

Réflexion et absorption des ondes électromagnétiques

Effet de peau

Exercice 1 : Blocage d'appel

oral banque PT | 💡 1 | ✂ 2 | Ⓜ

 ▷ Effet de peau.

1 Les téléphones mobiles émettent à des fréquences f de l'ordre de **2 GHz**, ce qui correspond à des longueurs d'onde $\lambda = c/f$ de l'ordre de **15 cm**.

2 On se place dans l'ARQS : le conducteur est neutre en volume et le courant de déplacement est négligeable. On exprime $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E})$ de deux façons différentes : d'une part

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) \underset{\text{MF}}{=} -\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) \underset{\text{MA}}{=} -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \underset{\text{Ohm}}{=} -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

et d'autre part

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} \underset{\text{MG}}{=} -\Delta \vec{E},$$

et ainsi en identifiant on obtient

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}.$$

L'équation de propagation dans le vide s'écrit

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

On constate que l'ordre de la dérivée temporelle n'est pas le même : au lieu d'une équation de d'Alembert, on obtient dans le conducteur une **équation de diffusion**. Cela traduit que l'onde électromagnétique **ne se propage pas** dans le métal, mais lui cède son énergie par effet Joule. L'onde **est absorbée par le métal**.

3 Cherchons une solution de la forme indiquée par l'énoncé. En injectant,

$$-\underline{k}^2 \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)} - i\gamma \mu_0 \omega \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)} = \vec{0}$$

et en simplifiant

$$-\underline{k}^2 - i\mu_0 \gamma \omega = 0 \quad \text{soit} \quad \underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma \omega.$$

En prenant la « racine carrée », $-i = e^{-i\pi/2} = (e^{-i\pi/4})^2 = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2$, il vient

$$\underline{k} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega}.$$

Dimensionnellement, on identifie une longueur caractéristique

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}.$$

Identifions la solution physique parmi les deux solutions mathématiques. En injectant l'expression de \underline{k} dans celle de l'onde cherchée, on trouve

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\pm z/\delta} e^{i(\omega t \pm z/\delta)}.$$

Comme on cherche une onde se propageant dans le sens des z croissants, c'est le signe \ominus qu'il faut garder :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)}.$$

Ces solutions **ne sont pas** des OPPH car leur amplitude diminue au cours de la propagation : on parle plutôt de pseudo-OPPH.

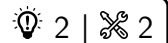
Les deux signes \pm apparaissant dans les exponentielles réelle et complexe ne sont pas indépendants ! C'est d'ailleurs physiquement rassurant : si les signes étaient choisis opposés, cela pourrait impliquer qu'une onde se propageant dans le sens des z croissants (signe \ominus dans l'exponentielle complexe) est amplifiée (!!) au cours de sa propagation dans le métal (signe \oplus dans l'exponentielle réelle).

4 La longueur caractéristique sur laquelle le champ électrique s'atténue est bien sûr δ . Pour un métal, $\gamma \sim 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ (p.ex. $3,7 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ pour Al ou $6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ pour Cu), d'où

$$\delta \sim 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

Ainsi, au delà de quelques microns, l'onde électromagnétique est **complètement absorbée par le métal**. Cela justifie l'hypothèse de plaque infinie : que sa longueur soit quelques millimètres, centimètres ou kilomètres il n'y a aucune onde transmise au travers de la plaque. Le second téléphone ne reçoit donc plus l'appel.

Exercice 2 : Communication avec un satellite



- ▷ Modélisation microscopique ;
- ▷ Relation de dispersion complexe.

1 L'onde incidente se propage dans le **sens des z croissants**. Sa polarisation est **rectiligne selon \vec{e}_x** . D'après la relation de structure,

$$\vec{B} = \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{E}}{c} \quad \text{donc} \quad \vec{B} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y.$$

2 La force de Lorentz s'écrit

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

En ordre de grandeur,

$$\|q\vec{E}\| = q \|E_0\| \quad \text{et} \quad \|q\vec{v} \wedge \vec{B}\| = qv \frac{E_0}{c}$$

donc

$$\frac{\|q\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|q\vec{E}\|} = \frac{v}{c}.$$

La force magnétique est négligeable si $v \ll c$, c'est-à-dire **si le mouvement de la charge est non relativiste**.

3 Le mouvement est étudié dans un référentiel galiléen. S'agissant de particules microscopiques, seule la force de Lorentz électrique est à prendre en compte. Ainsi, le PFD appliqué à chaque type de porteur donne respectivement

$$\begin{cases} m_c \frac{d\vec{v}_c}{dt} = e\vec{E} \\ m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E} \end{cases}$$

Le plasma compte deux types de porteurs de charges, implicitement supposés se déplaçant tous à la même vitesse (vitesse d'ensemble). La densité de courant s'écrit donc

$$\vec{j} = ne\vec{v}_c + n(-e)\vec{v}_e = ne(\vec{v}_c - \vec{v}_e).$$

On en déduit

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = ne \left(\frac{d\vec{v}_c}{dt} - \frac{d\vec{v}_e}{dt} \right) = ne \left(\frac{e}{m_c} \vec{E} + \frac{e}{m_e} \vec{E} \right)$$

ce qui donne bien

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = ne^2 \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_c} \right) \vec{E}.$$

Le passage des dérivées droites du PFD à la dérivée partielle du résultat manque ici de rigueur ... mais ladite rigueur est difficilement accessible avec le programme de PT. Le « problème » (ou la « solution », selon les points de vue) vient du fait que les vitesses \vec{v}_e et \vec{v}_c sont des grandeurs lagrangiennes, attachées à un électron ou un cation particulier, alors que la densité de courant \vec{j} est une grandeur eulérienne, c'est-à-dire un champ dépendant de l'espace et du temps.

