BLAISE PASCAL
PT 2022-2023

TD 18 – Séquence 6 : Ondes électromagnétiques

Ondes électromagnétiques dans le vide

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

Ceinture		Proposition de parcours d'entraînement
	Ceinture blanche	Questions de cours + exercices 1, 3 et 6
	Ceinture jaune	Questions de cours + exercices 1, 3, 4 et 6
	Ceinture rouge	Questions de cours (★) + exercices 2 à 7
	Ceinture noire	Questions de cours (★) + exercices 2 à 8

Flasher ce code pour accéder au corrigé

Questions et applications de cours

Seuls les étudiants du groupe PT* seront interrogés en colle sur les questions marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !

18.1 - Établir l'équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide pour le champ électrique ou magnétique, au choix de l'interrogateur. Identifier dimensionnellement la célérité c.

18.2 - Établir la relation de dispersion dans le cas particulier d'une OPPH se propageant dans le sens des x croissants en utilisant, au choix de l'interrogateur, les champs réels ou les champs complexes.

18.3 - Établir les écritures complexes des équations de Maxwell dans le cas particulier d'une OPPH de la forme

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM}\right)}\vec{e}_y\,.$$

En déduire la relation de structure.

18.4 - Sur un exemple de champ électrique donné par l'interrogateur (coordonnées cartésiennes uniquement), identifier la direction et le sens de propagation, l'état de polarisation de l'onde, puis en déduire le champ magnétique et le vecteur de Poynting.

(★) 18.5 - Rappeler sans démonstration mais en le justifiant physiquement le bilan d'énergie électromagnétique pour un volume de contrôle macroscopique. En déduire l'équation de Poynting sous forme locale.

Structure des OEM dans le vide

Exercice 1 : Onde sphérique — 1 | 1

- *OPPH ;*
- *Vecteur de Poynting.*

On considère un émetteur isotrope d'ondes électromagnétiques que l'on assimile à une source ponctuelle : il peut s'agir d'un émetteur de radio, d'un satellite, d'une étoile qui rayonne, etc. L'onde émise est sphérique, de la forme en coordonnées sphériques

$$\vec{E}(M,t) = E_0(r)\cos(\omega t - kr)\,\vec{e}_\theta \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{\omega}{c}\,.$$

Le milieu de propagation est assimilé au vide.

1 - Par analogie avec une onde plane, identifier le vecteur d'onde $\vec{k}$ de l'onde sphérique.

2 - On admet qu'une telle onde vérifie localement la même relation de structure qu'une onde plane. En déduire l'expression du champ magnétique associé.

3 - Exprimer le vecteur de Poynting et sa moyenne temporelle.

4 - Exprimer la puissance moyenne $\mathcal{P}$ rayonnée à travers une sphère de rayon r. Justifier par un argument physique que cette puissance est indépendante de r. En déduire que $E_0(r) = A/r$ avec A une constante à déterminer.

Exercice 2 : Un exemple d'OPPH

1 | 3

- *OPPH ;*
- *Vecteur de Poynting.*

On étudie une onde électromagnétique dont le champ électrique est de la forme

$$\vec{E} = E_x\,\vec{e}_x + E_y\,\vec{e}_y \qquad \text{avec} \qquad E_x = E_0 \exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{K}{3}(2x+2y-z) - \omega t\right)\right] .$$

L'onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde est $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$.

1 - Calculer la fréquence de l'onde. Identifier le domaine du spectre électromagnétique auquel elle appartient.

2 - Exprimer le vecteur d'onde $\vec{k}$ en fonction de la constante K, puis calculer la valeur numérique de K.

3 - Établir l'équation cartésienne d'un plan d'onde.

4 - À partir de l'équation de Maxwell-Gauss, exprimer E_y en fonction de E_x.

5 - Exprimer le champ magnétique de cette onde en fonction de E_x et c.

6 - Exprimer la densité moyenne d'énergie électromagnétique associée à cette onde. Commenter.

7 - Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting de cette onde. Commenter.

Exercice 3 : Loi de Malus

2 | 1 |

- *Polarisation ;*
- *Vecteur de Poynting.*

Sur un banc optique d'axe (Oz), on place successivement une source de lumière monochromatique de longueur d'onde λ ; un premier polariseur (P) d'axe passant $\vec{u}$; un second polariseur (A) d'axe passant $\vec{v}$ appelé analyseur ; et un photodétecteur permettant de mesurer l'intensité de la lumière sortant de l'analyseur.

