BLAISE PASCAL
PT 2022-2023

Cours 8 – Séquence 3 : Mécanique des fluides *Version prof*

Statique des fluides

Plan du cours

Au programme

Extrait du programme officiel : partie 1 « Thermodynamique et mécanique des fluides », bloc 1 « Éléments de statique des fluides dans un référentiel galiléen ».

Cette partie introduit sur le support concret de la statique des fluides le principe du découpage d'un domaine physique (volume, surface) en éléments infinitésimaux et la sommation d'une grandeur extensive (force) pour ce découpage. La poussée d'Archimède est présentée comme la résultante des forces de pression.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Forces surfaciques, forces volumiques. Champ de pression.	Distinguer les forces de pression des forces de pesanteur.
Statique dans le champ de pesanteur uniforme.	Établir la relation entre la dérivée de la pression, la masse volumique et le champ de pesanteur. Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible et dans le cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait. Comparer les variations de pression dans le cas de l'océan et de l'atmosphère.
Résultante de forces de pression. Poussée d'Archimède.	Exprimer la force de pression sur une surface élémentaire en fonction de la pression. Exprimer une surface élémentaire dans un système de coordonnées adaptées. Utiliser les symétries pour déterminer la direction d'une résultante de forces de pression.

Notions et contenus	Capacités exigibles
	Exprimer une résultante de forces de pression sur une paroi ou sur un objet immergé.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Au concours

▷ Écrit : épreuve A 2022 (deux questions ...)
▷ Oral : occasionnellement.

Un fluide est un milieu déformable, dont la description est de ce fait plus compliquée que celle d'un solide. Nous abordons dans ce premier cours la statique des fluide, le plus simple des cas compliqués.

I - Plusieurs descriptions d'un fluide

I.A - Aux échelles macro et microscopique

- **Échelle macroscopique**

L'**échelle macroscopique** est l'échelle globale relative à l'ensemble du système, souvent l'échelle humaine. La matière est continue, mais ses propriétés (température, masse volumique, etc.) peuvent être inhomogènes.

À l'échelle macroscopique, un fluide est un milieu matériel capable de se déformer et de s'écouler jusqu'à adopter la forme du récipient qui le contient.

> ***Remarque culturelle :*** *Cette définition peut parfois poser quelques difficultés : le dentifrice, le sable, le célèbre mélange eau-maïzena sont-ils des fluides ? Ces matériaux qui présentent un comportement hybride entre solide et fluide sont parfois appelés fluides complexes.*

- **Échelle microscopique**

L'**échelle microscopique** est celle des atomes et des molécules : la matière est discontinue, c'est le monde de la mécanique quantique et de la physique statistique.

Longueurs caractéristiques : distance intermoléculaire typique
▷ dans un solide cristallin :
paramètre de maille $a \sim 10^{-9} - 10^{-10}\,\mathrm{m}$

Espace 1 ;

▷ dans un fluide : **libre parcours moyen** $\ell^\star$ qui correspond à la distance parcourue par une molécule entre deux collisions successives.
$\ell^\star_{\text{liq}} \sim 10^{-9}\,\mathrm{m}$ $\ell^\star_{\text{gaz}} \sim 10^{-7}\,\mathrm{m}$ à $300\,\mathrm{K}$.

Espace 2

À l'échelle microscopique, un fluide est caractérisé par des interactions intermoléculaires suffisamment faibles par rapport à l'énergie d'agitation thermique pour que les molécules se déplacent les unes par rapport aux autres.

I.B - À l'échelle mésoscopique : modèle de la particule fluide

- **Échelle mésoscopique**

On appelle **échelle mésoscopique** une échelle intermédiaire entre microscopique et macroscopique :
la longueur caractéristique est très faible devant la taille totale du système,
mais très grande devant la distance intermoléculaire.
À cette échelle, la matière est continue mais ses propriétés localement homogènes.

⇝ intérêt de l'échelle mésoscopique : étude des systèmes inhomogènes à l'échelle macroscopique, dont la température ou la pression varie en fonction du point d'observation.

Longueurs caractéristiques : fortement dépendantes du système étudié !
▷ modélisation des échanges thermiques dans le condenseur d'un frigo domestique : de l'ordre de quelques microns ;
▷ modélisation de la circulation atmosphérique à grande échelle pour l'étude du changement climatique : de l'ordre de la centaine de kilomètres.

On appelle **système mésoscopique** ou **infinitésimal** un système dont au moins une des trois dimensions est mésoscopiques.

> ***Exemple :*** *cylindre de rayon macroscopique mais de hauteur infinitésimale.*

- **Particule fluide**

On appelle **particule fluide** une portion de fluide
mésocopique dans les trois dimensions et de masse constante.

Espace 3

Attention ! Compte tenu de la définition, une particule fluide contient un très grand nombre de molécules.

Une particule fluide peut être immobile ou en mouvement (si le fluide s'écoule). Sa masse est constante, mais son volume peut varier : une particule fluide est caractérisée par un nombre de molécules, pas par des dimensions.

> ***Remarque :*** *Une particule de fluide est mésoscopique dans les trois dimensions de l'espace. Il sera souvent utile pour les calculs de raisonner sur des systèmes mésoscopiques en une dimension seulement et macroscopique dans les deux autres : de tels systèmes ne sont pas des particules de fluide.*

- **Notations mésoscopiques**

▷ Grandeurs **extensives** : grandeurs physiques proportionnelles à la masse du système
⇝ les grandeurs extensives relatives à l'échelle mésoscopique sont notées par le symbole différentiel d, comme les dérivées ou les intégrales (ce qui n'est pas un hasard !) : la masse d'une particule fluide est par exemple notée $\mathrm{d}m$.

▷ Grandeurs **intensives** : grandeurs physiques indépendantes de la masse du système.
⇝ les grandeurs intensives peuvent être définies localement, elles sont notées comme des fonctions du point d'observation M, par exemple $T(M)$ ou $P(M)$.