4 Un proton pèse environ $1,6 \cdot 10^{-27}$ kg, autant qu'un neutron, si bien qu'en supposant que le cation compte dans son noyau une dizaine de protons et de neutron on trouve une masse $m_c \sim 10^{-26}$ kg. Un électron ne pèse que $9 \cdot 10^{-31}$ kg, soit près de 10000 fois moins. Ainsi, on peut supposer $1/m_c \ll 1/m_e$ et écrire l'expression précédente sous la forme

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m_e} \vec{E}.$$

5 Comme les cations et les électrons sont de même densité volumique, le plasma est neutre : $\rho = ne - ne = 0$. En utilisant la formule du double rotationnel,

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MG}}}{=} 0 - \Delta \vec{E}$$

Par ailleurs, en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MF}}}{=} -\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Schwartz}}}{=} -\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MA}}}{=} -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Utiliser la question précédente conduit à

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{\mu_0 ne^2}{m_e} \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

En identifiant les deux expressions,

$$\Delta \vec{E} = \frac{\mu_0 ne^2}{m_e} \vec{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{soit} \quad \Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\mu_0 c^2 ne^2}{m_e} \vec{E}$$

ce qui s'écrit encore

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{E} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \\ \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2 \mu_0 c^2}{m_e}} = \sqrt{\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m_e}} \end{cases}$$

6 Pour une onde de la forme $\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x$,

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -k^2 \vec{E} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}.$$

En injectant dans l'équation de propagation,

$$-k^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{E}$$

soit encore

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}.$$

Comme le signe de $\omega^2 - \omega_p^2$ est inconnu, il est impossible d'aller plus loin dans le calcul, et en particulier impossible de passer à une racine. Ainsi, la relation de dispersion concerne k^2 .

7 Pour $\omega < \omega_p$, la relation de dispersion donne $k^2 < 0$ donc k imaginaire pur,

$$k = \pm i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = \pm \frac{i}{\delta}.$$

L'onde s'écrit alors

$$\vec{E} = E_0 e^{i\omega t} e^{\pm z/\delta} \vec{e}_x.$$

L'onde ne pouvant s'amplifier spontanément (ni diverger), seul le signe $-$ est physiquement pertinent. L'onde est amortie exponentiellement sur une distance caractéristique δ , **elle ne peut donc pas traverser l'ionosphère** : la communication avec le satellite est impossible avec des ondes de pulsation $\omega < \omega_p$. Au contraire, si $\omega > \omega_p$ alors k est réel,

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}},$$

et l'onde conserve sa structure d'OPPH dans l'ionosphère.

8 La fréquence plasma de l'ionosphère est donc de l'ordre de $1,6 \cdot 10^6$ Hz, soit 1,6 MHz. Les fréquences utilisées sont très supérieures, ce qui garantit que les ondes traversent l'ionosphère sans dommage.

Exercice 3 : Approche énergétique de l'effet de peau

oral banque PT | 💡 3 | ✂️ 2



- ▷ Effet de peau ;
- ▷ Vecteur de Poynting ;
- ▷ Bilan de puissance.

1 Il s'agit **bien d'une onde plane**, car \vec{E} prend la même valeur en tout point des plans $z = \text{cte}$, mais elle n'est **pas progressive** à cause de l'exponentielle décroissante. Le paramètre α représente à la fois le **vecteur d'onde** et **l'inverse de la longueur d'amortissement** (longueur de peau) de l'onde. L'onde est **polarisée rectilignement** selon \vec{u}_x .

2 ⚠️ ⚠️ ⚠️ **Attention !** Pour pouvoir identifier $\vec{\text{rot}} \leftrightarrow -j\vec{k} \wedge$, il faut écrire l'onde avec un vecteur d'onde complexe, soit

$$\vec{E} = E_0 \exp[j(\omega t - (1-j)\alpha z)] \vec{u}_x,$$

d'où on identifie $\vec{k} = (1-j)\alpha \vec{u}_z$. D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$-j\vec{k} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad \text{soit} \quad (1-j)\alpha \vec{u}_z \wedge E_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \alpha z)} \vec{u}_x = \omega \vec{B}$$

d'où

$$\vec{B} = \frac{(1-j)\alpha E_0}{\omega} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \alpha z)} \vec{u}_y.$$

3 Le vecteur de Poynting est défini par

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

Sa moyenne temporelle vaut

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right).$$

Or

$$\vec{E} \wedge \vec{B}^* = \frac{(1+j)\alpha E_0^2}{\mu_0 \omega} e^{-2\alpha z} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y$$

d'où

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\alpha E_0^2}{2\mu_0 \omega} e^{-2\alpha z} \vec{u}_z.$$

⚠️ ⚠️ ⚠️ **Attention !** Les champs complexes ne donnent accès qu'à la moyenne temporelle. Trouver le vecteur de Poynting instantané exige de revenir aux champs réels.

