TD 14 – Séquence 4 : Électromagnétisme

Champ magnétique
Théorème d'Ampère

BLAISE PASCAL
PT 2022-2023

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

Flasher ce code pour accéder au corrigé

Ceinture		Proposition de parcours d'entraînement
	Ceinture blanche	Questions de cours + exercices 1 et 6
	Ceinture jaune	Questions de cours + exercices 1, 4, 5 et 6
	Ceinture rouge	Questions de cours (★) + exercices 2 à 7
	Ceinture noire	Questions de cours (★) + exercices 2 à 8

Questions et applications de cours

Seuls les étudiants du groupe PT★ seront interrogés en colle sur les questions marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !

14.1 - Établir l'expression du champ magnétostatique créé par un fil rectiligne infiniment fin parcouru par un courant d'intensité I.

14.2 - Établir l'expression du champ magnétostatique créé par un cylindre d'axe (Oz), de rayon R, parcouru par une densité volumique de courant $\vec{j} = J_0 \vec{e}_z$ uniforme.

14.3 - Établir l'expression du champ magnétostatique créé en tout point de l'espace par un solénoïde d'axe (Oz) formé de n spires par unité de longueur et parcouru par un courant d'intensité I. Pour mener le calcul à son terme, le champ doit être partiellement fourni par l'interrogateur :
- ▷ ou bien on admettra que le champ à l'extérieur du solénoïde est uniformément nul ;
- ▷ ou bien on admettra que le champ sur l'axe du solénoïde vaut $\mu_0 n I \vec{e}_z$.

14.4 - Établir l'expression de l'inductance d'une bobine de grande longueur assimilée à un solénoïde infini « en passant par le flux propre ».

14.5 - Établir l'expression de l'inductance d'une bobine de grande longueur assimilée à un solénoïde infini « en passant par l'énergie ».

Théorème d'Ampère

Exercice 1 : Cylindre parcouru par un courant inhomogène

1 | 1 |

- ▷ *Théorème d'Ampère ;*
- ▷ *Coordonnées cylindriques.*

On considère un câble cylindrique de rayon R et d'axe z parcouru par un courant d'intensité I réparti de façon non uniforme au sein du câble,

$$\vec{j}(r) = J_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{e}_z \,.$$

1 - Exprimer J_0 en fonction de I.

2 - Calculer le champ magnétostatique créé par ce câble en tout point de l'espace.

3 - Vérifier que le champ trouvé obéit bien à l'équation de Maxwell-Ampère.

Donnée : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial B_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial B_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\dfrac{\partial B_r}{\partial z} - \dfrac{\partial B_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (rB_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial B_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$

Exercice 2 : Plan épais parcouru par un courant — 2 | 2

- *Théorème d'Ampère ;*
- *Coordonnées cartésiennes ;*
- *Utilisation avancée des propriétés de symétrie.*

Entre les deux plans $z=-a$ et $z=+a$ existe un courant de densité volumique uniforme $\vec{j} = j_0\,\vec{u}_x$. Calculer le champ magnétique en tout point de l'espace et le représenter graphiquement. On pourra montrer par des arguments de symétrie que le champ magnétique est nul dans le plan $z=0$.

Exercice 3 : Fil conducteur creux — oral banque PT | 2 | 2

- *Théorème d'Ampère ;*
- *Principe de superposition.*

Un fil conducteur épais de rayon R et d'axe $\vec{u}_z$ est parcouru par un courant de densité $j\,\vec{u}_z$ uniforme.

1 - Déterminer le champ $\vec{B}_0$ en tout point M de l'espace.

2 - Exprimer $\vec{B}_0$ en fonction de $\vec{u}_z$ et $\overrightarrow{OM}$.

On suppose maintenant que le fil est creux et présente une cavité cylindrique parallèle à l'axe du cylindre mais décentrée par rapport à cet axe. Dans le reste du cylindre, la densité de courant est toujours égale à j.

3 - Calculer le champ magnétique dans la cavité.

Exercice 4 : Transformateur torique — 2 | 2 |

- *Théorème d'Ampère ;*
- *Induction mutuelle.*

On s'intéresse dans cet exercice au transformateur représenté ci-dessous, dans lequel les spires du primaire et du secondaire sont bobinées en alternance autour d'un tore de section carrée. Le primaire compte $N_1 \gg 1$ spires, parcourues en série par le courant i_1, et le secondaire $N_2 \neq N_1$ spires parcourues par le courant i_2.