> ***Exemples :***
> ▷ *Volume d'une particule fluide :* *introduire $d\tau$ et μ*
> $$dV = d\tau = \frac{dm}{\rho(M)} = \frac{dm}{\mu(M)}$$
> *Espace 4*
> ▷ *Équation d'état d'un gaz parfait appliquée à une particule de fluide :*
> $P(M)\,d\tau = dn\,RT(M)$.
> *Espace 5*

I.C - Sommer pour passer du mésoscopique au macroscopique

Application 1 : Masse d'air

Un modèle simple d'atmosphère à température uniforme, étudié dans la suite du cours, conduit à une évolution de la masse volumique avec l'altitude z selon

$$\rho(z) = \rho_0 \, \mathrm{e}^{-z/\delta} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \rho_0 = 1{,}3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3} \\ \delta = 8\,\mathrm{km} \end{cases}$$

En supposant ce modèle valable pour tout $z > 0$, calculer la masse de la colonne d'air que vous portez sur vos épaules.

Principe : la masse est une grandeur additive, calculer la masse totale d'un système macroscopique $\mathcal{S}$ se fait en sommant la masse de chaque particule fluide appartenant à ce système.

$$m_{\text{tot}} = \sum_{\text{PF}\in\mathcal{S}} \mathrm{d}m = \iiint_{M\in\mathcal{S}} \rho(M)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Le même raisonnement s'applique pour tout découpage mésoscopique.

Contruction du découpage mésoscopique adapté : un découpage est adapté lorsqu'il est mésoscopique dans la (les) direction(s) où varient les grandeurs physiques et macroscopique dans les autres directions.

$\rightsquigarrow$

ici : la masse volumique dépend de l'altitude z, mais pas du tout des coordonnées x et y, donc le bon volume mésoscopique est une tranche de surface $S \sim 1\,\mathrm{m}^2$ (macroscopique) et de hauteur $\mathrm{d}z$ (mésoscopique). Faire un schéma en même temps que l'explication.

Espace 6

> ***Remarque :*** *s'agit-il de particules fluides ?*
>
> *Non car macroscopique dans deux directions : le volume méso contient un grand nombre de PF.*

Espace 7

Calcul de la masse :

Masse du volume mésoscopique :

$\mathrm{d}m = \rho(z)\,\mathrm{d}V = \rho_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta} \times S\,\mathrm{d}z$

Espace 8

Masse totale :

$$\begin{aligned} m &= \sum_{\text{tranches}} \mathrm{d}m \\ &= \int_0^{+\infty} \rho_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta} \times S\,\mathrm{d}z \\ &= \rho_0\,S \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-z/\delta}\,\mathrm{d}z \\ &= \rho_0\,S \left[-\delta\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\right]_0^{+\infty} \\ &= \rho_0\,S\delta\,(0+\delta) \end{aligned}$$

$$\boxed{m = \rho_0\,S\delta \simeq 10\,\text{tonnes}\,.}$$

Espace 9

II - Actions mécaniques dans un fluide

II.A - Classification des actions mécaniques

Les forces subies par un solide peuvent être classées en deux grandes catégories :

- les **forces à distance**, exercées par l'intermédiaire d'un champ :
  poids, force de Lorentz ;

Espace 10

- les **forces de contact**, qui nécessitent que l'opérateur touche le système :

  forces de frottement, réaction du support, ressort

Espace 11

En mécanique des fluides, cette classification prend une forme un peu différente, et on distingue plutôt :

- les **forces volumiques**, qui sont la résultante des forces à distance subies par chacune des molécules de la particule fluide ;
- les **forces surfaciques**, qui sont l'équivalent des forces de contact avec les particules fluides voisines ou avec les parois du récipient contenant le fluide.

II.B - Exemple de force volumique : le poids

Force de pesanteur subie par une particule fluide de masse dm située en M :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\mathrm{pes}} = \mathrm{d}m\,\overrightarrow{g} = \rho(M)\,\mathrm{d}\tau\,\overrightarrow{g}\,.$$

Espace 12

⇝ proportionnelle à la masse du système : de façon générale, une force volumique est une grandeur extensive.

> ***Remarque :*** *pour éviter toute confusion avec la pression, on évite traditionnellement la notation $\overrightarrow{\mathrm{d}P}$ pour le poids d'une particule fluide.*

On appelle **densité volumique de force** ou **force volumique**, notée $\overrightarrow{f}$,
le rapport entre la force d$\overrightarrow{F}$ exercée sur une particule fluide et son volume dτ,

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{f}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Densité volumique de force de pesanteur :

$$\overrightarrow{f}_{\mathrm{pes}}(M) = \rho(M)\,\overrightarrow{g}\,.$$

Espace 13

⇝ indépendante de la masse du système et définie localement : de façon générale, une densité volumique de force est une grandeur intensive.

II.C - Exemple de force surfacique : la force de pression

- **Actions mécaniques de contact dans un fluide**

La force exercée par une particule fluide à une interface (avec une autre particule fluide ou avec un solide) se décompose sur deux directions orthogonales, voir figure 1 :

▷ dans la direction normale à la surface, on parle de **force pressante**, ou force de pression ;
▷ dans la direction tangentielle à la surface, on parle de **force visqueuse**, ou force de viscosité.

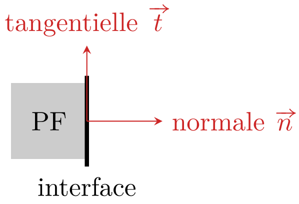
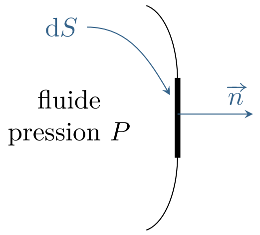


Figure 1 – Direction normale et tangentielle.

Les forces de viscosité seront abordées dans le prochain chapitre ... et pour cause : elles n'existent que si le fluide est en écoulement, et sont donc nulles dans un fluide au repos.