(et bien sûr on peut aussi passer par les champs réels pour trouver $\langle \vec{\Pi} \rangle$)

4 Puissance moyenne entrant par la face située en z :

$$\langle \mathcal{P}_e \rangle = \iint \langle \vec{\Pi}(z) \rangle \cdot dS \vec{u}_z = \frac{\alpha E_0^2}{2\mu_0 \omega} S e^{-2\alpha z}.$$

Puissance moyenne sortant par la face située en $z + dz$:

$$\langle \mathcal{P}_s \rangle = \iint \langle \vec{\Pi}(z + dz) \rangle \cdot dS \vec{u}_z = \frac{\alpha E_0^2}{2\mu_0\omega} S e^{-2\alpha(z+dz)}.$$

La puissance entrant dans le conducteur mais n'en sortant pas est cédée au conducteur. Ainsi,

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \mathcal{P}_e - \mathcal{P}_s = \frac{\alpha E_0^2}{2\mu_0\omega} S \left(e^{-2\alpha z} - e^{-2\alpha(z+dz)} \right).$$

En utilisant un développement limité

$$e^{-2\alpha z} - e^{-2\alpha(z+dz)} \simeq 2\alpha e^{-2\alpha z} dz,$$

on obtient

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{\alpha E_0^2}{2\mu_0\omega} S \times 2\alpha e^{-2\alpha z} dz$$

et finalement

$$\boxed{\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{\alpha^2 E_0^2}{\mu_0\omega} S e^{-2\alpha z} dz.}$$

5 La puissance volumique dissipée par effet Joule vaut $\mathcal{P}_{J,\text{vol}} = \gamma E^2$ donc en moyenne et sur la tranche de volume $S dz$,

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\gamma \vec{E} \cdot \vec{E}^* \right) S dz$$

soit

$$\boxed{\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{\gamma E_0^2}{2} e^{-2\alpha z} S dz.}$$

6 Par identification,

$$\frac{\alpha^2 E_0^2}{\mu_0\omega} S e^{-2\alpha z} dz = \frac{\gamma E_0^2}{2} e^{-2\alpha z} S dz,$$

soit en simplifiant

$$\frac{\alpha^2}{\mu_0\omega} = \frac{\gamma}{2} \quad \text{d'où} \quad \alpha = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}.$$

La longueur de peau $\delta = 1/\alpha$ s'écrit finalement

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}.}$$

Réflexion des ondes

Exercice 4 : Onde électromagnétique confinée

oral Mines-Ponts PSI | 💡 1 | ✂ 2 | Ⓜ



- ▷ Réflexion sur un conducteur parfait ;
- ▷ Cavité électromagnétique.

1 D'après l'équation de d'Alembert,

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad -k^2 \vec{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \omega^2 = k^2 c^2$$

et avec ω et k positifs

$$\boxed{\omega = kc.}$$

2 Appelons ① le vide ($z < 0$) et ② le conducteur ($z > 0$), soit $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{e}_z$. En ne tenant compte que de l'onde incidente, d'après la relation de passage en $z = 0$,

$$-E_0 e^{i\omega t} \vec{e}_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z.$$

🔴🔴🔴 **Attention !** La relation de passage s'exprime à l'interface, donc uniquement en $z = 0$: il ne faut pas garder de terme en kz lorsque vous l'écrivez.

Comme $E_0 \neq 0$, il y a **contradiction** : il existe une onde réfléchie de la forme

$$\vec{E}_r = E'_0 e^{j(\omega t + kz)} \vec{e}_x.$$

J'ai traité le cas général en cours, mais dans un exercice qui ne précise pas la forme de l'onde réfléchie, je pense que vous pouvez sans peine admettre qu'il y a conservation de la polarisation à la réflexion, ce qui allège les calculs.

Comme l'onde totale est $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$, la relation de passage donne cette fois

$$-(E_0 e^{j\omega t} + E'_0 e^{j\omega t}) = 0 \quad \text{soit} \quad E'_0 = -E_0.$$

Ainsi, l'onde réfléchie est en opposition de phase avec l'onde incidente, et l'onde totale s'écrit

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0 e^{j\omega t} (e^{-jkz} - e^{jkz}) \vec{e}_x$$

soit

$$\vec{E} = -2jE_0 \sin(kz) e^{j\omega t} \vec{e}_x = 2E_0 \sin(kz) e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} \vec{e}_x.$$

Il s'agit d'une **onde stationnaire** : les variables de temps et d'espace sont découplées.

3 D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot } \vec{E} = +\frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{e}_y$$

compte tenu des termes nuls. Ainsi,

$$-j\omega \vec{B} = -2jE_0 k \cos(kz) e^{j\omega t} \quad \text{d'où} \quad \vec{B} = \frac{2E_0}{c} \cos(kz) e^{j\omega t} \vec{e}_y,$$

en simplifiant $k/\omega = 1/c$.

