BLAISE PASCAL
PT 2022-2023

**TD 5 – Séquence 2 : Thermodynamique (I)**

# Transformations infinitésimales en thermodynamique

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

| Ceinture | | Proposition de parcours d'entraînement |
|---|---|---|
| | Ceinture blanche | Questions de cours + exercices 1, 2 et 5 |
| | Ceinture jaune | Questions de cours + exercices 2, 3 et 5 |
| | Ceinture rouge | Questions de cours (★) + exercices 2 à 6 |
| | Ceinture noire | Questions de cours (★) + exercices 2 à 4 et 6 à 8. |

*Flasher ce code pour accéder au corrigé*

## Questions et applications de cours

*Seuls les étudiants du groupe PT⋆ seront interrogés en colle sur les questions marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !*

**5.1 -** Établir l'expression des capacités thermiques d'un gaz parfait en fonction de $R$ et $\gamma$.

**5.2 -** Considérons une casserole contenant une masse $m$ d'eau à la température $T$. La plaque de cuisson lui transmet une puissance thermique constante $\mathcal{P}_0$, et elle est refroidie par contact avec l'air. On note $R_{\text{th}}$ la résistance thermique décrivant ce refroidissement. Établir l'équation différentielle vérifiée par la température $T$ de l'eau dans la casserole.

**5.3 -** Définir l'enthalpie libre $G$. Exprimer la différentielle $\mathrm{d}G$ au cours d'une transformation quelconque (c'est-à-dire irréversible et avec échange de travail), puis en déduire le critère d'évolution spontanée portant sur le signe de $\mathrm{d}G$.

> *La question n'est pas particulièrement importante en soi, en revanche la manipulation rigoureuse de l'écriture infinitésimale des principes de la thermodynamique l'est ! En particulier, vous serez très vigilant à l'utilisation des notations d et δ.*

**5.4 -** Établir l'expression de l'entropie d'une phase condensée.

**(★) 5.5 -** En partant d'une identité thermodynamique, montrer sur l'exemple de la transition liquide-gaz qu'un changement d'état se fait toujours au profit de la phase de plus petit potentiel chimique.

# Transitoires thermiques

## Exercice 1 : Chauffage isobare d'un gaz parfait

1 | 1

▷ *Transitoire thermique.*

On considère une enceinte calorifugée, fermée par un piston libre de coulisser sans frottements, contenant un gaz parfait. La pression extérieure est notée $p_0$. Initialement, le volume de l'enceinte est $V_0$, la température et la pression du gaz $T_0$ et $p_0$. Cette enceinte renferme une résistance, alimentée par un générateur de courant idéal délivrant l'intensité $I$. La résistance varie avec la température selon la loi $R(T) = R_0 T / T_0$.

**1 -** Déterminer l'évolution de la température du gaz au cours du temps.

**2 -** En déduire l'expression de l'évolution du volume au cours du temps.

## Exercice 2 : Canon à neige

oral banque PT | 2 | 2 |

- ▷ *Transitoire thermique ;*
- ▷ *Changement d'état.*

La neige artificielle est obtenue en pulvérisant de fines gouttes d'eau liquide à $T_0 = 10\,°\mathrm{C}$ dans l'air ambiant à $T_\mathrm{a} = -15\,°\mathrm{C}$. Le déplacement dans l'air soumet chaque goutte à une perte thermique que l'on modélise à travers la loi de Newton,

$$\phi = h(T - T_\mathrm{a})S\,,$$

où $\phi$ est le flux thermique cédé par la goutte d'eau, $T$ sa température, $h$ un coefficient constant et $S$ la surface à travers a lieu l'échange.