La force exercée par un fluide dans lequel règne une pression P sur un élément mésoscopique d'interface de surface dS centré en M est purement normale dans un fluide au repos et vaut

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F}_P = P(M)\,\mathrm{d}S\,\overrightarrow{n}\,,$$

où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur unitaire normal, dirigé du fluide vers l'extérieur.

> ***Remarque :*** *ce résultat constitue en fait la définition physique de la pression.*

Attention ! Le vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ est orienté *du fluide vers l'extérieur*. Qualitativement et de manière très générale, la force de pression exercée par une portion de fluide est toujours orientée dans le sens qui conduirait le fluide à s'étaler.

On constate que la force pressante est proportionnelle à la surface dS de l'interface considérée. Par analogie avec la définition d'une force volumique, on constate ainsi que la pression peut s'interpréter comme la **densité surfacique** de force pressante.

Attention ! Même si le vocabulaire se ressemble, il y a une distinction fondamentale entre poids et force pressante : la pesanteur est une force volumique (= s'applique dans tout le volume du fluide) alors que la force pressante est surfacique (= s'applique uniquement à l'interface).

- **Interprétation microscopique**

Les molécules d'un gaz ou d'un liquide sont en mouvement permanent sous l'effet de l'**agitation thermique**. La force pressante, définie aux échelles méso et macroscopique, s'interprète à l'échelle microscopique comme étant la résultante des forces dues aux collisions des molécules de fluide sur la paroi solide.

> ***Remarque :*** *On peut vite se rendre compte que cette image n'est qu'à moitié convaincante : la matière est supposée discrète pour le fluide (molécules) et continue pour le solide (paroi). Il est donc rapidement nécessaire de recourir à des modèles microscopiques plus précis ... mais plus compliqués.*

- **Continuité de la pression**

La pression est toujours continue à l'interface entre deux fluides, qu'ils soient au repos ou en écoulement.

> ***Remarque culturelle :*** *Les phénomènes de tension de surface (ménisque, capillarité, etc.) font que cette propriété n'est en fait qu'une approximation.*

- **Unités de pression**

Travailler avec les unités de pression peut vite devenir assez laborieux. L'unité de pression dans le système international est le **pascal Pa**, évidemment en l'honneur de notre lycée :

$$1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}\,.$$

Le pascal a l'inconvénient d'être une « petite unité » (1 Pa est une faible pression), on utilise couramment des unités dérivées, et notamment le **bar**, qui correspond à l'ordre de grandeur de la pression atmosphérique :

$$\boxed{1\,\mathrm{bar} = 1 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\,.}$$

En effet, au niveau de la mer,

$$P_{\mathrm{atm}} = 1{,}013\,\mathrm{bar}\,.$$

D'autres unités du langage courant ou historique se rencontrent également.

> ***Complément culturel :***
> - *Les pressions peuvent être exprimées en atmosphère atm, c'est-à-dire en multiples de la pression atmosphérique ;*
> - *En météorologie, les pressions sont usuellement exprimées en hectopascal : 1 bar correspond à 1000 hPa.*
> - *Les premiers baromètres fonctionnaient par mesure du niveau de mercure dans un tube : l'unité historique de pression était donc le millimètre de mercure mmHg,*
>
> $$1\,\mathrm{mmHg} = 133\,\mathrm{Pa} \qquad \textit{soit} \qquad 1\,\mathrm{atm} = 760\,\mathrm{mmHg}\,.$$
>
> - *Dans l'industrie l'usage est parfois d'exprimer les pressions en kilogramme ou kilogramme-force ... mais cette unité est franchement maladroite du point de vue de la physique, puisqu'il s'agit en fait de kilogramme-force par cm^2. Comme $1\,\mathrm{kgf} = 9{,}81\,\mathrm{N}$ (poids d'une masse de 1 kg),*
>
> $$1\,\mathrm{kgf/cm^2} = 0{,}981\,\mathrm{bar}\,.$$

III - Champ de pression dans un fluide au repos

On appelle **champ de pression** la donnée de la pression en fonction du point M. Il s'agit d'une donnée locale, qui se calcule donc avec une approche locale, c'est-à-dire mésoscopique. Comme la pression est une force, on utilise une approche mécanique.

⇝ application du théorème de la résultante cinétique (TRC) à un système mésoscopique en équilibre.

... et comme toujours en mécanique, il faut préciser le système et le référentiel : la particule fluide est étudiée dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

III.A - Relation de la statique des fluides dans le champ de pesanteur

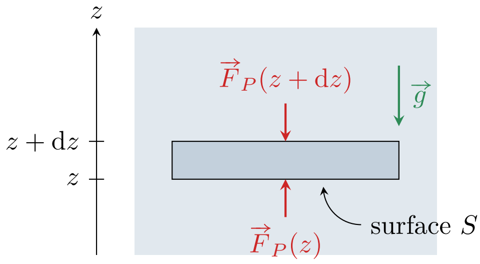
Étude des invariances : Le fluide et l'action de pesanteur sont invariants par translation dans les plans perpendiculaires à Oz.

⇝ le champ de pression ne dépend que de z : $P(M) = P(z)$.

Espace 14

> *On pourrait croire qu'il y a aussi invariance par translation selon Oz car $\vec{g}$ ne dépend pas de z, mais ce n'est en fait pas le cas : l'énergie potentielle de pesanteur $E_{\mathrm{pp}} = mgz$ dépend de z, et n'est donc pas invariante par ces translations.*

Choix du système :



Méso dans le direction z mais macro dans les directions x et y. On raisonne donc sur une tranche mésoscopique de fluide à l'équilibre, de surface S et hauteur infinitésimale $\mathrm{d}z$, délimitée par les plans d'ordonnée z et $z + \mathrm{d}z$.

