare donc d'après le premier principe

$$\Delta H = 0.$$

L'eau est partiellement solidifiée, on en déduit donc que la température finale est égale à la température de co-existence  $T_{fus} = 0^\circ\text{C}$ . Il y a donc simultanément solidification et échauffement de l'eau. On raisonne donc sur la transformation auxiliaire, fictive, suivante, dans laquelle les deux phénomènes ont lieu successivement :

▷ dans une première étape, toute l'eau passe de  $T_1$  à  $T_{fus}$  ;

▷ dans une deuxième étape, une masse  $(1 - x)m$  se solidifie, ce qui laisse bien une fraction massique  $x$  de liquide.

Le bilan enthalpique s'écrit

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = mc(T_{fus} - T_1) + (1 - x)m(-\ell_{fus}).$$

| L'enthalpie de fusion est l'opposée de l'enthalpie de solidification.

Par identification des deux expressions de  $\Delta H$ , on en déduit

$$(x - 1)\ell_{fus} = -c(T_{fus} - T_1)$$

et ainsi

$$\boxed{x = 1 - \frac{c(T_{fus} - T_1)}{\ell_{fus}} = 0,94}.$$

4 Procédons au bilan enthalpique d'une transformation infinitésimale de durée  $dt$  au cours de laquelle une masse  $dm$  solidifie à température  $T = T_{\text{fus}}$  constante. Le bilan enthalpique devient

$$dH \underset{\substack{\uparrow \\ \text{solidification}}}{=} -dm \ell_{\text{fus}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er ppe}}}{=} -h(T_{\text{fus}} - T_a) 4\pi R^2 dt.$$

ce que l'on peut réécrire

$$dm = \frac{h(T_{\text{fus}} - T_a) 4\pi R^2}{\ell_{\text{fus}}} dt$$

avant d'intégrer

$$\int_{(1-x)m}^m dm = \frac{h(T_{\text{fus}} - T_a) 4\pi R^2}{\ell_{\text{fus}}} \int_{t_1}^{t_2} dt$$

soit

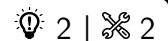
$$m - (1-x)m = \frac{h(T_{\text{fus}} - T_a) 4\pi R^2}{\ell_{\text{fus}}} (t_2 - t_1)$$

et on en déduit

$$t_2 = t_1 + \frac{x R \ell_{\text{fus}} \mu}{3h(T_{\text{fus}} - T_a)} = 21 \text{ s}.$$

On peut bien sûr intégrer « comme d'habitude », avec une constante d'intégration que l'on détermine à l'aide des conditions initiales ... mais attention, les conditions initiales de cette deuxième phase ne sont pas en  $t = 0$  mais en  $t = t_1$ . Dans un tel cas, raisonner par séparation des variables est moins risqué sur la prise en compte des conditions initiales.

### Exercice 3 : Chauffage par une pompe à chaleur



- ▷ Transitoire thermique;
- ▷ Machine thermique.

Une difficulté importante de l'exercice vient du fait qu'il faut raisonner alternativement sur deux systèmes différents : le fluide caloporteur et l'air intérieur de la maison. Dans un tel cas, pour bien poser les notations et éviter des erreurs de signes, rien ne vaut un beau diagramme des échanges, voir figure 1, qui a toute sa place sur une copie ou sur un tableau en colle et à l'oral.

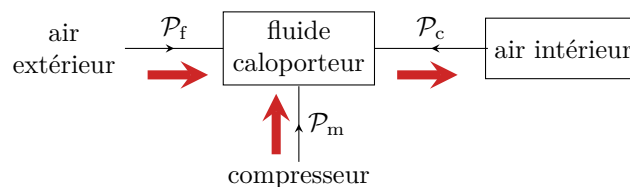


Figure 1 – Diagramme des échanges de la PAC. Les flèches noires indiquent l'orientation conventionnelle des échanges énergétiques, les flèches rouges leur sens réel.