Méthode alternative : L'onde incidente et l'onde réfléchie sont deux OPPH, qui vérifient donc chacune la relation de structure. Ainsi,

$$\vec{B}_i = \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y$$

$$\vec{B}_r = -\vec{e}_z \wedge \frac{\vec{E}_r}{c} = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t + kz)} \vec{e}_y$$

et pour l'onde résultante, par superposition,

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} e^{j\omega t} (e^{-jkz} + e^{jkz}) \vec{e}_y \quad \text{soit} \quad \vec{B} = \frac{2E_0}{c} \cos(kz) e^{j\omega t} \vec{e}_y.$$

🔴🔴🔴 **Attention !** La relation de structure ne s'applique qu'à des OPPH. L'appliquer à une onde stationnaire est faux : le vecteur d'onde n'est même pas défini ...

4 D'après la relation de passage sur le champ magnétique appliquée en $z = 0$,

$$\mu_0 \vec{j}_s = \vec{e}_z \wedge \left(\vec{0} - \frac{2E_0}{c} e^{j\omega t} \vec{e}_y \right) \quad \text{soit} \quad \mu_0 \vec{j}_s = \frac{2E_0}{c} e^{j\omega t} \vec{e}_x.$$

Ainsi, il existe un courant surfacique à la surface du conducteur parfait valant

$$\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} e^{j\omega t} \vec{e}_x.$$

Interprétons qualitativement cette expression. Le champ électrique incident met en mouvement les électrons en surface du conducteur, d'où la direction \vec{e}_x du courant de surface. En retour, ce courant de surface créé également un champ électrique : le champ réfléchi. Ce champ existe non seulement dans le vide, mais aussi dans le conducteur, à ceci près

qu'il se déplace selon $+\vec{e}_z$. Comme il est de même amplitude mais en opposition de phase avec le champ incident, cela permet d'interpréter la nullité du champ total dans le conducteur.

5 Comme précédemment, la relation de passage en $z = -L$ impose que le champ total \vec{E} soit nul en $z = -L$ à tout instant, d'où on déduit

$$\sin(kL) = 0 \quad \text{d'où} \quad kL = n\pi, \quad n \text{ entier,} \quad \text{soit} \quad k = \frac{n\pi}{L}$$

Ces ondes sont les modes propres de la cavité formée des deux conducteurs. La relation précédente peut s'écrire en termes de longueurs d'onde ou de fréquence,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n} \quad \text{et} \quad f = \frac{kc}{2\pi} = \frac{nc}{2L}.$$

| On retrouve une claire analogie avec les modes propres d'une corde de Melde.

6 La puissance surfacique est reliée au vecteur de Poynting, qu'il faut calculer à partir des champs réels

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(kz) \sin(\omega t) \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{2E_0}{c} \cos(kz) \cos(\omega t) \vec{e}_y$$

d'où

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \cos(kz) \sin(kz) \cos(\omega t) \sin(\omega t) \vec{e}_z$$

Or

$$\cos(\omega t) \sin(\omega t) = \frac{\sin(2\omega t)}{2} \quad \text{et} \quad \langle \sin(2\omega t) \rangle = 0$$

ce qui donne

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}.$$

En moyenne, l'énergie ne se propage pas dans la cavité, ce qui est cohérent avec le fait que les ondes y soient stationnaires.

Méthode alternative : En moyenne,

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2\mu_0} \times 2E_0 \sin(kz) \times \frac{2E_0}{c} \cos(kz) \times \operatorname{Re} \left(e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} e^{-j\omega t} \right) (-\vec{e}_y)$$

ce qui donne

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$$

car $e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} e^{-j\omega t} = e^{-j\pi/2} = -j$, c'est-à-dire un imaginaire pur.

Exercice 5 : Voile solaire

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2



- ▷ Réflexion sur un conducteur parfait ;
- ▷ Force de Lorentz.

1 Supposons que l'OPPM incidente se propage dans le sens des z croissants et qu'elle est polarisée selon (Ox) . Elle s'écrit alors

$$\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x.$$

On cherche l'onde réfléchie sous la forme d'une OPPM se propageant en sens inverse et de polarisation a priori quelconque,

$$\vec{E}_r = \underline{E}_r e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x + \underline{E}'_r e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y.$$

Supposons la voile située en $z > 0$ et le vide en $z < 0$. La relation de passage en $z = 0$ donne

$$\vec{0} - \left[\vec{E}_i(z=0^-, t) + \vec{E}_r(z=0^-, t) \right] = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z.$$

En projection sur \vec{e}_y on obtient de façon immédiate

$$\underline{E}'_r = 0$$

et en projection sur \vec{e}_x on trouve

$$E_0 + \underline{E}_r = 0 \quad \text{d'où} \quad \underline{E}_r = -E_0.$$

Ainsi, l'onde réfléchie s'écrit

$$\boxed{\vec{E}_r = -E_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x.}$$

2 D'après la relation de structure, les champs magnétiques des ondes incidente et réfléchie s'écrivent respectivement

$$\begin{cases} \vec{B}_i = \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y \\ \vec{B}_r = (-\vec{e}_z) \wedge \frac{\vec{E}_r}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y \end{cases}$$