Bilan des forces : Compléter le schéma au fur et à mesure

▷ son poids $\mathrm{d}\overrightarrow{P} = \rho\,\mathrm{d}V\,\overrightarrow{g} = -\rho\,S\,\mathrm{d}z\,g\,\overrightarrow{e}_z$;
▷ la force pressante exercée par la tranche mésoscopique immédiatement en dessous, $\overrightarrow{F}_P(z) = P(z)\,S\,\overrightarrow{e}_z$;
▷ la force pressante exercée par la tranche mésoscopique immédiatement au dessus, $\overrightarrow{F}_P(z+\mathrm{d}z) = P(z+\mathrm{d}z)\,S\,(-\overrightarrow{e}_z)$
▷ d'autres forces pourraient être prises en compte mais on suppose conformément au programme qu'il n'y en a pas.

Espace 15

TRC et projection :

$$0 = -\rho\,\mathrm{d}V\,g + P(z)\,S - P(z+\mathrm{d}z)\,S\,.$$

Comme $\mathrm{d}z$ est infinitésimal, on peut faire un développement limité en utilisant la formule de Taylor-Young :

$$f(a+h) = f(a) + h\,f'(a) + o(h)$$
$$P(z+\mathrm{d}z) \simeq P(z) + \mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}$$

En physique il est presque toujours sous-entendu qu'on se limite au premier ordre.
En injectant dans l'équation issue du TRC, on en déduit

$$0 = -\rho\,\mathrm{d}V\,g - \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z\,S\,.$$

Simplifier par $\mathrm{d}V = S\,\mathrm{d}z$ conduit finalement à l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho\,g\,.}$$

Espace 16

Relation de la statique des fluides dans le seul champ de pesanteur :

En tout point d'un fluide au repos dans le seul champ de pesanteur,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \pm\rho g$$

Signe $-$ si l'axe z est ascendant et $+$ s'il est descendant.

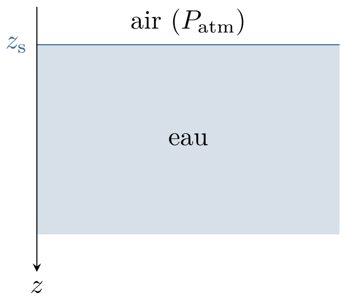
Attention ! Si le fluide est compressible (= un gaz), ρ dépend de P et donc de z.

> ***Remarque :*** *Le signe se retrouve en sachant que la pression diminue toujours avec l'altitude.*

III.B - Conséquence : champ de pression hydrostatique dans un fluide incompressible

Le domaine de l'hydrostatique concerne la statique des liquides incompressibles, de masse volumique ρ_0 constante.

- **Évolution de la pression avec la profondeur**



Axe z descendant, donc la RSF s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = +\rho_0 g$$

On procède ensuite par séparation des variables entre la surface z_{s} et un z quelconque,

$$\int_{P_{\mathrm{atm}}}^{P(z)} \mathrm{d}P = \rho_0 g \int_{z_{\mathrm{s}}}^{z} \mathrm{d}z$$

ce qui donne

$$P(z) = P_{\mathrm{atm}} + \rho_0 g (z - z_{\mathrm{s}})$$

Espace 17

Loi de pression hydrostatique :

Dans un liquide incompressible, la pression ne dépend que de la profondeur et évolue linéairement

$$P(z) = P_{\mathrm{atm}} \pm \rho_0 g (z - z_{\mathrm{s}})$$

où z_{s} est la coordonnée de la surface libre, et le signe dépend du sens de l'axe (Oz).

La différence de pression entre deux points ne dépend que de l'écart de profondeur,

$$\Delta P = \rho_0\, g\, \Delta z$$

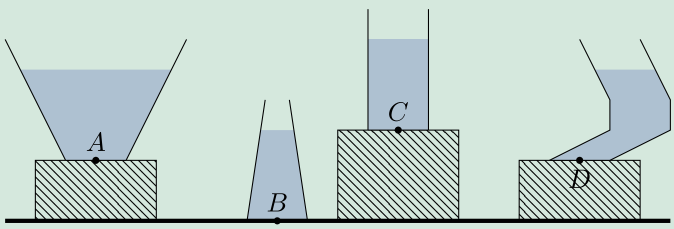
En particulier, en un point situé sous une hauteur h de liquide,

$$P = P_{\mathrm{atm}} + \rho_0 g h\,.$$

- **Exemple d'illustration**

Application 2 : Applications de la loi de l'hydrostatique

1 - Comparer les pressions aux points A, B, C et D. Les récipients sont posés sur des supports de différentes hauteurs.



2 - Comparer les masses d'eau dans les quatre récipients ci-dessus et la force pressante exercée sur leur fond.

$\boxed{3}$ Même hauteur d'eau dans tous les récipients, donc même pression en chacun des points, la hauteur du support

ne joue aucun rôle.
$\boxed{4}$ La masse est reliée au volume donc $m_A > m_C > m_D > m_B$ mais la force de pression subie par le fond ne dépend que de la surface, qui est la même donc toutes égales. Contrairement à l'intuition, le fond du récipient ne supporte pas toute la masse du fluide, les parois latérales en supportent aussi une partie.

Espace 18

- **Ordres de grandeur**

Masse volumique de l'eau : $\rho_0 = 1 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

▷ Pression au fond de la Seine à Rouen (profondeur moyenne d'environ 9 m) :

$P = 1{,}9\,\mathrm{bar}$

Espace 19

▷ Pression au fond de la fosse des Mariannes (lieu le plus profond de l'océan, environ 10 km, au large des Philippines) :

$P = 1 \cdot 10^8\,\mathrm{bar} = 1000\,\mathrm{atm}$

Espace 20

Dans l'eau, la pression augmente d'un bar tous les dix mètres de profondeur.

Peut-on supposer la pression uniforme dans l'eau ?

Oui sur des distances de l'ordre de quelques dizaines de centimètres.

Espace 21

III.C - Conséquence : modèle de l'atmosphère isotherme

Il est bien connu des montagnards qu'il est plus difficile de respirer sur les sommets que dans les vallées, car la pression atmosphérique diminue en altitude. Nous allons interpréter cet effet par un modèle très simple, en décrivant l'atmosphère comme un gaz parfait de température T_0 uniforme.