1 Comme la PAC fonctionne en régime permanent, alors l'énergie totale du fluide caloporteur est constante. Le bilan d'énergie interne du fluide caloporteur s'écrit donc

$$dU \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} \mathcal{P}_f dt + \mathcal{P}_c dt + \mathcal{P}_m dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RP}}}{=} 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathcal{P}_f + \mathcal{P}_c + \mathcal{P}_m = 0.} \quad (1)$$

Par ailleurs, comme le fluide évolue de manière réversible, il n'y a pas de création d'entropie. Le bilan d'entropie s'écrit donc

$$dS \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2nd P}}}{=} \frac{\mathcal{P}_c dt}{T_c} + \frac{\mathcal{P}_f dt}{T_f} + \delta S_c \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RP}}}{=} 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{\mathcal{P}_c}{T_c} + \frac{\mathcal{P}_f}{T_f} = 0.} \quad (2)$$

2 Au cours d'une évolution infinitésimale, l'intérieur de la maison cède au fluide caloporteur le transfert thermique infinitésimal  $-\mathcal{P}_c dt$ . Le bilan d'énergie interne de l'intérieur de la maison s'écrit donc

$$dU \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} -\mathcal{P}_c dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} C dT_c, \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{dT_c}{dt} = -\frac{\mathcal{P}_c}{C}.} \quad (3)$$

3 D'après la relation (2),

$$\mathcal{P}_f = -\frac{T_f}{T_c} \mathcal{P}_c,$$

donc en injectant dans la relation (1)

$$\left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right) \mathcal{P}_c + \mathcal{P}_m = 0 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{P}_c = -\frac{\mathcal{P}_m}{C(1 - T_f/T_c)}$$

ce qui conduit avec la relation (3) au résultat attendu,

$$\boxed{\left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right) \frac{dT_c}{dt} = \frac{\mathcal{P}_m}{C} .}$$

4 Par séparation des variables,

$$dT_c - T_f \frac{dT_c}{T_c} = \frac{\mathcal{P}_m}{C} dt \quad \text{soit} \quad \int_{T_0}^{T_0+\Delta T} dT_c - T_f \int_{T_0}^{T_0+\Delta T} \frac{dT_c}{T_c} = \frac{\mathcal{P}_m}{C} \int_0^\tau dt$$

ce qui donne en procédant aux intégrations

$$\Delta T - T_f \ln \frac{T_0 + \Delta T}{T_0} = \frac{\mathcal{P}_m}{C} \tau$$

et ainsi

$$\boxed{\tau = \frac{C}{\mathcal{P}_m} \left[ \Delta T - T_f \ln \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) \right] .}$$

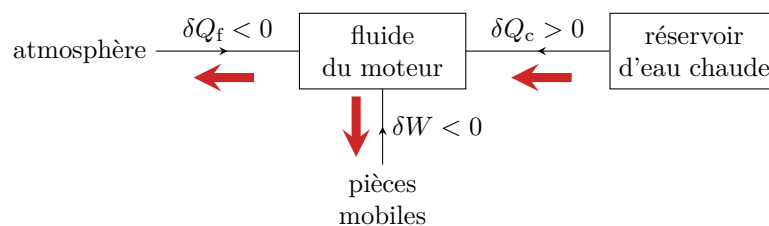
### Exercice 4 : Moteur avec pseudo-source

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2



- ▷ Transformations infinitésimale ;
- ▷ Moteur ditherme.

Une difficulté importante de l'exercice vient du fait qu'il faut raisonner alternativement sur deux systèmes différents : le fluide caloporteur au sein du moteur et le réservoir d'eau chaude. Dans un tel cas, pour bien poser les notations et éviter des erreurs de signes, rien ne vaut un beau diagramme des échanges, voir figure 2, qui a toute sa place sur une copie ou sur un tableau en colle et à l'oral.



**Figure 2 – Diagramme des échanges du moteur.** Les flèches noires indiquent l'orientation conventionnelle des échanges énergétiques, les flèches rouges leur sens réel. Le diagramme est ici représenté pour une transformation infinitésimale.