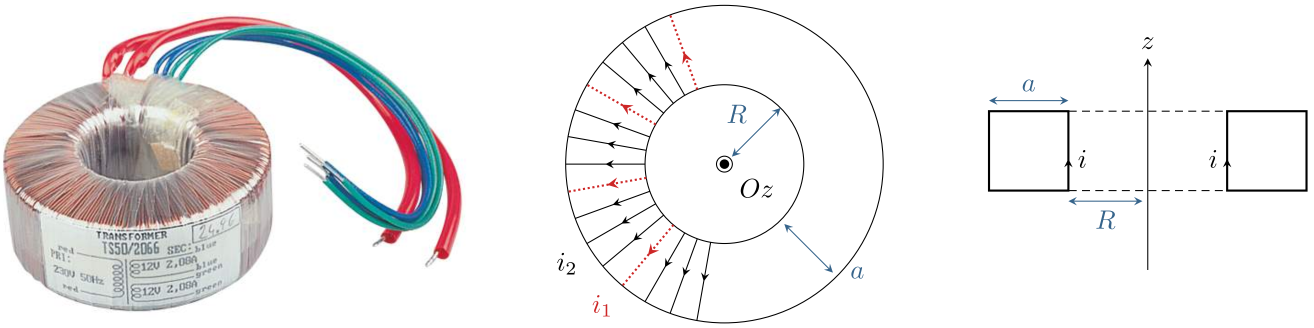

Figure 1 – Transformateur torique à section carrée. Les spires du primaire sont représentées en traits pointillés et les spires du secondaire en traits pleins. Avec ce schéma, on aurait $N_2 = 3N_1$.

1 - Calculer le champ $\vec{B}_1$ créé en tout point de l'espace par le primaire pris seul, puis son inductance propre L_1.

2 - En déduire sans calcul l'inductance propre L_2 du secondaire.

3 - Calculer l'inductance mutuelle M. Montrer qu'elle s'exprime simplement en fonction de L_1 et L_2 uniquement.

4 - On impose au primaire une tension sinusoïdale $u_1(t) = U_1\cos(\omega t)$, alors que le secondaire est ouvert. Quelle est la tension $u_2(t)$ mesurée aux bornes du secondaire ? Que se passerait-il si u_1 était constante ?

5 - Le transformateur annonce une conversion $230\,\mathrm{V} \to 12\,\mathrm{V}$. En déduire la valeur numérique du rapport N_1/N_2.

Équations de Maxwell

Exercice 5 : Manipulation des équations de Maxwell — 1 | 2

▷ *Équations de Maxwell.*

On suppose que règne dans l'espace le champ électromagnétique

$$\begin{cases} \vec{E}(M,t) = f(z)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\vec{e}_x \\ \vec{B}(M,t) = g(z)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\vec{e}_y \end{cases}$$

où τ est une constante de temps et f, g deux fonctions que l'on cherche à déterminer. On suppose que l'espace est vide de charges et de courants.

1 - Vérifier que la forme de ces deux champs est compatible avec les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson.

2 - Montrer que l'équation de Maxwell-Faraday impose une relation entre $g(z)$ et $f'(z)$.

3 - Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère impose une relation entre $f(z)$ et $g'(z)$.

4 - En déduire une équation différentielle vérifiée par f. La résoudre en supposant que $\vec{E}(z=0,t=0) = E_0\,\vec{e}_x$ et que le champ électrique est nul en $z \to +\infty$ à tout instant.

5 - En déduire l'expression complète du champ électromagnétique.

Exercice 6 : Chauffage par induction — 1 | 2 |

▷ *Équations de Maxwell ;*
▷ *Puissance volumique d'effet Joule ;*
▷ *Intégration de dérivées partielles.*

On étudie dans cet exercice un dispositf modèle permettant de chauffer un cylindre métallique par induction électromagnétique, potentiellement jusqu'à une température supérieure à sa température de fusion. Il s'agit d'une bobine parcourue par un courant alternatif $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ de forte intensité. Au centre de cette bobine est placé un cylindre conducteur, qui est le métal à chauffer, de conductivité électrique γ. Ce principe est par exemple utilisé dans des dispositifs de soudure électromagnétique.

1 - Faire un schéma du dispositif et donner sans calcul l'expression du champ créé par la bobine. Pour simplifier, on négligera tout effet de bord, ce qui revient à l'assimiler à un solénoïde infini.

2 - Justifier qu'un champ électrique apparaît au sein de la bobine. En déduire qualitativement pourquoi le métal placé au centre chauffe.

On peut montrer que le champ électrique induit dans le métal est de la forme $\vec{E} = E_\theta(r,t)\,\vec{e}_\theta$.