- **Lien entre pression et masse volumique**

Attention ! La masse volumique d'un gaz n'est pas constante, mais elle dépend de la pression.

$$P\frac{V}{m} = \frac{n}{m}RT_0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{P}{\rho} = \frac{RT_0}{M} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\rho = \frac{PM}{RT_0}\,.}$$

Espace 22

- **Profil de pression dans l'atmosphère isotherme**

D'après la RSF avec z ascendant
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\frac{PM}{RT_0}g$$
ce qui s'écrit sous forme canonique
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} + \frac{1}{\delta}P = 0 \qquad \text{avec} \qquad \delta = \frac{RT_0}{Mg} \simeq 8\,\mathrm{km}\,.$$
Forme générale des solutions : solution particulière nulle, donc
$$P(z) = A\,\mathrm{e}^{-z/\delta}$$
Condition aux limites :
$$P(0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CL}}}{=} P_0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} A$$
Finalement :
$$\boxed{P(z) = P_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\,.}$$

Espace 23

Dans l'atmosphère isotherme, la pression décroît exponentiellement avec l'altitude.

- **Ordres de grandeur**

▷ Rapport des pressions entre le niveau de la mer et le sommet de l'Everest : $h \simeq 8848\,\mathrm{m}$, donc
$$\frac{P_{\text{Everest}}}{P_{\text{mer}}} = \frac{P_0\,\mathrm{e}^{-h/\delta}}{P_0} = 0{,}33\,.$$
▷ Rapport des pressions entre la salle de cours et la salle de TP :
$$\frac{P_{\text{TP}}}{P_{\text{cours}}} = \frac{P_0\,\mathrm{e}^{-z_{\text{TP}}/\delta}}{P_0\,\mathrm{e}^{-z_{\text{cours}}/\delta}} = \exp\left(-\frac{(z_{\text{TP}} - z_{\text{cours}})}{\delta}\right) = 0{,}9995 \qquad \text{avec} \qquad z_{\text{TP}} - z_{\text{cours}} \simeq 4\,\mathrm{m}\,.$$

La pression varie de manière bien plus importante dans un liquide que dans un gaz.

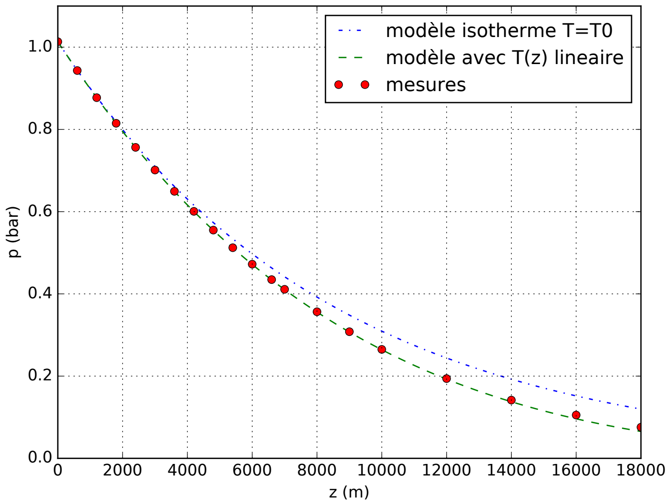
Peut-on supposer la pression uniforme dans l'air ?

Oui sur des distances très inférieures à δ, soit quelques centaines de mètres.

Espace 24

⇝ à échelle humaine, la pression atmosphérique peut toujours être supposée uniforme.

- **Pertinence du modèle**



Points rouges : mesures de pression dans l'atmosphère.

Courbe bleue : modèle isotherme à $T_0 = 273\,\mathrm{K}$.

Courbe verte : modèle à profil de température linéaire, aussi appelé modèle polytropique, qui postule une évolution de la forme $T = T_0(1 - \alpha z)$.

$\rightsquigarrow$ le modèle isotherme est qualitativement cohérent, mais peu précis numériquement au delà de quelques kilomètres d'altitude.

III.D - Généralisation (hors programme)

On suppose désormais le fluide est soumis à d'autres actions mécaniques que la pesanteur : le champ de pression dépend a priori des trois variables cartésiennes d'espace. Ce cas général n'est pas explicitement au programme : les résultats ne sont donc pas à retenir, en revanche les raisonnements sont très proches du cas unidimensionnel à connaître et peuvent parfaitement faire l'objet d'un exercice.

Lorsque l'on cherche à établir une équation différentielle vérifiée par le champ de pression, on adopte une approche mésoscopique. On raisonne donc sur une particule fluide de côtés $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$, centrée sur le point M de coordonnées (x, y, z), comme représenté figure 2. Cette particule fluide subit une force de pression sur chacune de ses faces, exercée par les particules fluides voisines.

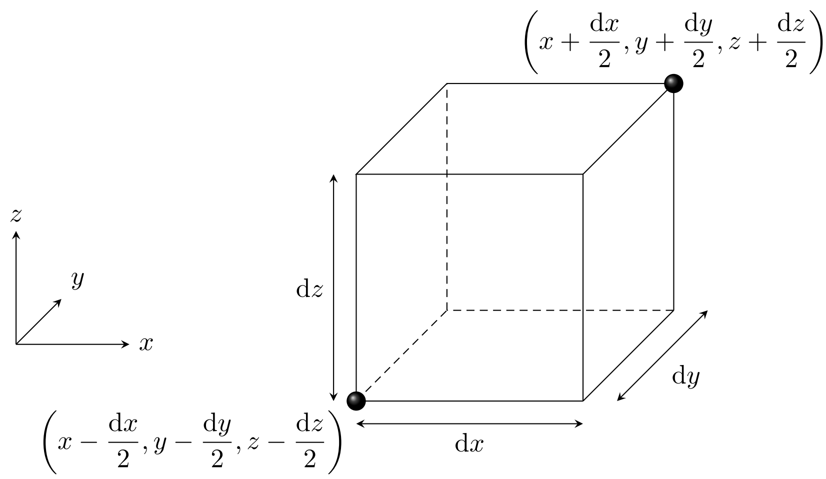


Figure 2 – Schéma de la particule fluide étudiée.