1 Le rendement d'un moteur est défini par

$$\eta = -\frac{W}{Q_c} .$$

Les deux principes de la thermodynamique appliqués à une portion de fluide caloporteur pendant un cycle complet donnent

$$\Delta U = W + Q_c + Q_f = 0 \quad \text{et} \quad \Delta S = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + \underbrace{S_{cr}}_{\substack{\uparrow \\ \text{rév cycle}}} = 0 .$$

Ainsi,

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{-Q_c - W}{T_f} = 0 \quad \text{soit} \quad \left(\frac{1}{T_c} - \frac{1}{T_f}\right) Q_c - \frac{W}{T_f} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{T_f}{T_c} - 1\right) Q_c - W = 0$$

d'où on déduit finalement

$$\eta_{\text{rév}} = 1 - \frac{T_f}{T_c}.$$

2 Un bilan d'énergie appliqué au réservoir d'eau chaude pendant le cycle infinitésimal s'écrit

$$dU_c \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} -\delta Q_c \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} mc dT_c \quad \text{soit} \quad \delta Q_c = -mc dT_c.$$

Le transfert thermique  $\delta Q_c$  est reçu par le moteur, donc cédé par la source chaude, d'où le signe  $\ominus$ . La cohérence des signes est un bon test de vraisemblance : le moteur reçoit de l'énergie, donc  $\delta Q_c > 0$ , car la température du réservoir baisse, soit  $dT_c < 0$ .

Le travail  $\delta W$  fourni par le moteur lors du cycle infinitésimal se déduit du rendement ... en changeant le signe car  $\delta W$  est fourni :

$$\delta W = +\eta_{\text{rév}} \delta Q_c \quad \text{soit} \quad \delta W = -\left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right) mc dT_c.$$

3 Le moteur s'arrête de fonctionner lorsque les deux sources sont à la même température, auquel cas le rendement s'annule et le moteur ne peut plus fournir de travail. Le travail total fourni s'obtient par sommation,

$$\begin{aligned} W_{\text{tot}} &= \int_{T_c=T_0}^{T_c=T_f} \delta W \\ &= -mc \int_{T_0}^{T_f} \left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right) dT_c \\ &= -mc(T_f - T_0) - mc T_f \ln \frac{T_f}{T_0} \\ W_{\text{tot}} &= mc \left(T_0 - T_f + T_f \ln \frac{T_0}{T_f}\right) = 6,3 \cdot 10^5 \text{ J.} \end{aligned}$$

4 Le théorème de l'énergie mécanique appliquée à la masse soulevée s'écrit

$$\Delta E_m = W_{\text{tot}} \quad \text{soit} \quad m'g \Delta z = W_{\text{tot}}$$

en négligeant les variations d'énergie cinétique. On a donc

$$\Delta z = \frac{mc}{m'g} \left(T_0 - T_f + T_f \ln \frac{T_0}{T_f}\right) = 6,4 \text{ km.}$$

C'est une valeur énorme, qui montre bien que les variations d'énergie interne sont très importantes comparativement aux variations d'énergie mécanique ... ce qui justifie d'ailleurs de les négliger la plupart du temps dans l'application du premier principe y compris aux systèmes en mouvement.

## Thermodynamique différentielle

### Exercice 5 : Démonstration de la loi de Laplace



▷ Gaz parfait ;  
▷ Manipulation des différentielles.