**1 -** En supposant la goutte indéformable de rayon $R$ et à l'équilibre mécanique, établir la relation

$$\mu\, c R \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -3h(T - T_\mathrm{a})\,.$$

**2 -** En déduire que

$$\frac{T - T_\mathrm{a}}{T_0 - T_\mathrm{a}} = \mathrm{e}^{-t/\tau}$$

en exprimant $\tau$ en fonction de $\mu$, $R$, $c$ et $h$. En déduire l'instant $t_1$ au bout duquel la goutte d'eau atteint une température $T_1 = -5{,}0\,°\mathrm{C}$.

**3 -** Lorsque la goutte atteint $T_1$, le phénomène de surfusion cesse : la goutte se solidifie partiellement. Calculer la fraction massique $x$ de liquide restant à solidifier en supposant la transformation très rapide et adiabatique.

**4 -** Au bout de combien de temps la goutte est-elle totalement solidifiée ?

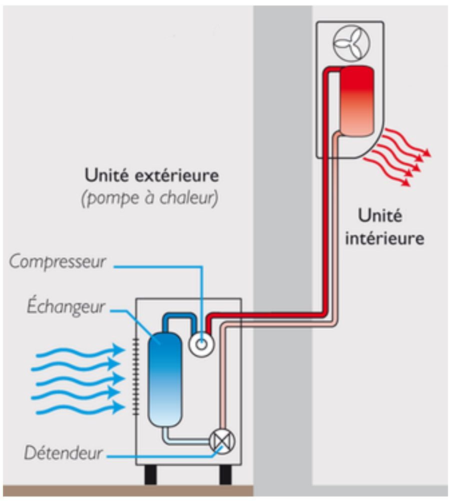
*Données :*

- ▷ rayon de la goutte d'eau $R = 0{,}20\,\mathrm{mm}$,
- ▷ coefficient conducto-convectif $h = 65\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$,
- ▷ masse volumique de l'eau liquide $\mu = 1{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$,
- ▷ capacité thermique massique de l'eau liquide $c = 4{,}2 \cdot 10^3\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$,
- ▷ chaleur latente de fusion de la glace $\ell_\mathrm{fus} = 330\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

## Exercice 3 : Chauffage par une pompe à chaleur

2 | 2

- ▷ *Transitoire thermique ;*
- ▷ *Machine thermique.*




Une pompe à chaleur (abrégée PAC) est une machine thermique permettant d'effectuer un transfert thermique effectif de sens opposé au sens naturel, c'est-à-dire « du froid vers le chaud ». Dans une PAC, un fluide caloporteur est en écoulement dans un circuit passant alternativement à l'extérieur et à l'intérieur de la maison à chauffer. Rappelons que dans ce contexte l'extérieur de la maison est qualifié de « source froide » et l'intérieur de « source chaude ». À l'extérieur de la maison, le fluide reçoit une puissance thermique $\mathcal{P}_\mathrm{f} > 0$ ainsi qu'une puissance mécanique $\mathcal{P}_\mathrm{m} > 0$ au sein du compresseur, et à l'intérieur il reçoit une puissance thermique algébrique $\mathcal{P}_\mathrm{c} < 0$, ce qui revient à dire que le fluide restitue un transfert thermique à l'intérieur de la maison.

Cet exercice s'intéresse à l'évolution de la température intérieure $T_\mathrm{c}$ lorsque la PAC est mise en marche alors que la température extérieure $T_\mathrm{f}$ est constante.

*Hypothèses de travail :*

- ▷ Puissance du compresseur $\mathcal{P}_\mathrm{m} = \mathrm{cte}$ ;
- ▷ Le démarrage de la PAC est de durée négligeable : celle-ci est toujours supposée en régime permanent ;
- ▷ Les pertes thermiques au travers des murs de la maison sont également négligées ;
- ▷ Toutes les évolutions thermodynamiques de la PAC sont considérées réversibles.

**1 -** Par application des principes de la thermodynamique au fluide caloporteur de la PAC pendant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$, établir deux relations entre les puissances échangées et les températures des sources.