Le champ magnétique total en $z = 0^-$ vaut donc

$$\vec{B}(z=0^-, t) = \vec{B}_i(z=0^-, t) + \vec{B}_r(z=0^-, t) = \frac{2E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{e}_y.$$

La relation de passage en $z = 0$ donne alors

$$\vec{j}_s = \vec{e}_z \wedge \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{2E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{e}_y \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} e^{i\omega t} \vec{e}_x.}$$

3 La densité volumique de force de Lorentz en présence d'une densité volumique de courant \vec{j} s'écrit

$$\vec{f}_{\text{vol}} = \vec{j} \wedge \vec{B}.$$

Par analogie, la densité surfacique de force de Lorentz peut ici s'écrire

$$\boxed{\vec{f}_{\text{surf}} = \vec{j}_s(t) \wedge \vec{B}(z=0, t).}$$

Sa valeur moyenne vaut

$$\langle \vec{f}_{\text{surf}} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\vec{j}_s(t) \wedge \vec{B}^*(z=0, t) \right)$$

Rappelons que \vec{B}^* est le conjugué de \vec{B} .

Attention, l'expression de la force étant non linéaire il n'est pas possible de calculer sa valeur instantanée à partir des grandeurs complexes mais seulement sa valeur moyenne ... sans oublier ni la partie réelle ni le facteur 1/2. Pour obtenir la valeur instantanée, il n'y a pas d'autre possibilité que de revenir aux grandeurs réelles.

À partir des expressions précédentes,

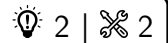
$$\vec{j}_s(t) \wedge \vec{B}^*(z=0, t) = \frac{2E_0}{\mu_0 c} e^{i\omega t} \times \frac{2E_0}{c} e^{-i\omega t} (\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y) = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c^2} \vec{e}_z.$$

Comme $\mu_0 c^2 = 1/\varepsilon_0$, on en déduit finalement

$$\boxed{\langle \vec{f}_{\text{surf}} \rangle = 2\varepsilon_0 E_0^2 \vec{e}_z.}$$

Elle est dirigée selon $+\vec{e}_z$, c'est-à-dire dans le sens de propagation du rayonnement solaire, comme on pouvait s'y attendre.

Exercice 6 : Réflexion à l'interface entre deux milieux transparents



- ▷ Réflexion d'une onde électromagnétique ;
- ▷ Vecteur de Poynting.

1 La relation de dispersion donne pour le milieu $i = 1, 2$

$$k_i = n_i \frac{\omega}{c}$$

2 Ces expressions sont cohérents du point de vue la **direction de propagation** (z croissants pour l'onde incidente et l'onde transmise, z décroissants pour l'onde réfléchie), ainsi que pour l'utilisation de k_1 et k_2 . Les hypothèses implicites sous-entendus par ces écritures sont la **conservation de la pulsation** (toujours vrai) et de la **conservation de la polarisation** (cas particulier de l'incidence normale, faux en incidence quelconque).

3 Ici,

$$\underline{\vec{E}}_2 = \underline{\vec{E}}_t(z=0, t) = \underline{t} E_0 e^{i\omega t} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \underline{\vec{E}}_1 = \underline{\vec{E}}_i(z=0, t) + \underline{\vec{E}}_r(z=0, t) = E_0 e^{i\omega t} \vec{e}_x + \underline{r} E_0 e^{i\omega t} \vec{e}_x$$

d'où on déduit de la relation de passage sur le champ électrique

$$\underline{t} E_0 e^{i\omega t} = E_0 e^{i\omega t} \vec{e}_x + \underline{r} E_0 e^{i\omega t} \vec{e}_x \quad \text{soit} \quad \underline{t} = 1 + \underline{r}. \quad (1)$$

Avec la relation de structure, on calcule

$$\begin{aligned} \underline{\vec{B}}_1 &= \vec{e}_z \wedge \frac{\underline{\vec{E}}_1}{c/n_1} = \frac{n_1}{c} E_0 e^{i(\omega t - k_1 z)} \vec{e}_y \\ \underline{\vec{B}}_t &= \vec{e}_z \wedge \frac{\underline{\vec{E}}_t}{c/n_2} = \frac{n_2}{c} \underline{t} E_0 e^{i(\omega t - k_2 z)} \vec{e}_y \\ \underline{\vec{B}}_r &= -\vec{e}_z \wedge \frac{\underline{\vec{E}}_r}{c/n_1} = -\frac{n_1}{c} \underline{r} E_0 e^{i(\omega t + k_2 z)} \vec{e}_y \end{aligned}$$

On a donc

$$\underline{\vec{B}}_2 = \underline{\vec{B}}_t(z=0, t) = \frac{n_2}{c} \underline{t} E_0 e^{i\omega t} \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}_1 = \underline{\vec{B}}_i(z=0, t) + \underline{\vec{B}}_r(z=0, t) = \frac{n_1}{c} E_0 e^{i\omega t} \vec{e}_y - \frac{n_1}{c} \underline{r} E_0 e^{i\omega t} \vec{e}_y$$

d'où on déduit de la relation de passage sur le champ magnétique

$$\frac{n_2}{c} \underline{t} E_0 e^{i\omega t} \vec{e}_y = \frac{n_1}{c} E_0 e^{i\omega t} \vec{e}_y - \frac{n_1}{c} \underline{r} E_0 e^{i\omega t} \vec{e}_y \quad \text{soit} \quad \underline{n_2 t} = \underline{n_1(1 - r)}. \quad (2)$$