1 Trois hypothèses : gaz parfait en transformation adiabatique et réversible. La loi de Laplace s'écrit

$$PV^\gamma = \text{cte.}$$

On combine ensuite avec l'équation d'état : d'une part,

$$\frac{nRT}{V} \times V^\gamma = \text{cte} \quad \text{d'où} \quad TV^{\gamma-1} = \text{cte}',$$

et d'autre part

$$P \left( \frac{nRT}{P} \right)^\gamma = \text{cte} \quad \text{d'où} \quad \boxed{P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte}''}.$$

2 La variation d'énergie interne au cours de la transformation s'écrit

$$dU = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{C_V} dT = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er ppe}}}{\delta W_p} + 0$$

et en remplaçant

$$\boxed{\frac{nR}{\gamma-1} dT = -P dV}.$$

3 En prenant la différentielle de l'équation d'état,

$$V dP + P dV = nR dT.$$

On déduit alors de la question précédente

$$V dP + P dV = -(\gamma-1)P dV \quad \text{d'où} \quad \boxed{V dP = -\gamma P dV}.$$

4 La séparation des variables donne

$$\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V}$$

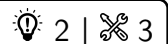
et par intégration

$$\ln P = -\gamma \ln V + \text{cte} \quad \text{soit} \quad \ln P + \gamma \ln V = \text{cte} \quad \text{et} \quad \ln(PV^\gamma) = \text{cte}$$

d'où on déduit la loi de Laplace,

$$\boxed{PV^\gamma = \text{cte}}.$$

## Exercice 6 : Entropie d'un gaz parfait



- ▷ Gaz parfait ;
- ▷ Identité thermodynamique ;
- ▷ Manipulation des différentielles.

1 L'identité thermodynamique en enthalpie s'écrit

$$dH = T dS + V dP.$$

En utilisant la loi de Joule et l'équation d'état,

$$C_P dT = T dS + \frac{nRT}{P} dP \quad \text{soit} \quad dS = C_P \frac{dT}{T} - nR \frac{dP}{P}.$$

Par intégration le long de la transformation,

$$\begin{aligned} \int_{I_F}^{\widehat{S}_F} dS &= C_P \int_{I_F}^{\widehat{T}_F} \frac{dT}{T} - nR \int_{I_F}^{P_F} \frac{dP}{P} \\ \int_{S_I}^{S_F} dS &= C_P \int_{T_I}^{T_F} \frac{dT}{T} - nR \int_{P_I}^{P_F} \frac{dP}{P} \\ \Delta S &= C_P \ln \frac{T_F}{T_I} - nR \ln \frac{P_F}{P_I}. \end{aligned}$$

2 Passons au logarithme dans l'équation d'état,

$$\ln P + \ln V = \ln(nR) + \ln T.$$

Sachant que les différentielles se calculent exactement comme les dérivées, on a  $d(\ln x) = dx/x$ , et ainsi

$$\boxed{\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}}.$$

Comme souvent avec ce genre de questions, l'idée clé pour bien démarrer est l'analogie entre le calcul avec les différentielles et celui des dérivées. Pour retrouver les expressions, on peut partir de l'expression des dérivées et les traiter ensuite comme des fractions de différentielles :

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \quad \rightsquigarrow \quad d(\ln x) = \frac{dx}{x}.$$

On peut ainsi remplacer dans l'expression de  $dS$ ,

$$dS = C_P \left( \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} \right) - nR \frac{dP}{P} = (C_P - nR) \frac{dP}{P} + C_P \frac{dV}{V}$$

D'après la relation de Mayer,  $C_P - nR = C_V$ . Par une intégration analogue à la question précédente, on en déduit le résultat voulu

$$\Delta S = C_V \ln \frac{P_F}{P_I} + C_P \ln \frac{V_F}{V_I}.$$

**3** L'énoncé indique que l'on cherche la forme en  $P$  et  $V$  de la loi de Laplace, par un raisonnement sur une transformation infinitésimale. Repartons donc de

$$dS = C_V \frac{dP}{P} + C_P \frac{dV}{V} \stackrel{\text{iso-}S}{=} 0$$

Par définition,  $C_P = \gamma C_V$ , ce qui donne

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0.$$

On peut alors de nouveau identifier des différentielles logarithmiques,

$$d(\ln P) + \gamma d(\ln V) = 0$$

$$d(\ln P) + d(\ln V^\gamma) = 0$$

$$d(\ln P + \ln V^\gamma) = 0$$


$$d(\ln PV^\gamma) = 0$$

Et ainsi, si la différentielle est nulle, c'est que

$$\ln(PV^\gamma) = \text{cte} \quad \text{donc} \quad \boxed{PV^\gamma = \text{cte}.}$$

## Exercice 7 : Transformation polytropique

💡 3 | ✂ 2

-   $\triangleright$  Gaz parfait ;  
 $\triangleright$  Identité thermodynamique ;  
 $\triangleright$  Manipulation des différentielles.