**2 -** Établir une relation supplémentaire en appliquant le premier principe à l'intérieur de la maison, de capacité thermique totale $C$, incluant l'air, les murs, le mobilier, etc.

**3 -** En déduire que la température $T_\mathrm{c}$ de la source chaude vérifie la relation

$$\left(1 - \frac{T_\mathrm{f}}{T_\mathrm{c}}\right) \frac{\mathrm{d}T_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{P}_\mathrm{m}}{C}\,.$$

**4 -** En déduire la durée de chauffage $\tau$ nécessaire pour que la température intérieure s'élève de $T_0$ à $T_0 + \Delta T$.

## Exercice 4 : Moteur avec pseudo-source

oral banque PT | 2 | 2

- *Transformations infinitésimale ;*
- *Moteur ditherme.*

On étudie un moteur ditherme réversible dont la source chaude est un réservoir contenant 1 kg d'eau liquide à température initiale 100 °C et la source froide l'atmosphère à température constante 20 °C. On suppose que la source chaude échange uniquement avec le moteur.

*Donnée :* capacité thermique de l'eau $c = 4{,}2\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$.

**1 -** Donner le rendement d'un moteur ditherme réversible.

**2 -** Pendant un cycle infinitésimal, la température du réservoir varie de $\mathrm{d}T_\mathrm{c}$. Déterminer la chaleur $\delta Q_\mathrm{c}$ reçue par le moteur lors de ce cycle. Déterminer le travail fourni par le moteur lors du cycle infinitésimal.

**3 -** Quand et pourquoi le moteur s'arrêtera-t-il de fonctionner ? Calculer le travail total fourni par le moteur.

**4 -** Ce moteur sert à entraîner un treuil qui soulève une masse de 10 kg. De quelle hauteur la masse est-elle soulevée pendant la durée totale de fonctionnement du moteur ?

# Thermodynamique différentielle

## Exercice 5 : Démonstration de la loi de Laplace

1 | 2 |

- *Gaz parfait ;*
- *Manipulation des différentielles.*

**1 -** Rappeler la loi de Laplace en $P, V$ et ses conditions d'application. Retrouver les variantes en $T, V$ et en $T, P$.

L'objectif de l'exercice est de démontrer cette loi par les outils de la thermodynamique différentielle. On raisonne sur $n$ moles de gaz parfait, d'exposant adiabatique $\gamma$, soumis seulement aux forces de pression, et qui subit une transformation adiabatique réversible quasi-statique. On rappelle que pour un gaz parfait $C_V = nR/(\gamma - 1)$.

**2 -** En exploitant les principes thermodynamiques, montrer que

$$\frac{nR}{\gamma - 1}\mathrm{d}T = -P\,\mathrm{d}V\,.$$

**3 -** En déduire que $V\,\mathrm{d}P = -\gamma P\,\mathrm{d}V$.

**4 -** Intégrer cette relation par séparation des variables et conclure.

## Exercice 6 : Entropie d'un gaz parfait

2 | 3

- *Gaz parfait ;*
- *Identité thermodynamique ;*
- *Manipulation des différentielles.*

Cet exercice a pour objectif d'établir l'expression de l'entropie de $n$ mol de gaz parfait en fonction de ses variables d'état, puis de l'utiliser pour retrouver les différentes formulations de la loi de Laplace. On raisonne sur une transformation entre deux états d'équilibre notés $I$ et $F$.

**1 -** Partant de l'identité thermodynamique en enthalpie, montrer que l'entropie des $n$ mol de gaz parfait considéré s'écrit

$$\Delta S = C_P \ln \frac{T_F}{T_I} - nR \ln \frac{P_F}{P_I}\,.$$

Un raisonnement analogue sur l'énergie interne permet d'obtenir l'expression de $\Delta S$ à en fonction des pressions et des températures. En revanche, l'expression en fonction des pressions et des volumes nécessite une étape supplémentaire.

