TD 19 – Séquence 6 : Ondes électromagnétiques

Réflexion et absorption des ondes électromagnétiques

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

Ceinture		Proposition de parcours d'entraînement
	Ceinture blanche	Questions de cours + exercices 1, 4 et 5
	Ceinture jaune	Questions de cours + exercices 1, 4, 5 et 8
	Ceinture rouge	Questions de cours (★) + exercices 2, 3 et 5 à 8
	Ceinture noire	Questions de cours (★) + exercices 2, 3 et 6 à 9

Flasher ce code pour accéder au corrigé

Questions et applications de cours

Seuls les étudiants du groupe PT⋆ seront interrogés en colle sur les questions marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !

(★) 19.1 - Montrer qu'un conducteur ohmique excité à basse fréquence peut être considéré localement neutre et que le courant de déplacement peut y être négligé devant le courant de conduction. On rappelle que pour un métal $\gamma \sim 10^7\,\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ tant que $f \lesssim 10^{13}\,\mathrm{Hz}$, et on donne $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

19.2 - Écrire les équations de Maxwell simplifiées dans un conducteur ohmique excité en basse fréquence et en déduire l'équation de propagation pour le champ électrique ou magnétique, au choix de l'interrogateur.

19.3 - En partant de l'équation de propagation (rappelée par l'interrogateur), établir la relation de dispersion complexe dans un conducteur ohmique. Définir l'épaisseur de peau. En déduire l'expression du champ électrique d'une pseudo-OPPH et l'interpréter physiquement.

19.4 - Considérons un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$, sur lequel est envoyé une onde incidente

$$\underline{\vec{E}_\mathrm{i}} = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}\,\vec{e}_y\,.$$

On cherche l'onde réfléchie en la cherchant sous la forme

$$\underline{\vec{E}_\mathrm{r}} = \underline{r}\,E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + kx)}\,\vec{e}_y\,.$$

Déterminer le coefficient de réflexion en amplitude $\underline{r}$.

> *Le calcul est légèrement différent de celui du cours, car un peu moins général : pour alléger le calcul, on admet ici directement que l'onde réfléchie a la même polarisation que l'onde incidente, ce qui permet de n'utiliser qu'une seule projection de la relation de passage.*

19.5 - Considérons une cavité électromagnétique formée par deux plans conducteurs situés en $x = 0$ et $x = L$. On cherche ses modes propres sous la forme

$$\vec{E}(x,t) = f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\vec{e}_y\,.$$

Déterminer les fonctions f qui conviennent.

Effet de peau

Exercice 1 : Blocage d'appel

oral banque PT | 1 | 2 |

▷ *Effet de peau.*

Un téléphone émet un appel, reçu par un second téléphone. On place une plaque de métal devant le second téléphone : il ne reçoit plus l'appel. On modélise la plaque comme occupant tout le demi-espace $z > 0$, l'onde se propageant dans le vide $z < 0$.

1 - Donner l'ordre de grandeur de la longueur d'onde et de la fréquence d'une onde téléphonique. On admet que cette fréquence permet de traiter le métal dans l'ARQS.

2 - Établir l'équation différentielle vérifiée par $\vec{E}$ dans le métal. Comparer cette équation à celle dans le vide. Commenter physiquement.

3 - Trouver les solutions de l'équation précédente de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}z)}$, avec $\underline{k}$ complexe. Ces solutions sont-elles des ondes planes progressives monochromatiques ?

4 - Identifier une distance caractéristique. La calculer numériquement, justifier le modèle de plaque semi-infinie, et interpréter l'expérience.

Exercice 2 : Communication avec un satellite

2 | 2

▷ *Modélisation microscopique ;*
▷ *Relation de dispersion complexe.*

Pour communiquer depuis la Terre avec un satellite en orbite, les ondes électromagnétiques doivent traverser l'atmosphère. Celle-ci peut être assimilée au vide en ce qui concerne la propagation des ondes électromagnétiques, à l'exception d'une couche située entre 60 et 800 km : l'ionosphère.

Sous l'influence du rayonnement solaire, l'air présent dans l'ionosphère s'ionise et devient un plasma, contenant des cations (masse m_c et charge $+e$) et des électrons (masse m_e et charge $-e$) avec une même densité volumique n. Ces charges sont soumises à l'action de l'onde électromagnétique.