Commençons par écrire l'équation d'état en fonction de  $r$  et  $v$ ,

$$P \frac{V}{m} = \frac{n}{m} RT \quad \text{soit} \quad Pv = \frac{RT}{M} \quad \text{d'où} \quad Pv = rT.$$

**1** D'après l'identité thermodynamique,

$$T ds = du + P dv = c dT.$$

Or pour un gaz parfait

$$du = c_V dT \quad \text{et} \quad P = \frac{rT}{v}$$

d'où on déduit

$$c_V dT + \frac{rT}{v} dv = c dT$$

et ainsi

$$\boxed{(c - c_V) \frac{dT}{T} - r \frac{dv}{v} = 0.}$$

2 La relation précédente s'écrit

$$(c - c_V) \frac{dT}{T} = r \frac{dv}{v},$$

donc en intégrant

$$(c - c_V) \ln T = r \ln v + \text{cte}$$

ce que l'on peut réécrire

$$\ln T - \frac{r}{c - c_V} \ln v = \text{cte} \quad \text{soit} \quad \ln \left( T \times v^{-r/(c-c_V)} \right) = \text{cte} \quad \text{donc} \quad \ln \left( \frac{Pv}{r} \times v^{-r/(c-c_V)} \right) = \text{cte}.$$

On en déduit donc que

$$Pv^{1-r/(c-c_V)} = \text{cte}$$

ce qui est bien de la forme demandée avec

$$k = 1 - \frac{r}{c - c_V} = \frac{c - c_V - r}{c - c_V} \quad \text{d'où} \quad \boxed{k = \frac{c - c_P}{c - c_V}}.$$

en utilisant la relation de Mayer sous forme massique.

3 La relation de la question 1 s'écrit

$$\frac{dT}{T} - \frac{r}{c - c_V} \frac{dv}{v} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{dT}{T} + (k - 1) \frac{dv}{v} = 0.$$

Au cours de la transformation, le travail massique reçu dû aux forces de pression s'écrit

$$\delta w = -P dv = -rT \frac{dv}{v} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\delta w = \frac{r}{k - 1} dT}.$$

4 On a

$$du \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er ppe}}}{=} \delta w + \delta q \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} c_V dT = \frac{r}{\gamma - 1} dT$$

Ainsi,

$$\boxed{\delta q = r \left( \frac{1}{\gamma - 1} - \frac{1}{k - 1} \right) dT}.$$

5 • **Isobare** : il faut  $P = \text{cte}$ , ce qui est possible si  $k = 0$ .

• **Isochore** : il faut  $v = \text{cte}$ , et d'après la relation polytropique

$$P^{1/k} v = \text{cte}.$$

On veut donc  $1/k = 0$  ce qui est possible si  $k \rightarrow \infty$ .


• **Adiabatique** : il faut  $\delta q = 0$ , ce qui est possible si  $k = \gamma$ . La relation polytropique redonne alors comme prévu la loi de Laplace (adiabatique réversible d'un gaz parfait).

• **Isotherme** : d'après l'équation d'état, une isotherme se caractérise par  $Pv = rT = \text{cte}$ , ce qui est possible pour  $k = 1$ .