La lumière dans le dispositif est décrite comme une onde plane progressive harmonique. Les directions passantes $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du polariseur et de l'analyseur forment un angle θ. On note $\vec{u}_\perp$ (resp. $\vec{v}_\perp$) le vecteur unitaire tel que la base $\mathcal{B}_\mathrm{P} = (\vec{u}, \vec{u}_\perp, \vec{e}_z)$ soit orthonormée directe (resp. $\mathcal{B}_\mathrm{A} = (\vec{v}, \vec{v}_\perp, \vec{e}_z)$).

1 - Faire un schéma du montage.

2 - Donner l'expression dans la base $\mathcal{B}_\mathrm{P}$ du champ $\vec{E}_\mathrm{P}$ ayant traversé le polariseur en fonction de z, t et λ.

3 - Exprimer $\vec{E}_\mathrm{P}$ dans la base $\mathcal{B}_\mathrm{A}$. En déduire l'expression du champ $\vec{E}_\mathrm{PA}$ ayant traversé successivement le polariseur et l'analyseur puis celle du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}_\mathrm{PA}$.

L'intensité lumineuse mesurée par le photodétecteur est définie comme étant la valeur moyenne (spatiale et temporelle) du flux du vecteur de Poynting sur toute la surface S du photodétecteur,

$$I = \left\langle \frac{1}{S} \iint_S \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \right\rangle$$

où le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est normal au photodétecteur.

4 - Montrer que l'intensité peut s'écrire sous la forme $I = I_0 \cos^2\theta$: cette relation est appelée **loi de Malus**.

Exercice 4 : Mesure de la concentration en CO2 dans l'atmosphère 2 | 2 |

- *OPPH ;*
- *Vecteur de Poynting ;*
- *Bilan d'énergie électromagnétique.*

Le développement de modèles climatiques et l'actualisation de leurs prédictions nécessite des mesures précises de la fraction molaire en CO_2 présent dans l'atmosphère. Celle-ci est usuellement exprimée en parties par millions (ppm) : une fraction molaire de 413 ppm indique par exemple qu'un million de molécules d'air contient en moyenne 413 molécules de CO_2.

Pour ce faire, un échantillon d'air est prélevé, de préférence en relative altitude et loin de toute perturbation humaine, puis refroidi pour condenser toute la vapeur d'eau, avant d'être analysé. Le principe est celui de la spectrophotométrie : un faisceau laser de longueur d'onde 4,26 µm, à laquelle le spectre d'absorption du CO_2 présente un maximum, traverse un échantillon de longueur connue. Comparer les intensités lumineuses avant et après traversée de l'échantillon permet d'en déduire la concentration en CO_2, en nombre de molécules par m^3 d'air. Les capteurs de CO_2 popularisés comme indicateurs de la qualité de l'air lors de la crise du Covid-19, fonctionnent sur le même principe, mais avec des exigences de précision bien moindre.

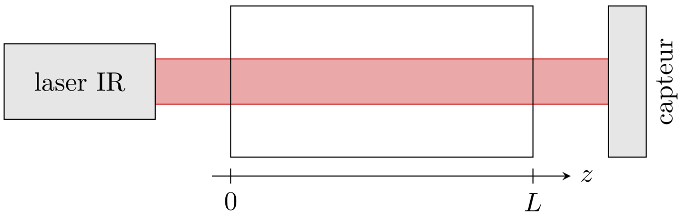


Figure 1 – **Schéma de principe du dispositif de mesure de la fraction molaire en CO_2 dans l'atmosphère.**

1 - On modélise le faisceau laser par un cylindre de section S au sein duquel se propage une onde plane progressive monochromatique de polarisation rectiligne selon $\vec{e}_x$. Écrire le champ électrique, le champ magnétique et le vecteur de Poynting de l'onde.

2 - Les capteurs utilisés sont sensibles à l'intensité du faisceau, définie comme une double moyenne spatiale et temporelle du vecteur de Poynting sur toute la section S du faisceau :

$$I = \left\langle \frac{1}{S} \iint_S \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \right\rangle .$$

Relier I à l'amplitude du champ électrique de l'onde.