On considère une onde transverse de la forme $\underline{\vec{E}} = \underline{E_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}\vec{e}_x$, et on cherche à déterminer son devenir quand elle pénètre dans l'ionosphère.

1 - Dans quelle direction se propage cette onde ? Quelle est sa polarisation ? Exprimer le champ magnétique associé dans le vide.

2 - Exprimer la force de Lorentz subie par une charge q en mouvement à la vitesse $\vec{v}$. À quelle condition sur v est-il possible de négliger la composante magnétique devant la composante électrique ? On suppose cette condition remplie par la suite.

3 - On note respectivement $\vec{v}_\mathrm{c}$ et $\vec{v}_\mathrm{e}$ les vitesses des cations et des électrons. Partant du principe fondamental de la dynamique, montrer que

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = ne^2\left(\frac{1}{m_\mathrm{e}} + \frac{1}{m_\mathrm{c}}\right)\vec{E}\,.$$

4 - Rappeler l'ordre de grandeur de la masse d'un proton, en déduire celle de la masse d'un cation. Comparer à la masse d'un électron. En déduire une simplification de l'expression précédente.

5 - Montrer que le champ électrique vérifie l'équation de propagation

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{{\omega_\mathrm{p}}^2}{c^2}\vec{E}\,,$$

avec ω_p une pulsation caractéristique appelée pulsation plasma, à exprimer en fonction des données du problème.

> ***Remarque culturelle :*** *Cette équation, appelée équation de Klein-Gordon, apparaît dans de nombreux domaines : ondes de torsion sur une plaque, physique des particules élémentaires, etc.*

6 - Établir la relation de dispersion du plasma.

7 - Exprimer le champ électrique de l'onde si $\omega < \omega_\mathrm{p}$. On introduira une longueur caractéristique δ. L'onde peut-elle traverser l'ionosphère ? Qu'en est-il si $\omega > \omega_\mathrm{p}$?

8 - Les satellites GPS émettent dans deux étroites bandes de fréquences centrées sur 1227 MHz et 1575 MHz. Commenter ce choix sachant que la pulsation plasma de l'ionosphère est de l'ordre de $10^7\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

Exercice 3 : Approche énergétique de l'effet de peau — oral banque PT | 3 | 2

- ▷ *Effet de peau ;*
- ▷ *Vecteur de Poynting ;*
- ▷ *Bilan de puissance.*

Considérons un conducteur électrique semi-infini de conductivité γ et dans lequel règne un champ

$$\vec{E} = E_0\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \alpha z)}\,\vec{u}_x\,.$$

1 - S'agit-il d'une onde plane ? D'une onde progressive ? Que représente α ? Quelles sont la direction et le sens de propagation ? La polarisation ?

2 - Calculer le champ $\vec{B}$ associé.

3 - Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

4 - Effectuer un bilan de puissance pour une tranche de conducteur de surface S et de longueur $\mathrm{d}z$. Déterminer la puissance cédée par unité de volume dans le conducteur.

5 - Établir une autre expression de la puissance cédée à partir de la loi d'Ohm locale.

6 - À partir des deux expressions obtenues, déduire la distance sur laquelle pénètre l'onde avant d'être atténuée.

Réflexion des ondes

Exercice 4 : Onde électromagnétique confinée — oral Mines-Ponts PSI | 1 | 2 |

- ▷ *Réflexion sur un conducteur parfait ;*
- ▷ *Cavité électromagnétique.*

On rappelle que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls dans un conducteur parfait. On donne les relations de passage à l'interface entre deux milieux 1 et 2 :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to2} \qquad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0\,\vec{j}_\mathrm{s} \wedge \vec{n}_{1\to2} \qquad \mu_0\,\vec{j}_\mathrm{s} = \vec{n}_{1\to2} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\,,$$

où σ et $\vec{j}_\mathrm{s}$ sont respectivement les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface.

1 - On considère un champ électrique dans le vide de la forme $\vec{E}_\mathrm{i} = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)}\,\vec{e}_x$. Montrer que $\omega = kc$.