- **Équivalent volumique des forces de pression**

Calculons la résultante des forces de pression subies par la particule fluide. Comme le calcul est identique dans les trois directions, on ne calcule explicitement que la composante z.

$$\mathrm{d}F_{P,z} = \underbrace{+P\left(x, y, z - \frac{\mathrm{d}z}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{\text{face du bas}} \underbrace{-P\left(x, y, z + \frac{\mathrm{d}z}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{\text{face du haut}}$$

Espace 25

Comme $\mathrm{d}z$ est infinitésimal, on peut faire un développement limité en introduisant une dérivée partielle,

$$\mathrm{d}F_{P,z} = P(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \frac{\mathrm{d}z}{2}\left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{x,y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - P(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \frac{\mathrm{d}z}{2}\left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{x,y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

et en simplifiant

$$\mathrm{d}F_{P,z} = -\frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Le même raisonnement s'applique aux autres composantes et conduit à

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F}_P = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\overrightarrow{e}_x + \frac{\partial P}{\partial y}\overrightarrow{e}_y + \frac{\partial P}{\partial z}\overrightarrow{e}_z\right)\mathrm{d}\tau\,.$$

On appelle **gradient** l'opérateur qui à un champ scalaire f associe le champ vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$, donné en coordonnées cartésiennes par

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e}_z\,.$$

En un point M, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$ est dirigé dans la direction et le sens où f augmente le plus, et sa norme est d'autant plus grande que les variations de f sont spatialement rapides.

Attention ! Dans les autres systèmes de coordonnées, l'expression du gradient en fonction des dérivées partielles n'est pas aussi simple : se reporter à la fiche outil sur l'analyse vectorielle.

Conclusion : on peut identifier un équivalent volumique des forces de pression.

La résultante des forces de pression subie par une particule fluide de volume $\mathrm{d}\tau$ s'écrit

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F}_P = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P\,\mathrm{d}\tau\,.$$

La densité volumique de force est donc $\overrightarrow{f}_P = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P$.

- **Relation (générale) de la statique des fluides**

▷ Système : particule fluide.

▷ Référentiel : terrestre, considéré galiléen.

▷ Bilan des forces : la particule fluide est soumise à
- → son poids $\mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\mathrm{pes}} = \rho\,\mathrm{d}\tau\,\overrightarrow{g}$;
- → forces de pression $\mathrm{d}\overrightarrow{F}_P = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P\,\mathrm{d}\tau$;
- → éventuellement d'autres forces $\mathrm{d}\overrightarrow{F}_i = \overrightarrow{f}_i\,\mathrm{d}\tau$ de densité volumique de force $\overrightarrow{f}_i$.

▷ Théorème de la résultante cinétique : la particule fluide est à l'équilibre, donc son accélération est nulle, et ainsi

$$\overrightarrow{0} = \rho\,\mathrm{d}\tau\,\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P\,\mathrm{d}\tau + \sum_i \overrightarrow{f}_i\,\mathrm{d}\tau$$

En simplifiant par le volume $\mathrm{d}\tau$, on en déduit le résultat général :

Relation de la statique des fluides :

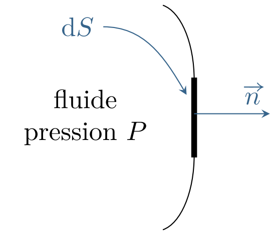
En tout point M d'un fluide en équilibre,

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P = \rho\overrightarrow{g} + \sum_i \overrightarrow{f}_i\,.$$

Cette équation a été établie par une approche locale (c'est-à-dire en un point M) sans rien supposer sur ce qui se passe ailleurs (obstacles, forme du récipient, conditions aux limites, etc.). Elle est donc toujours et partout valable.

Projeter la relation de la statique des fluides donne trois équations aux dérivées partielles sur le champ de pression, que l'on peut intégrer pour en déduire le champ de pression.

IV - Résultante des forces de pression subies par un solide



Rappel : la force pressante subie par un élément mésoscopique de surface dS s'écrit

$$\mathrm{d}\vec{F}_P = P(M)\,\mathrm{d}S\,\vec{n}\,,$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal, dirigé du fluide vers la paroi.

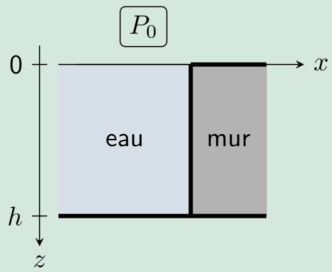
Attention ! Ne pas se tromper sur le sens de $\vec{n}$. De façon générale, la force de pression est toujours orientée dans le sens qui conduirait la particule fluide à s'étaler.

Méthode de calcul : découpage mésoscopique de la surface solide en contact avec le fluide puis sommation, c'est-à-dire en pratique calcul d'intégrale.

On peut ou bien construire un découpage mésoscopique « sur-mesure », c'est-à-dire adapté aux propriétés de symétries et invariances du système, ou bien utiliser directement l'élément de surface du système de coordonnées adéquat.

IV.A - Exemple : paroi plane soumise à la pression hydrostatique

Application 3 : Force pressante exercée sur le mur d'une piscine



On s'intéresse à un pan de mur vertical d'une piscine profonde de $h = 4\,\mathrm{m}$. Le pan de mur est large de $L = 10\,\mathrm{m}$ dans la direction (Oy).

1 - Peut-on supposer la pression uniforme au sein de la piscine ?

2 - Calculer la force de pression subie par le mur en utilisant un découpage mésoscopique bien choisi.

3 - Reprendre le calcul par intégration directe de la force élémentaire.

IV.A.1 - Uniformité de la pression ?