3 - Exprimer $\vec{E}$ en fonction notamment de r et I_0.

4 - En déduire la densité de courant induite dans le matériau, puis l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule. Où le métal va-t-il fondre en premier ?

Donnée : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$

Exercice 7 : Émission radioactive

d'après divers oraux | 2 | 2

▷ *Équations de Maxwell.*

Un amas d'atomes radioactifs, supposé ponctuel, émet à partir de l'instant $t = 0$ des particules α avec une vitesse constante v_0. On suppose la distribution de la direction d'émission isotrope. On rappelle que les particules α sont des noyaux d'hélium ${}^4_2$He, et on admet qu'à l'instant t la charge électrique de l'amas vaut

$$q(t) = Q_0 \left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1\right) \qquad \text{avec} \qquad Q_0 > 0\,.$$

1 - Vérifier qualitativement la cohérence de la loi $q(t)$.

2 - Montrer que le champ magnétique est nul en tout point de l'espace.

3 - Calculer le champ électrique $\vec{E}(M,t)$ en tout point M de l'espace. On pourra l'exprimer en fonction de $t - r/v_0$.

4 - Déterminer les densités volumiques de charge $\rho(M,t)$ puis de courant $\vec{j}(M,t)$.

Donnée : En coordonnées sphériques, on donne pour un champ $\vec{A} = A_r(r,t)\vec{u}_r$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \vec{0}\,.$$

Pour aller plus loin

Exercice 8 : Lévitation magnétique

3 | 3

▷ *Inductance propre ;*
▷ *Flux magnétique ;*
▷ *Force de Laplace.*

Au Palais de la Découverte, à Paris, une expérience présentée aux visiteurs consiste à faire léviter un plateau métallique en aluminium au-dessus d'une bobine d'une centaine de spires parcourue par un courant alternatif.

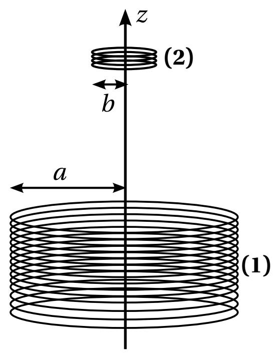

Figure 2 – Lévitation magnétique.

Pour comprendre simplement ce phénomène, considérons un long bobinage, noté (1), de n spires par unité de longueur, d'axe (Oz) et de rayon a. Il est parcouru par un courant alternatif $i_1(t) = I_0\cos(\omega t)$. Une bobine circulaire de N spires et de rayon $b \ll a$, notée (2), est placée au-dessus de (1), à une distance z sur l'axe. On se place dans l'ARQS magnétique.

Le champ magnétique créé par le bobinage (1) au centre de la spire (2) s'écrit :

$$\vec{B}(r\!=\!0,z,t) = \mu_0 n i_1(t)(1-\cos\alpha)\vec{u}_z \qquad \text{avec} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{z}\,.$$

1 - En supposant que la composante B_z du champ est uniforme sur la section de la bobine (2), déterminer le coefficient d'induction mutuelle M entre les deux bobines.

2 - La bobine (2) présente une résistance R et une inductance propre L. Montrer qu'il y apparaît un courant $i_2(t) = I_m\cos(\omega t + \varphi)$, pour lequel on déterminera l'amplitude I_m et $\cos\varphi$.

3 - Le champ $\overrightarrow{B}$ créé par la bobine (1) a également une composante radiale $B_r(r, z)$. En raisonnant sur le flux sortant d'un petit cylindre centré sur l'axe (Oz), de hauteur $\mathrm{d}z$ et de rayon $r \ll a$, montrer que

$$B_r(r, z, t) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z(0, z, t)}{\partial z}$$

4 - Essayer[1] d'en déduire que

$$B_r(r=b, z, t) = \frac{\mu_0 n i_1(t) b}{2a} \sin^3 \alpha\,.$$

5 - Calculer la force de Laplace qui s'exerce sur la spire (2), puis sa moyenne temporelle. L'exprimer en fonction notamment de I_m, I_0 et $\cos\varphi$.

6 - Justifier que la spire atteint une position d'équilibre, qu'il n'est pas demandé de déterminer. Étudier sa stabilité.

7 - Expliquer qualitativement comment le modèle à deux bobines permet d'expliquer la lévitation du plateau d'aluminium visible au Palais de la découverte. De quoi les spires de la bobine (2) seraient-elles l'analogue ?

1. Admettez le résultat si vous n'y arrivez pas : les questions intéressantes sont les suivantes, celle-ci est technique, et même probablement trop technique pour la banque PT.