2 - On place un conducteur parfait semi-infini en $z > 0$. Montrer que les relations de passage pour $\vec{E}$ impliquent l'existence d'une onde réfléchie et donner son expression. Donner la nature de l'onde totale.

3 - En déduire le champ magnétique à partir d'une équation de Maxwell.

4 - Qu'impliquent les relations de passage pour $\vec{B}$? Interpréter.

On ajoute un deuxième conducteur parfait en $z = -L$.

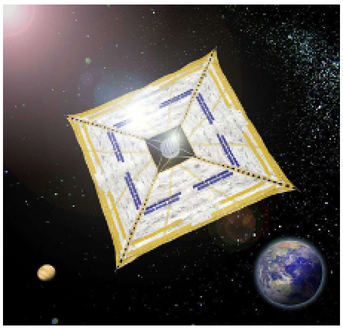
5 - Déterminer les ondes pouvant exister entre les deux conducteurs et leurs caractéristiques. On introduira un entier n.

6 - Quelle est la puissance moyenne traversant une surface $z = \mathrm{cte}$?

Exercice 5 : Voile solaire

oral banque PT | 2 | 2

▷ *Réflexion sur un conducteur parfait ;*
▷ *Force de Lorentz.*



Une voile solaire est un dispositif de propulsion permettant de se déplacer dans l'espace à la manière d'un voilier. Les photons émis par le Soleil entrent en collision avec la voile et lui cèdent leur quantité de mouvement, ce qui lui permet d'avancer. Compte tenu de la faible propulsion générée, le procédé ne permet pas de quitter la surface d'une planète (même dénuée d'atmosphère, et donc de friction). Il est en revanche utilisable sur un appareil ayant déjà atteint la vitesse de satellisation minimale, voire la vitesse de libération. Plusieurs prototypes de petite taille ont déjà été placés en orbite ou sont en cours de développement, comme par exemple le démonstrateur IKAROS, dont une vue d'artiste est représentée ci-contre, lancé en 2010 par l'agence spatiale japonaise.

On considère une voile solaire de surface S modélisée par un conducteur parfait. Le rayonnement solaire est assimilé à une onde plane progressive monochromatique (OPPM) de polarisation rectiligne. On suppose que la normale à la surface S est colinéaire à la direction de propagation de l'OPPM.

1 - Proposer une expression du champ électrique complexe de l'OPPM incidente sur la voile. En déduire l'onde réfléchie.

2 - Calculer la densité surfacique de courant sur la voile.

3 - Proposer une expression pour la force surfacique moyenne à laquelle est soumise la voile et la calculer. Commenter sa direction et son sens.

Données :
▷ les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls dans un conducteur parfait ;
▷ relations de passage à l'interface entre deux milieux (1) et (2), de normale $\vec{n}$ orientée de (1) vers (2) :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n} \qquad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{\jmath}_\mathrm{s} \wedge \vec{n} \iff \vec{\jmath}_\mathrm{s} = \vec{n} \wedge \left(\frac{\vec{B}_2 - \vec{B}_1}{\mu_0}\right),$$

où σ et $\vec{\jmath}_\mathrm{s}$ sont respectivement les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface.

Exercice 6 : Réflexion à l'interface entre deux milieux transparents

2 | 2

▷ *Réflexion d'une onde électromagnétique ;*
▷ *Vecteur de Poynting.*

L'objectif de cet exercice est détudier la réflexion d'une onde électromagnétique entre deux milieux isolants parfaitement transparents (verre, eau, plexiglas, etc.). De tels milieux sont appelés *milieux diélectriques.* La propagation des ondes électromagnétiques y obéit exactement aux mêmes relations que dans le vide, à condition de remplacer la célérité c par c/n, où n est l'*indice optique* du milieu.

Dans un milieu d'indice n_1, on envoie une onde incidente de la forme

$$\underline{\vec{E}_\mathrm{i}} = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_1 z)}\,\vec{e}_x\,.$$

En $z = 0$ se trouve une interface avec un milieu d'indice n_2, voir figure 1. Lorsque l'onde incidente l'atteint, elle est partiellement réfléchie et partiellement transmise. On cherche les ondes transmise et réfléchie sous la forme

$$\underline{\vec{E}_\mathrm{r}} = \underline{r}\,E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + k_1 z)}\,\vec{e}_x \qquad \text{et} \qquad \underline{\vec{E}_\mathrm{t}} = \underline{t}\,E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_2 z)}\,\vec{e}_x\,.$$

Les constantes $\underline{r}$ et $\underline{t}$ sont appelées coefficient de réflexion et transmission en amplitude pour le champ électrique.