Il faut tenir compte des variations de pression car h n'est pas négligeable devant $10\,\mathrm{m}$. On utilise l'hydrostatique avec z descendant et la surface en $z = 0$, soit $P(z) = P_0 + \rho_0 g z$.

Espace 26

IV.A.2 - Première méthode : utilisation d'un découpage mésoscopique sur-mesure.

Construction du découpage :

La pression ne dépend que de z, mais pas de x et y. Le vecteur normal $\vec{n} = \vec{e}_x$ est identique en tout point du mur.

$\rightsquigarrow$ la force pressante est uniforme sur une bande de largeur L et de hauteur dz.

Faire un schéma en indiquant bien le découpage en bandes.

Espace 27

Attention ! C'est bien la force pressante (= un vecteur) que l'on étudie et pas la pression (= un scalaire) : même si la pression est uniforme, la force peut ne pas l'être si la direction change.

Force pressante sur une bande mésoscopique :
$\mathrm{d}\vec{F}_P = P(z) \times L\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_x$.

Espace 28

Résultante subie par la paroi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}_P &= \sum_{\text{bandes}} \mathrm{d}\overrightarrow{F}_P = \int_0^h (P_0+\rho g z) L \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e}_x \\ &= L\left(\int_0^h (P_0+\rho g z)\mathrm{d}z\right)\overrightarrow{e}_x \\ \Aboxed{\overrightarrow{F}_P &= \left(P_0+\frac{\rho g h}{2}\right) Lh\,\overrightarrow{e}_x\,.}\end{aligned}$$

Espace 29

IV.A.3 - Deuxième méthode : intégration directe à partir de l'élément de surface.

Au même titre que le vecteur déplacement élémentaire vu en mécanique en PTSI a une expression propre à chaque système de coordonnées, la surface élémentaire $\mathrm{d}S$ (et le volume élémentaire) a elle aussi une expression dans chaque système de coordonnées. Elle s'obtient à partir du vecteur déplacement élémentaire. En cartésiennes,

$$\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{e}_x + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{e}_y + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e}_z\,.$$

Le vecteur normal à la paroi est $\overrightarrow{e}_x$, la surface élémentaire est le produit des deux composantes restantes, d'où

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Refaire le schéma du mur en indiquant $\mathrm{d}S$. Dans le cas du mur de piscine, cela donne

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}_P &= \iint P(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e}_x \\ &= \left(\int_0^L \mathrm{d}y\right)\times\left(\int_0^h (P_0+\rho g z)\right)\overrightarrow{e}_x \\ &= L\left(\int_0^h (P_0+\rho g z)\mathrm{d}z\right)\overrightarrow{e}_x\end{aligned}$$

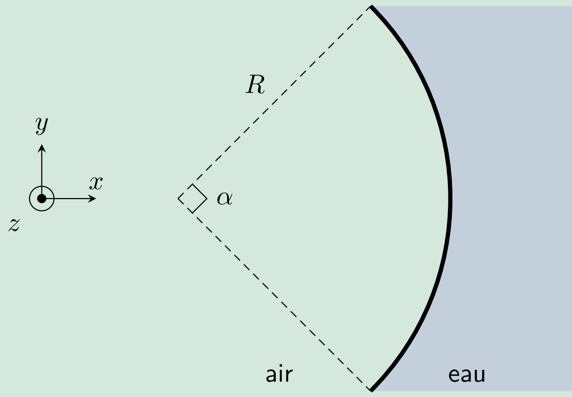
et on est ramené au cas précédent.

Espace 30

IV.B - Exemple : paroi cylindrique soumise à la pression hydrostatique

Application 4 : Barrage voûte

Un barrage voûte est ainsi nommé en raison de sa forme arquée caractéristique. La forme courbe de ces barrages permet de reporter les efforts dus à la poussée de l'eau sur chaque côté des rives. Un tel barrage fonctionne sur le même principe que les voûtes des cathédrales : pour ces dernières, la charge se concentre sur les piliers des voûtes, alors que pour les barrages, l'effort se concentre aux points d'appuis sur les rives. Ce type de barrage est donc adapté aux vallées étroites disposant de versant très rigides. On modélise un tel barrage par un quart de cylindre de hauteur $H = 135$ m, rayon R et d'ouverture $\alpha = \pi/2$.



1 - On se place en coordonnées cylindiques d'axe (Oz) ascendant dont l'origine coïncide avec le fond du barrage. Exprimer le champ de pression dans l'eau.

2 - Déterminer sans calcul la direction et le sens des forces exercées par l'air sur le barrage, par l'eau sur le barrage, puis de la résultante.

3 - Calculer la force $\vec{F}_{\text{air}}$ exercée par l'air sur le barrage.

4 - Calculer la force $\vec{F}_{\text{eau}}$ exercée par l'eau sur le barrage.

5 - En déduire la résultante.

IV.B.1 - Champ de pression

On repart de la relation de l'hydrostatique avec axe ascendant et surface en $z = H$, ce qui donne en intégrant

$$P(z) = P_{\text{atm}} - \rho_0 g(z - H)\,.$$

Espace 31

IV.B.2 - Direction des forces pressantes

Le plan (xOz) est plan de symétrie du barrage. Ainsi, les forces de pression exercées en deux points M et M' du barrage symétriques par rapport à ce plan ont la même composante x mais des composantes y opposées, à dessiner. Le barrage étant cylindrique, la composante z est nulle.
La pression côté eau étant supérieure à celle côté air, on en déduit que la résultante des forces de pression est **dirigée selon** $-\vec{e}_x$.

Espace 32

IV.B.3 - Calcul de la force exercée par l'air

Peut-on supposer la pression atmosphérique constante ?

La pression dans l'air varie sur une échelle de quelques kilomètres : on peut donc la supposer constante à l'échelle du barrage, notée P_{atm}.

Espace 33

Élément de surface adapté :

L'élément de surface du barrage qui subit à la force exercée par l'air est de normale $+\vec{e}_r$, à indiquer sur le schéma, donc de surface $\mathrm{d}S = R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$.