3 - Chaque molécule de CO_2 se trouvant dans le faisceau absorbe en moyenne une puissance p proportionnelle à l'intensité : $p = \sigma I$, où σ est une constante tabulée dépendant uniquement de la longueur d'onde. En raisonnant sur une tranche infinitésimale du faisceau, montrer que l'intensité vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} + \sigma n I = 0\,,$$

où n est la densité volumique de CO_2, c'est-à-dire le nombre de molécules de CO_2 par unité de volume dans l'échantillon.

4 - On appelle absorbance de l'échantillon le rapport

$$A = \ln \frac{I(z=0)}{I(z=L)}\,.$$

Montrer que la connaissance de l'absorbance permet de remonter à n, nombre de molécules de CO_2 par unité de volume.

5 - En pratique, on procède à température et pression parfaitement contrôlées et par comparaison avec des échantillons étalons de concentration connues. Expliquer ces choix expérimentaux.

6 - La figure 2 représente l'évolution temporelle de la fraction molaire en CO_2 mesurée à l'observatoire situé au sommet du volcan de Mauna Loa, à Hawaï. Proposer une interprétation aux tendances observées.

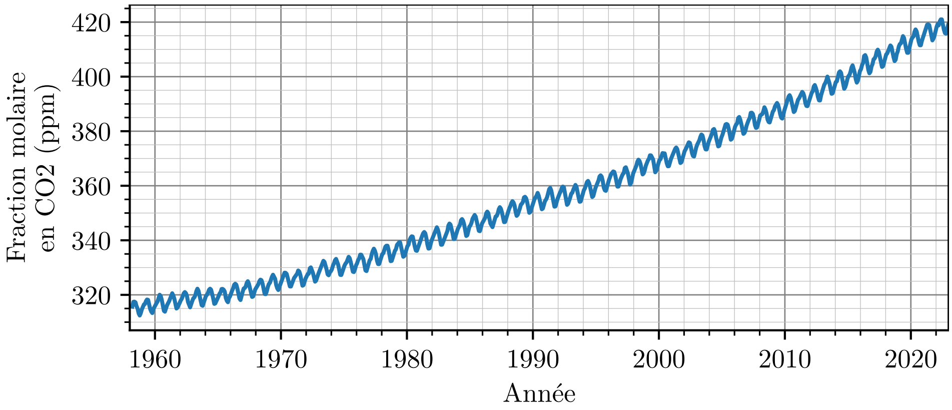


Figure 2 – Fraction molaire en CO_2 mesurée à l'observatoire de Mauna Loa. Les mesures représentées sont des moyennes mensuelles.

Exercice 5 : Champs d'un laser

3 | 1

- *OPPH ;*
- *Vecteur de Poynting ;*
- *Résolution de problème.*

> *Un problème ouvert demande de l'initiative dans le raisonnement mené. Pour aborder un tel exercice, il peut notamment être utile de faire un schéma modèle, d'identifier et nommer les grandeurs pertinentes, de proposer des hypothèses simplificatrices, de décomposer le problème en des sous-problèmes simples, etc. Le candidat peut également être amené à proposer des valeurs numériques raisonnables pour les grandeurs manquantes ... et à l'inverse toutes les valeurs données ne sont pas forcément utiles. Le tout est évidemment à adapter à la situation proposée !*

Déterminer les amplitudes des champs électrique et magnétique créés par la diode laser que nous utilisons en TP.

Document 1 : Extrait de fiche technique

ovio INSTRUMENTS

Diode laser rouge Classe II @635 nm version sur tige bas profil
Ref : 203324

Caractéristiques techniques :

- Puissance : 1 mW (classe 2)
- Extrémité : filetée M20
- Maintien : tige D 10mm - L 130mm
- Dimensions tube : diamètre 25mm / longueur 90mm
- Longueur d'onde : 635 nm
- Type : diode laser
- Diamètre faisceau à 5m : 535 mm
- Divergence : 0.9 mRad
- Faisceau en sortie : 1mm
- Température d'utilisation : 10 à 40°C
- Polarisation : linéaire
- Transformateur (fourni) : 6-9V DC

Bilans d'énergie électromagnétique, au delà des OEM

Exercice 6 : Bilan de puissance d'un conducteur

oral banque PT | 2 | 2

▷ *Théorème d'Ampère ;*
▷ *Bilan d'énergie électromagnétique.*

Considérons un conducteur cylindrique de rayon R, infini, d'axe Oz, soumis à un champ électrique $\vec{E}$ uniforme et stationnaire orienté suivant $\vec{u}_z$. On raisonne sur un tronçon de cylindre de longueur ℓ.