Donnée : relations de passage au niveau de l'interface

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z \qquad \text{et} \qquad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0\,\vec{\jmath}_\mathrm{s} \wedge \vec{e}_z\,,$$

avec σ et $\vec{\jmath}_\mathrm{s}$ les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface.

1 - Exprimer k_1 et k_2 en fonction notamment de la pulsation et des indices optiques.

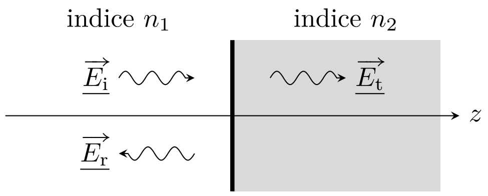


Figure 1 – Transmission et réflexion à une interface entre deux milieux diélectriques.

2 - Justifier les expressions des ondes transmise et réfléchie. Quelles sont les hypothèses permettant de les écrire sous cette forme ?

3 - Écrire les relations de passage en fonction de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en admettant qu'il n'y a ni charge ni courant de surface.

4 - En déduire les expressions de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction des indices des deux milieux.

5 - Exprimer la moyenne temporelle des vecteurs de Poynting incident, réfléchi et transmis.

6 - Par analogie, définir un coefficient de réflexion $\mathcal{R}$ et de transmission $\mathcal{T}$ en énergie à l'interface. Les calculer. Que vaut la somme des deux coefficients ? Interpréter physiquement.

Exercice 7 : Guide d'ondes

inspiré oral banque PT | 2 | 2

- *Exploitation des conditions aux limites ;*
- *Résolution par séparation des variables ;*
- *Vecteur de Poynting.*

Une cavité vide, supposée invariante par translation selon $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$, est taillée dans un conducteur occupant les demi-espaces $x < 0$ et $x > a$. On souhaite utiliser cette cavité comme guide d'onde : on s'intéresse à la propagation dans cette cavité d'une onde électromagnétique sous la forme

$$\vec{\underline{E}}(M,t) = f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}\,\vec{u}_y\,.$$

1 - Déterminer $f(x)$ et la relation entre ω et k.

2 - Montrer que l'onde ne peut se propager que si ω est supérieure à une pulsation de coupure ω_c à exprimer.

3 - On appelle modes propagatifs du guide les différentes ondes pouvant se propager dans le guide pour une pulsation donnée. Pour quel intervalle de pulsation le guide d'onde est-il monomode, c'est-à-dire qu'il n'y existe qu'un seul mode propagatif ? Même question pour un guide multimode, possédant plusieurs modes propagatifs ?

4 - Le champ magnétique dans le guide s'écrit

$$\vec{\underline{B}}(M,t) = -\frac{k}{\omega}E_0 \sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}\,\vec{u}_x + \mathrm{i}\frac{n\pi}{a\omega}E_0\cos\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}\,\vec{u}_z\,.$$

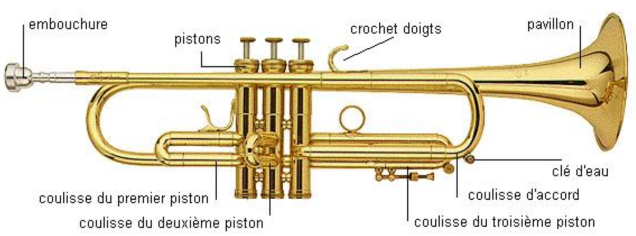
Déterminer l'expression du vecteur de Poynting instantané et interpréter physiquement chacune de ses composantes.