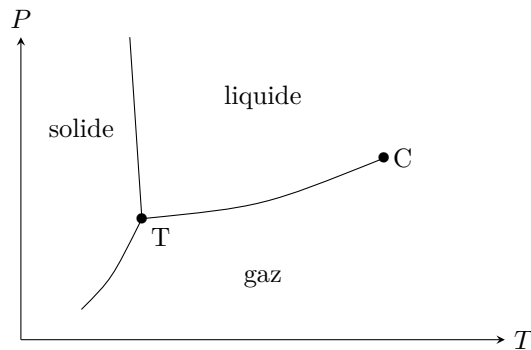


**Exercice 8 : Propriétés thermodynamiques de l'eau**

CCP MP 2015 | 💡 2 | ✂ 2


 ▷ Manipulation des dérivées partielles ;  
 ▷ Résolution de problème.

1 Voir figure 3. Le point triple correspond à l'unique couple pression, température pour lequel il y a coexistence stable entre les trois états solide, liquide et gaz. Le point critique est la fin de la courbe de vaporisation : au delà du point critique, les phases liquide et gaz ne sont plus discernables et forment la phase fluide supercritique.

Figure 3 – Diagramme  $p - T$  de l'eau.

2 Le coefficient directeur  $a$  vaut

$$a = \frac{p_T - p_0}{T_T - T_0} = -1,01 \cdot 10^7 \text{ Pa} \cdot \text{K}^{-1}$$

et l'ordonnée à l'origine  $b$

$$b = p_0 - aT_0 = 2,75 \cdot 10^9 \text{ Pa}.$$

3 Considérons un patineur de masse  $m = 80 \text{ kg}$ , pour qui un seul pied est en contact avec la glace. La lame du patin est un rectangle de largeur  $\ell = 5 \text{ mm}$  et de longueur  $L = 30 \text{ cm}$ , soit une surface  $S = 15 \text{ cm}^2$ . La pression exercée sur la glace vaut donc

$$P = \frac{mg}{S} = 5 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

D'après la question précédente, la pression de fusion de l'eau à  $T_g = -5^\circ \text{C}$  est donnée par

$$p_{\text{fus}} = aT_g + b = 4,2 \cdot 10^7 \text{ Pa},$$

très supérieure à celle exercée par le patin sur la glace. Ainsi, la pression exercée par le patin **n'est pas suffisante** pour faire fondre la glace. Le film d'eau se forme probablement suite à un échauffement local dû au travail des forces de frottement du patin sur la glace.

4 L'équation d'état d'un gaz parfait s'écrit

$$pV = nRT \quad \text{soit} \quad pv = \frac{RT}{M}$$

sous forme massique, avec  $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

5 Pour un gaz parfait,

$$v = \frac{RT}{M} \frac{1}{p} \quad \text{d'où} \quad \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = -\frac{RT}{M} \frac{1}{p^2} = -\frac{v}{p}$$

ce qui donne bien

$$\chi_T = \frac{1}{p}.$$

6 D'après la question 4, si la température est constante alors le produit  $pv$  est constant et clairement indépendant de  $p$ , ce qui graphiquement se traduit bien par une droite horizontale.

7 Par définition,

$$\frac{1}{v} \left( \frac{\partial(pv)}{\partial p} \right)_T = \frac{v \times 1}{v} + \frac{p}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = 1 - p \chi_T$$

et comme  $\chi_{T,GP} = 1/p$  on obtient bien

$$\boxed{\frac{1}{v} \left( \frac{\partial(pv)}{\partial p} \right)_T = 1 - \frac{\chi_T}{\chi_{T,GP}}}$$

Ainsi, si  $pv$  est une fonction croissante de  $p$  le long d'une isotherme alors

$$\frac{1}{v} \left( \frac{\partial(pv)}{\partial p} \right)_T > 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\chi_T}{\chi_{T,GP}} < 1$$

ce qui signifie bien que le fluide est moins compressible qu'un gaz parfait.

8 Au voisinage de ce minimum, on peut considérer  $pv \simeq \text{cte}$ , la valeur dépendant de l'isotherme considérée, **ce qui est bien le comportement d'un gaz parfait.**