Espace 34

Calcul de la force :

> ***Remarque :*** *Pour éviter les calculs d'intégrales inutiles, on ne calcule évidemment pas les composantes dont on sait par symétries qu'elles sont nulles ... mais attention à ne pas confondre projection et norme : le produit scalaire introduit souvent un cosinus supplémentaire.*

La composante utile de la force de pression subie par le barrage est donc

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{air},x} = P_0\,\mathrm{d}S\,\vec{e}_r\cdot\vec{e}_x = P_0\times R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\times\cos\theta\,.$$

La composante utile de la résultante est donc

$$\begin{aligned}F_{\mathrm{air},x} &= \iint_{\mathrm{barrage}} P_0\,R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\\ &= P_0\,R\times\int_{z=0}^{z=H}\mathrm{d}z\times\int_{\theta=-\pi/4}^{\theta=\pi/4}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= P_0\,R\,H\left[\sin\theta\right]_{\theta=-\pi/4}^{\theta=\pi/4}\\ &= P_0RH\times 2\sin\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Les autres composantes étant nulles, on en conclut

$$\boxed{\vec{F}_{\mathrm{air}} = \sqrt{2}\,P_0\,RH\,\vec{e}_x}$$

Espace 35

IV.B.4 - Calcul de la force exercée par l'eau

Le calcul est à peu de choses près identiques, mais cette fois la pression varie avec la profondeur selon la loi de l'hydrostatique. La force exercée par l'eau est dans l'autre sens (normale $-\vec{e}_r$). Le reste du calcul est analogue.

$$\begin{aligned} F_{\text{eau},x} &= -\iint_{\text{barrage}} (P_0 - \rho_0 g(z-H))\, R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \\ &= -R \times \int_{z=0}^{z=H} (P_0 - \rho_0 g(z-H))\mathrm{d}z \times \int_{\theta=-\pi/4}^{\theta=+\pi/4} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= -R\left[(P_0+\rho_0 gH)z - \rho_0 g\frac{z^2}{2}\right]_0^H [\sin\theta]_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} \\ &= -R\left(P_0 H + \rho_0 g\frac{H^2}{2}\right) \times 2\sin\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

et on conclut

$$\boxed{\vec{F}_{\text{eau}} = -\sqrt{2}R\left(P_0 H + \rho_0 g\frac{H^2}{2}\right)\vec{e}_x\,.}$$

Espace 36

IV.B.5 - Force résultante

La force pressante résultante est simplement la somme des deux précédentes,

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{R\,\rho\,g\,H^2}{\sqrt{2}}\,\vec{e}_x\,,}$$

de norme

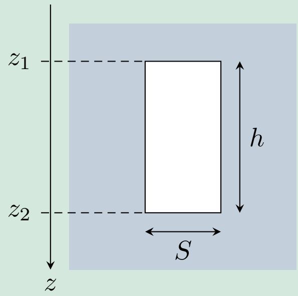
$$F = 1{,}8\cdot 10^{10}\,\mathrm{N}\,.$$

Espace 37

IV.C - Cas d'un solide totalement immergé : poussée d'Archimède

- **Démonstration sur un exemple**

Application 5 : Démonstration du théorème d'Archimède sur un exemple



Considérons le cylindre ci-contre, totalement immergé dans un liquide de masse volumique ρ_0. Calculer la résultante des forces de pression subies par le cylindre.

Le calcul de la force de pression se décompose en trois domaines : les deux faces planes et la face cylindrique. Par symétrie, $\vec{F}_{\text{cyl}} = \vec{0}$. On a ensuite

$$\vec{F}_{\text{haut}} = (P_0 + \rho_0 g z_1) S \vec{e}_z \qquad \text{et} \qquad \vec{F}_{\text{bas}} = -(P_0 + \rho_0 g z_2) S \vec{e}_z$$

et finalement

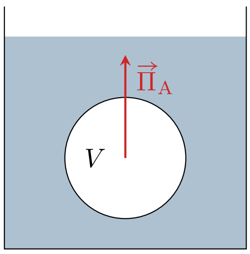
$$\vec{F}_P = \rho_0 g (z_1 - z_2) S \vec{e}_z = -\rho_0 g S h \vec{e}_z \,,$$

On voit apparaître le volume du cylindre

Espace 38

- **Généralisation : théorème d'Archimède**

On appelle **poussée d'Archimède** la force exercée par un fluide au repos sur un corps totalement immergé. Cette force est la résultante des forces de pression.



La poussée d'Archimède subie par un système dont un volume V_{imm} est immergé dans un fluide est égale à l'opposée du poids d'un volume V_{imm} de ce fluide,

$$\vec{\Pi}_A = -\rho_{\text{fl}} V_{\text{imm}} \vec{g}$$

où ρ_{fl} est la masse volumique du fluide. Elle s'applique au centre de poussée, qui est le centre de masse du volume immergé.

> ***Remarque :*** *Ce sont les variations de pression avec l'altitude qui expliquent la poussée d'Archimède. Si on suppose la pression uniforme autour du corps immergé, alors on a $\vec{\Pi}_A = \vec{0}$. La poussée d'Archimède est dirigée vers le haut car la pression est toujours plus importante sous l'objet qu'au dessus.*

- **Deux cas particuliers fréquents**

▷ Lorsque le solide flotte à l'interface entre deux fluides, il subit une poussée d'Archimède de la part de chaque fluide, correspondant à la proportion de volume immergé dans chaque fluide. À l'interface entre un liquide et un gaz, la poussée d'Archimède exercée par le gaz est presque toujours négligeable (masse volumique très inférieure).

▷ Lorsque le solide est posé sur le fond du récipient, il n'est pas « totalement immergé » : sa face inférieure ne subit pas une force de pression mais une force de réaction exercée par le fond du récipient, qui est a priori inconnue. Le théorème d'Archimède est alors inutilisable et il faut calculer « à la main » la résultante des forces de pression.