Analogies entre phénomènes ondulatoires

Exercice 8 : Trompette

2 | 2

- *Analogies entre phénomènes ondulatoires ;*
- *Ondes stationnaires.*



Une trompette est un instrument à vent de la famille des cuivres. Le son y est produit par la vibration des lèvres du trompettiste au niveau de l'embouchure, qui génère une onde acoustique au sein de l'instrument. La trompette peut être modélisée comme un tuyau sonore rectiligne de longueur totale $L = 1{,}40\,\mathrm{m}$, fermé au niveau de l'embouchure et ouvert au niveau du pavillon.

On introduit un axe x tel que l'embouchure se trouve en $x = 0$ et le pavillon en $x = L$.

1 - On modélise l'onde de pression $P_\mathrm{i}(x,t)$ générée par le trompettiste par une onde progressive harmonique d'amplitude P_0, de pulsation ω, et de phase initiale nulle. Écrire son expression mathématique.

2 - Lorsqu'elle atteint le pavillon, cette onde se réfléchit en conservant la même amplitude, mais avec un déphasage éventuel. Écrire son expression mathématique, en notant ϕ le déphasage à la réflexion, qui coïncide avec la phase initiale de l'onde réfléchie.

3 - Écrire l'expression de l'onde totale dans la trompette sous la forme

$$P_\mathrm{tot}(x,t) = A\cos(kx+\psi)\cos(\omega t+\varphi)$$

en exprimant A, ψ et φ en fonction des paramètres déjà introduits. Comment s'appelle une telle onde ?

Les notes jouables à la trompette correspondent aux modes propres du tuyau sonore. Les conditions aux limites (tuyau fermé-ouvert) imposent un ventre de pression au niveau de l'embouchure ($x=0$) et un nœud au niveau du pavillon ($x=L$).

4 - En s'appuyant sur une représentation graphique de l'onde, montrer que les longueurs d'onde λ_n des modes propres sont telles que

$$L = \frac{\lambda_n}{4} + n\frac{\lambda_n}{2}\,.$$

En déduire la fréquence fondamentale ($n=0$) de la trompette.

5 - Retrouvons ces résultats par le calcul.
***5.a* -** En utilisant la condition aux limites à l'embouchure, montrer que $\psi = 0$ convient.
***5.b* -** Déduire de la seconde condition aux limites que $k_n L = \pi/2 + n\pi$ avec n un entier.
***5.c* -** Retrouver enfin la condition sur la longueur d'onde.

6 - Lorsque le trompettiste appuie sur un piston, l'air est dévié dans la coulisse correspondante, ce qui a pour effet de modifier la longueur du tuyau. Le son est « abaissé de trois demi-tons », ce qui signifie que la fréquence fondamentale est divisée par $2^{3/12}$. En déduire la longueur de la coulisse de ce piston.

Exercice 9 : Guitare électrique 3 | 2

- ▷ *Analogies entre phénomènes ondulatoires ;*
- ▷ *Analyse dimensionnelle ;*
- ▷ *Modes propres.*

Une guitare électrique compte six cordes de longueur 63 cm, attachées à leur deux extrémités. Ces cordes sont faites en acier, de masse volumique $7{,}8\cdot10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. On s'intéresse ici à la deuxième corde, de diamètre 0,89 mm, produisant un La_1 de fréquence 110 Hz. La corde au repos est confondue avec l'axe (Ox), et on note $y(x,t)$ l'écart de la corde à sa position d'équilibre, qui vérifie l'équation de d'Alembert unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0\,.$$

1 - La célérité c des ondes mécaniques sur la corde dépend de sa masse linéique μ, ou masse par unité de longueur, ainsi que de la force F permettant de la tendre. Proposer une expression de c.

2 - On s'intéresse aux ondes harmoniques pouvant exister sur la corde, en cherchant des solutions sous la forme

$$y(x,t) = g(x)\cos(\omega t)\,.$$

Déterminer toutes les fonctions g qui conviennent.

3 - Déterminer la force sous laquelle la corde doit être tendue pour qu'elle vibre à la fréquence voulue.

4 - La corde produit un son plus grave (fréquence plus faible) que celui souhaité. Le guitariste doit-il relâcher ou tendre davantage la corde pour l'accorder ?

5 - Pour jouer différentes notes avec la même corde, le guitariste l'immobilise en un endroit précis en l'appuyant contre le manche de sa guitare. Comment doit-il placer son doigt pour jouer un Ré_2 de fréquence 147 Hz ?