4 En injectant la relation (1) dans la relation (2), on obtient

$$\underline{n_2(1 + r)} = \underline{n_1(1 - r)} \quad \text{soit} \quad (\underline{n_1 + n_2}) \underline{r} = \underline{n_1 - n_2} \quad \text{d'où} \quad \underline{r} = \frac{\underline{n_1 - n_2}}{\underline{n_1 + n_2}}.$$

En réutilisant la relation (1), il vient

$$\underline{t} = 1 + \frac{\underline{n_1 - n_2}}{\underline{n_1 + n_2}} \quad \text{soit} \quad \underline{t} = \frac{2\underline{n_1}}{\underline{n_1 + n_2}}.$$

5 Raisonnons par exemple sur l'onde transmise.

$$\begin{aligned} \langle \underline{\vec{\Pi}}_t \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re} \left(\underline{\vec{E}}_t \wedge \frac{\underline{\vec{B}}_t^*}{\mu_0} \right) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \times \underline{t} E_0 e^{i(\omega t - k_2 z)} \times \frac{n_2}{c} \underline{t}^* E_0 e^{-i(\omega t - k_2 z)} (\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y) \\ \langle \underline{\vec{\Pi}}_t \rangle &= \underline{n_2} |\underline{t}|^2 \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z \end{aligned}$$

et de même

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = n_1 \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \langle \vec{\Pi}_r \rangle = -n_1 |r|^2 \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z$$

6 Le coefficient de réflexion en énergie peut être défini par la relation

$$\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\mathcal{R} \langle \vec{\Pi}_i \rangle,$$

le signe \ominus permettant de traduire la réflexion de l'énergie, qui se propage en sens inverse. Par identification, on a

$$\mathcal{R} = |r|^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2.$$

De même, le coefficient de transmission en énergie est défini par

$$\langle \vec{\Pi}_t \rangle = \mathcal{T} \langle \vec{\Pi}_i \rangle \quad \text{d'où} \quad \mathcal{T} = \frac{n_2}{n_1} |t|^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

La somme des deux coefficients vaut



$$\mathcal{R} + \mathcal{T} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 + \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = \frac{n_1^2 + n_2^2 - 2n_1 n_2 + 4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = \frac{n_1^2 + n_2^2 + 2n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

ce qui donne finalement

$$\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1.$$

Physiquement, cette relation traduit la conservation de l'énergie : toute l'énergie incidente est ou bien réfléchie, ou bien transmise.

Exercice 7 : Guide d'ondes

inspiré oral banque PT |  2 |  2



- ▷ Exploitation des conditions aux limites ;
- ▷ Résolution par séparation des variables ;
- ▷ Vecteur de Poynting.

1 L'onde doit vérifier l'équation de d'Alembert et respecter les conditions aux limites en $x = 0$ et a , données par la nullité du champ à l'interface avec le conducteur, ce qui impose

$$f(x=0) = f(x=a) = 0.$$

L'équation de d'Alembert s'écrit

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

donc en y insérant la forme d'onde cherchée,

$$f''(x) e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y - k^2 f(x) e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y = \vec{0}$$

ce qui se simplifie en

$$f''(x) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) f(x) = 0.$$

La nature des solutions de cette équation différentielle dépend du signe du coefficient $\omega^2/c^2 - k^2$, qui doit être forcément positif : s'il était négatif (resp. nul), la solution serait une somme d'exponentielles (resp. une fonction affine), qui ne peut pas s'annuler deux fois. On peut alors poser, par analogie avec l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique,

$$K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$$

ce qui permet d'écrire

$$f(x) = A \sin(Kx) + B \cos(Kx).$$

La condition limite en $x = 0$ donne

$$f(x=0) = B = 0$$

\uparrow expr \uparrow CL

et la condition limite en $x = a$ impose

$$f(x=a) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} A \sin(Ka) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} 0 \quad \text{d'où} \quad Ka = n\pi \quad \text{soit} \quad K = \frac{n\pi}{a},$$

avec $n \geq 1$ un entier. En changeant la notation $E_0 = A$, on en déduit finalement que f peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

La relation de dispersion dans le guide dépend donc de l'entier n et s'écrit

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2.$$

2 La relation précédente peut se réécrire sous la forme

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2.$$

Pour qu'il y ait propagation, il faut que k soit réel donc k^2 positif, ce qui impose d'avoir

$$\frac{\omega^2}{c^2} > \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad \text{soit} \quad \omega > \frac{n\pi c}{a}.$$

La plus petite valeur de pulsation pour laquelle l'onde peut se propager dans le guide est celle pour $n = 1$, soit

$$\omega > \omega_c = \frac{\pi c}{a}.$$

3 Le guide est monomode pour les pulsations pour lesquelles seul le mode $n = 1$ peut se propager, alors que le mode $n = 2$ ne peut pas donner lieu à de la propagation, c'est-à-dire

$$\frac{\pi c}{a} < \omega < \frac{2\pi c}{a}.$$

Il est multimode pour toutes les pulsations supérieures à $2\pi c/a$, pour lesquelles (au moins) les modes 1 et 2 sont propagatifs.