**2 -** Partant de l'équation d'état, montrer que

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{\mathrm{d}P}{P} + \frac{\mathrm{d}V}{V}\,.$$

En combinant avec la question précédente, en déduire l'expression de $\Delta S$ en termes des pressions et volumes :

$$\Delta S = C_V \ln \frac{P_F}{P_I} + C_P \ln \frac{V_F}{V_I}\,.$$

**3 -** En raisonnant sur une transformation infinitésimale, montrer la loi de Laplace : au cours d'une transformation isentropique $PV^\gamma = \text{cte}$.

## Exercice 7 : Transformation polytropique

3 | 2

- *Gaz parfait ;*
- *Identité thermodynamique ;*
- *Manipulation des différentielles.*

On s'intéresse à l'évolution d'un gaz parfait subissant une transformation **polytropique**. De telles transformations sont intermédiaires entre des adiabatiques et des isothermes, et se rencontrent au sein des étoiles, dans la dynamique atmosphérique ou encore lorsque des transferts thermiques imparfaits ne suffisent pas à évacuer toute l'énergie libérée par une réaction chimique. Une telle transformation peut être modélisée par la relation

$$\mathrm{d}s = c\,\frac{\mathrm{d}T}{T}$$

où $s$ est l'entropie massique, $T$ la température thermodynamique, et $c$ est une constante appelée la capacité thermique massique vraie de l'évolution.

On note par ailleurs $c_P$ et $c_v$ les capacités thermiques massiques à pression et volume constant du gaz ainsi que $r = R/M$, appelée constante massique du gaz.

**1 -** Montrer que l'évolution polytropique d'un gaz parfait vérifie ($v$ étant le volume massique)

$$(c - c_V)\frac{\mathrm{d}T}{T} - r\frac{\mathrm{d}v}{v} = 0\,.$$

**2 -** En déduire par intégration qu'au cours d'une évolution polytropique $Pv^k = \text{cte}$ où $k$ est une constante qui s'exprime en fonction de $c_P$, $c_V$ et $c$.

**3 -** Réécrire la relation obtenue question 1 en fonction de $k$. En déduire que le travail massique reçu au cours de l'évolution vaut

$$\delta w = \frac{r}{k-1}\mathrm{d}T\,.$$

**4 -** En déduire le transfert thermique reçu par le gaz.

**5 -** Quelle valeur faut-il donner à $k$ pour que l'évolution polytropique devienne une isobare ? une isochore ? une adiabatique ? une isotherme ? Interpréter.

## Exercice 8 : Propriétés thermodynamiques de l'eau

CCP MP 2015 | 2 | 2

▷ *Manipulation des dérivées partielles ;*
▷ *Résolution de problème.*

**1 -** Dessiner le diagramme de phase $p(T)$ de l'eau en plaçant les domaines solide, liquide et gaz ainsi que les points triple et critique. À quoi ces points correspondent-ils ?

### Quelques propriétés de la glace

**2 -** On donne :
▷ les coordonnées du point triple de l'eau : $T_T = 273{,}16\,\mathrm{K}$ ; $p_T = 611\,\mathrm{Pa}$ ;
▷ la pression de fusion à $T_0 = 273{,}15\,\mathrm{K}$ : $p_0 = 101\,325\,\mathrm{Pa}$.
En assimilant la courbe de fusion de l'eau à une droite d'équation $p_{\text{fus}} = aT + b$, déterminer les expressions de $a$ et $b$ en fonction de $p_T$, $p_0$, $T_T$ et $T_0$ ainsi que leur valeur numérique.

**3 -** *Cette question est une question ouverte. On attend une réponse se basant sur un raisonnement quantitatif, mettant en jeu des ordres de grandeur réalistes. Toutes les pistes explorées par le candidat doivent être rapportées sur la copie : même inabouties, elles seront valorisées dès lors qu'elles sont pertinentes. Il est conseillé de ne pas consacrer plus de 10 minutes à cette question.*

La glace d'une patinoire est à $-5\,°\mathrm{C}$. La pression exercée par un patineur est-elle suffisante pour former un film de liquide sur lequel les patins vont glisser ? Le cas échéant, expliquer qualitativement par quel(s) phénomène(s) physique(s) se forme le film d'eau liquide.