1 - Quel paramètre caractérise l'aspect conducteur d'un matériau ? Donner son unité et un ordre de grandeur.

2 - Calculer l'intensité traversant le cylindre. En déduire le champ magnétique créé par le cylindre.

3 - Déterminer la puissance dissipée par effet Joule.

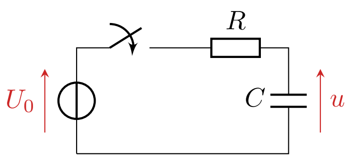
4 - Exprimer la puissance rayonnée à travers les parois du cylindre.

5 - En déduire le bilan de puissance et le commenter.

Exercice 7 : Modélisation électromagnétique de la charge d'un condensateur

2 | 2

▷ *Équations de Maxwell ;*
▷ *Bilan d'énergie électromagnétique.*



Le but de l'exercice est d'étudier le bilan énergétique du circuit ci-contre par une approche électromagnétique. Le condensateur est initialement déchargé, et l'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$.

1 - Déterminer l'évolution de $u(t)$ par une approche électrocinétique.

Le condensateur est modélisé par deux disques parallèles de rayons a, d'axe (Oz), séparés une épaisseur $e \ll a$, de sorte que l'on puisse considérer que le condensateur est un plan chargé infiniment grand. Le milieu entre les armatures est assimilé au vide. On suppose la charge suffisamment lente pour pouvoir généraliser les résultats obtenus en électrostatique : $C = \varepsilon_0 \pi a^2 / e$ et dans l'espace inter-armatures

$$\vec{E}(M,t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \vec{e}_z \,.$$

2 - Exprimer $\vec{E}$ en fonction de u dans l'espace inter-armatures.

3 - Quelles sont les sources de champ magnétique entre les armatures ? Justifier à partir d'une équation de Maxwell que les propriétés de symétrie de $\vec{\jmath}$ et de $\partial\vec{E}/\partial t$ ont les mêmes conséquences sur le champ magnétique. En déduire que $\vec{B} = B_\theta \vec{e}_\theta$.

4 - En utilisant les équations de Maxwell, déterminer $\vec{B}$ en fonction de u dans l'espace inter-armatures.

5 - Exprimer le vecteur de Poynting à l'intérieur du condensateur. En déduire l'expression de la puissance rentrant dans le volume entre les armatures. D'où vient cette puissance ?

6 - Réécrire la puissance entrante comme la dérivée temporelle d'une fonction de C et u. Commenter le résultat obtenu.

7 - En déduire l'expression de l'énergie électromagnétique qui est entrée dans le condensateur pendant la charge en fonction de C et U_0.

Donnée :

▷ $\operatorname{div} \vec{B} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial B_z}{\partial z}$

▷ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{B} = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial B_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial B_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\dfrac{\partial B_r}{\partial z} - \dfrac{\partial B_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial B_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$

Exercice 8 : Décharge d'un conducteur dans l'air 3 | 2

▷ *Équations de Maxwell ;*
▷ *Bilan d'énergie électromagnétique.*

Une boule porte une charge uniformément répartie sur sa surface. Cette boule se trouve dans l'air, gaz légèrement conducteur, au travers duquel la boule se décharge progressivement.

On rappelle l'équation de Poynting (bilan local d'énergie électromagnétique) :

$$\mathrm{div}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2+\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\right)=-\vec{j}\cdot\vec{E}$$

1 - Analyser les symétries du problème. Conclure sur les champs.

2 - Interpréter physiquement chaque terme de l'équation de Poynting. En déduire le champ électrique à l'extérieur de la boule à tout instant.

3 - Déterminer la charge portée par la boule à tout instant.

4 - Déterminer l'énergie dissipée dans le milieu au cours du processus. Interpréter le résultat.