4 Le calcul du vecteur de Poynting instantané (et non pas moyenné) impose de revenir aux champs réels,

$$\vec{E} = \text{Re } \underline{\vec{E}} = E_0 \sin \frac{n\pi}{a}x \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$$

et

$$\vec{B} = \text{Re } \underline{\vec{B}} = -\frac{k}{\omega} E_0 \sin \frac{n\pi x}{a} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x - \frac{n\pi}{a\omega} E_0 \cos \frac{n\pi x}{a} \sin(\omega t - kz) \vec{u}_z.$$

On en déduit

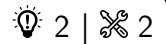
$$\vec{\Pi} = +\frac{k}{\mu_0\omega} E_0^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{a} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z - \frac{n\pi}{\mu_0 a \omega} E_0^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \sin(\omega t - kz) \vec{u}_x$$

$$\vec{\Pi} = +\frac{k}{\mu_0\omega} E_0^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{a} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z - \frac{n\pi}{4\mu_0 a \omega} E_0^2 \sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) \sin(2\omega t - 2kz) \vec{u}_x$$

Le premier terme, dirigé par \vec{u}_z , est de moyenne non nulle : il traduit physiquement le fait que l'onde transporte de l'énergie dans sa direction de propagation, ce qui est bien le but du guide d'onde. On constate par ailleurs que ce transport d'énergie est inhomogène au sein du guide, et en particulier nul sur les bords ($x = 0$ et a). Le second terme, porté par \vec{u}_x , est de moyenne nulle. Il traduit qualitativement des oscillations d'énergie d'un bord à l'autre du guide d'onde.

Analogies entre phénomènes ondulatoires

Exercice 8 : Trompette



- ▷ Analogies entre phénomènes ondulatoires ;
▷ Ondes stationnaires.

- 1 L'onde se propage dans le sens des x croissants, donc

$$P_i(x, t) = P_0 \cos(\omega t - kx) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

- 2 L'onde se propage cette fois dans le sens des x décroissants, d'où

$$P_r(x, t) = P_0 \cos(\omega t + kx + \phi).$$

- 3 D'après le principe de superposition, $P_{\text{tot}} = P_i + P_r$, et ainsi

$$\begin{aligned} P_{\text{tot}}(x, t) &= P_0 \cos(\omega t - kx) + P_0 \cos(\omega t + kx + \phi) \\ &= 2P_0 \cos\left(\frac{2\omega t + 0 + \phi}{2}\right) \cos\left(\frac{0 + 2kx + \phi}{2}\right) \\ &= 2P_0 \cos\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right) \cos\left(kx + \frac{\phi}{2}\right) \end{aligned}$$

ce qui s'écrit bien sous la forme voulue avec

$$A = 2P_0 \quad \text{et} \quad \psi = \varphi = \frac{\phi}{2}.$$

Une telle onde est une **onde stationnaire**.

On utilise ici la formule d'addition des cosinus (à connaître!) $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ avec p l'argument du cosinus de l'onde réfléchi et q celui de l'onde incidente.

Si jamais vous preniez p et q dans l'autre sens ce n'est pas un problème, mais rajoute juste une étape où il faut utiliser la parité $\cos(-x) = \cos x$.

- 4 Représentons figure 1 l'onde de surpression dans le tuyau, en respectant les conditions aux limites. Ce schéma permet de retrouver que deux nœuds consécutifs sont distants de $\lambda/2$ et qu'un nœud et un ventre qui se suivent sont séparés de $\lambda/4$. On voit alors apparaître que les conditions aux limites imposent

$$L = \frac{\lambda_n}{4} + n \frac{\lambda_n}{2}.$$

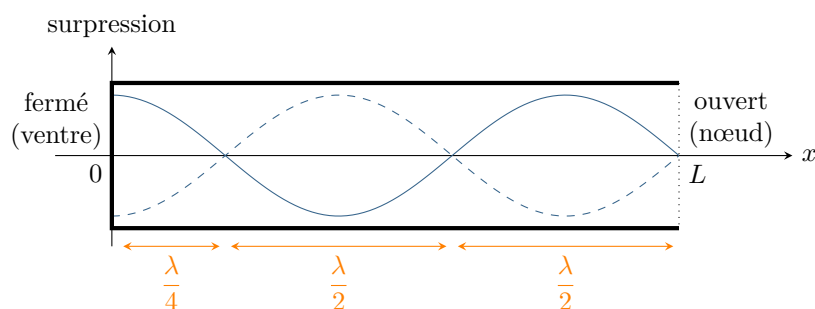


Figure 1 – Fuseaux d'onde stationnaire dans la trompette.

Pour $n = 0$, on trouve $L = \lambda_0/4$, et en utilisant la relation de dispersion sous la forme $\lambda_0 = c/f_0$ on en déduit

$$L = \frac{c}{4f_0} \quad \text{soit} \quad f_0 = \frac{c}{4L} = 61 \text{ Hz}.$$

Rappel : la vitesse du son dans l'air vaut $c = 3,4 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, valeur à connaître ... et à ne pas confondre avec $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ qui est la vitesse de la lumière!!!