### Quelques propriétés de la vapeur d'eau

**4 -** Pour un gaz parfait, donner l'équation reliant la pression $p$, le volume massique $v$, la masse molaire $M$ et la température $T$. Rappeler la valeur numérique et l'unité de la constante $R$ qui intervient.

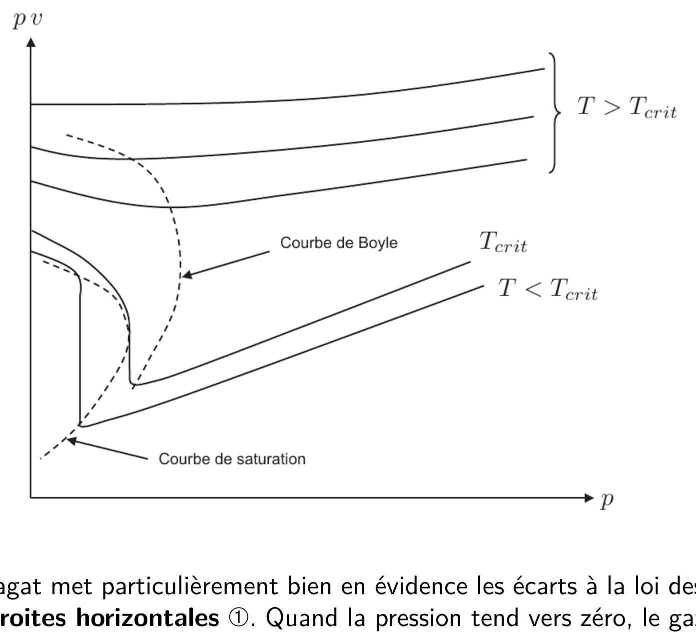
**5 -** Pour quantifier le caractère compressible d'un gaz, on définit le coefficient de compressibilité isotherme

$$\chi_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T .$$

Montrer que pour un gaz parfait la compressibilité isotherme est donnée par $\chi_{T,\mathrm{GP}} = 1/p$.

Le document 1 donne l'allure des isothermes de l'eau en coordonnées d'Amagat, c'est-à-dire le graphe portant le produit $pv$ en fonction de $p$ pour différentes températures. On se propose de justifier certaines affirmations marquées en gras dans le document.

### Document 1 : Isothermes en coordonnées d'Amagat




La représentation d'Amagat met particulièrement bien en évidence les écarts à la loi des gaz parfaits pour lesquels **les isothermes sont des droites horizontales** ①. Quand la pression tend vers zéro, le gaz tend vers l'état parfait et l'ordonnée $pv$ à l'origine est proportionnelle à la température absolue du gaz.

On peut distinguer plusieurs zones par leur température. Pour une isotherme à très haute température, **$pv$ est une fonction croissante de $p$ : le fluide est moins compressible qu'un gaz parfait** ②. À des températures plus basses, $pv$ est une fonction de $p$ qui présente un minimum. **Au voisinage de ce minimum, $pv$ varie peu et le fluide se comporte comme un gaz parfait** ③. Le lieu des minima de $pv$ est une courbe d'allure parabolique, appelée courbe de Boyle.

**6 -** Justifier l'affirmation ① du document 1.

**7 -** Montrer que

$$\frac{1}{v}\left(\frac{\partial(pv)}{\partial p}\right)_T = 1 - \frac{\chi_T}{\chi_{T,\mathrm{GP}}}\,.$$

Justifier alors l'affirmation ②.

**8 -** En lien avec l'affirmation ①, justifier l'affirmation ③.