5 Repartons de l'expression $P_{\text{tot}}(x, t) = A \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi)$. L'amplitude locale de l'onde stationnaire est donnée par $A(x) = A |\cos(kx + \psi)|$.

5.a Un ventre se trouve au niveau de l'embouchure, donc l'amplitude est maximale. On en déduit

$$\cos(k_n \times 0 + \psi) = \pm 1 \quad \text{soit} \quad \psi = n\pi \quad (n \text{ entier})$$

Choisir $\psi = 0$ est donc compatible avec la condition limite.

5.b Un nœud se trouve au niveau du pavillon, donc l'amplitude locale est nulle, d'où

$$\cos(k_n L) = 0 \quad \text{soit} \quad k_n L = \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

Ne pas hésiter à s'appuyer sur un cercle trigonométrique au brouillon pour répondre à ces questions sans erreur!

5.c De cette condition on déduit

$$L = \frac{\pi}{2k_n} + \frac{n\pi}{k_n}$$

et comme par définition $k_n = 2\pi/\lambda_n$ alors

$$L = \frac{\lambda_n}{4} + n \frac{\lambda_n}{2}.$$

6 Lorsque le trompettiste appuie sur le piston, la nouvelle fréquence fondamentale est donnée par

$$f'_0 = \frac{4c}{L'} = \frac{f_0}{2^{3/12}}$$

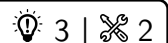
où L' est la longueur totale (tuyau + coulisse). Ainsi,

$$\frac{4c}{L'} = \frac{4c}{2^{3/12} L} \quad \text{d'où} \quad L' = 2^{3/12} L$$

On en déduit enfin la longueur L_c de la coulisse par $L' = L + L_c$, si bien que

$$L_c = (2^{3/12} - 1)L = 26 \text{ cm}.$$

Exercice 9 : Guitare électrique



- ▷ Analogies entre phénomènes ondulatoires ;
- ▷ Analyse dimensionnelle ;
- ▷ Modes propres.

1 Raisonnons par analyse dimensionnelle, en cherchant la célérité sous la forme

$$c = \mu^\alpha F^\beta.$$

L'équation aux dimensions s'écrit

$$\text{m} \cdot \text{s}^{-1} = (\text{kg} \cdot \text{m}^{-1})^\alpha \times (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2})^\beta.$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} 1 = -\alpha + \beta & (\text{m}) \\ -1 = -2\beta & (\text{s}) \\ 0 = \alpha + \beta & (\text{kg}) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \alpha = -1/2 \\ \beta = 1/2 \end{cases}$$

d'où on conclut

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

L'analyse dimensionnelle ne permet pas d'identifier la présence d'un éventuel facteur numérique dans l'expression ($\pi, 2$, etc.). Il se trouve qu'ici il n'y en a pas, et que l'expression obtenue pour c est directement la bonne.

2 Les ondes pouvant exister sur la corde de guitare doivent vérifier l'équation de propagation et les conditions aux limites. En insérant la forme de solution cherchée dans l'équation de d'Alembert, on obtient

$$g''(x) \cos(\omega t) + \frac{\omega^2}{c^2} g(x) \cos(\omega t) = 0 \quad \text{soit} \quad g''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} g(x) = 0.$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $k = \omega/c$, dont les solutions sont donc de la forme

$$g(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad \text{avec} \quad A = \text{cte.}$$

La corde étant attachée en $x = 0$, on a à tout instant $y(x=0, t) = 0$, donc

$$g(x=0) = 0 = B.$$

\uparrow CL \uparrow expr

La corde étant également attachée en $x = L$, de même,

$$g(x=L) = 0 = A \sin(kL).$$

\uparrow CL \uparrow expr

On en déduit que les valeurs de k sont quantifiées, et vérifient

$$k_n L = n\pi \quad \text{soit} \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Finalement, les fonctions solutions sont de la forme

$$g(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

3 La fréquence de vibration de la corde est celle du fondamental, correspondant à $n = 1$. On a donc

$$k_1 = \frac{2\pi f_1}{c} = \frac{\pi}{L} \quad \text{soit} \quad \frac{4f_1^2}{F/\mu} = \frac{1}{L^2} \quad \text{d'où} \quad F = 4\mu f_1^2 L^2.$$

La corde étant cylindrique de longueur L et diamètre d , on en déduit sa masse et sa masse linéique

$$m = \frac{\pi d^2}{4} L \rho \quad \text{d'où} \quad \mu = \frac{m}{L} = \frac{\pi \rho d^2}{4}$$

et ainsi

$$F = \pi \rho d^2 f_1^2 L^2 = 93 \text{ N}.$$

4 En inversant les formules précédentes, la fréquence de vibration de la corde est reliée à la force de tension par

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

Si la fréquence est trop basse, il faut donc **augmenter la tension** de la corde.

5 La tension de la corde étant la même,

$$\frac{f_1}{f_1'} = \frac{L'}{L} \quad \text{soit} \quad L' = \frac{f_1}{f_1'} L \simeq \frac{3}{4} L.$$

Partant du haut du manche, le guitariste doit placer son doigt à un quart de la longueur totale de la corde.