

# Interférences par division du front d'onde

## Trous d'Young et dispositifs analogues

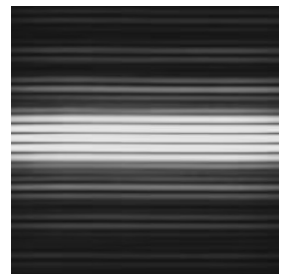
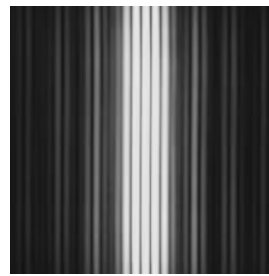
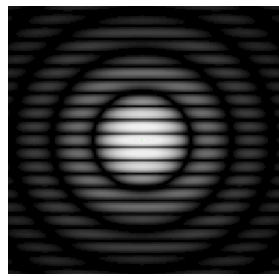
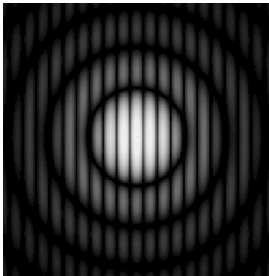
### Exercice 1 : Figures d'interférences

💡 1 | ✂ 0



- ▷ Allure des figures d'interférences ;
- ▷ Diffraction.

La figure d'interférences se superpose à la figure de diffraction obtenue pour une unique fente ou un unique trou.



### Exercice 2 : Fentes d'Young en éclairage parallèle

💡 1 | ✂ 2 | 🔄



- ▷ Différence de marche à l'infini ;
- ▷ Largeur de cohérence spatiale.

1 Voir figure 1.

- ▷ Construction des rayons entre la source et les fentes d'Young :
  - on commence par tracer le rayon orange issu de  $S$  et passant par le centre optique de la lentille  $L_1$  ;
  - on en déduit « en remontant » les deux rayons entre la lentille  $L_1$  et les deux points  $S_1$  et  $S_2$  : comme la fente source est dans le plan focal objet de la lentille  $L_1$ , alors ces deux rayons sont parallèles au rayon orange précédemment tracé ;
  - enfin, on sait que ces deux rayons ont été émis par le point  $S$ , ce qui permet d'achever leur tracé.
- ▷ Construction des rayons entre les fentes d'Young et l'écran :
  - on commence par tracer le rayon violet aboutissant en  $M$  et passant par le centre optique de la lentille  $L_2$  : bien qu'il n'y ait aucune lumière le long de ce rayon, il permet de fixer une direction ;
  - on en déduit la trajectoire des rayons diffractés par  $S_1$  et  $S_2$  aboutissant en  $M$  : comme l'écran est dans le plan focal image de la lentille  $L_2$ , alors ces deux rayons sont parallèles au rayon violet précédemment tracé ;
  - enfin, on sait que ces deux rayons interfèrent en  $M$ , ce qui permet d'achever leur tracé.

2 Considérons  $S$  un point quelconque de la fente source d'ordonnée  $y_1$ . D'après le théorème de Malus, les points  $S_1$  et  $K$  appartiennent au même plan d'onde, si bien que

$$(SS_1) = (SK).$$

Par ailleurs, si la source était située en  $M$  les rayons seraient inchangés et ainsi, d'après le théorème de Malus, les points  $S_1$  et  $H$  appartiendraient au même plan d'onde. D'après le principe de retour inverse de la lumière, on en déduit

$$(S_1M) = (HM).$$

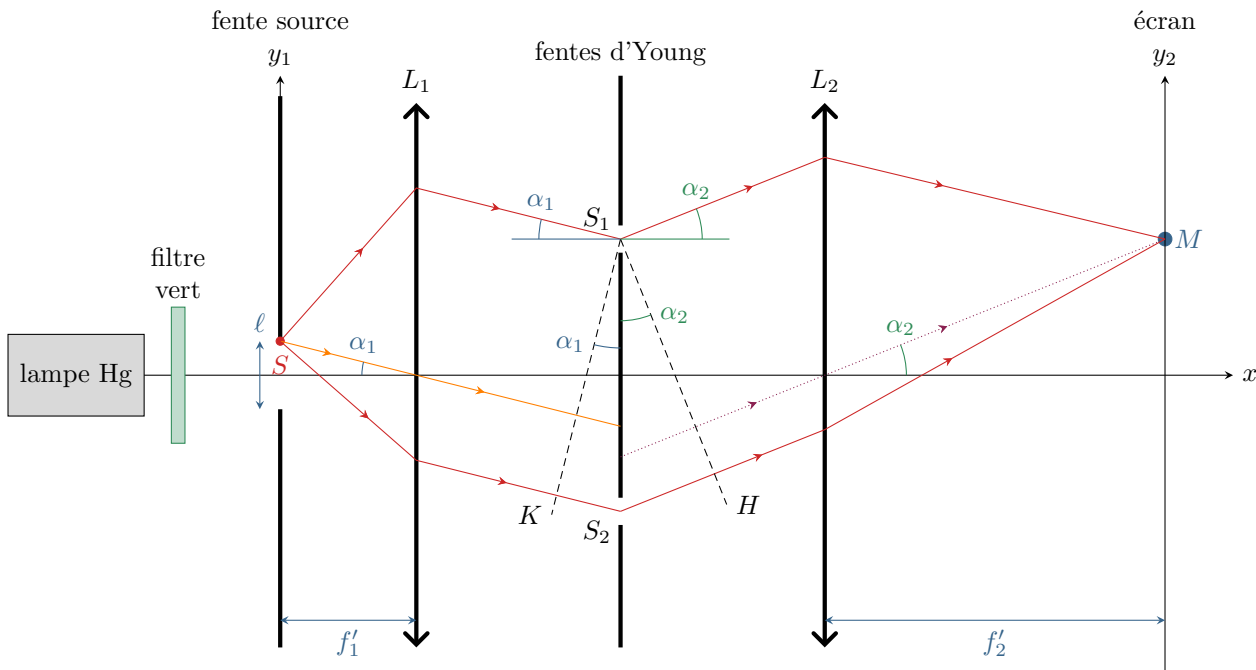


Figure 1 – Fentes d'Young éclairées en lumière parallèle.

Exprimons la différence de marche :

$$\delta = (SS_2M) - (SS_1M) = [(SK) + (KS_2) + (S_2H) + (HM)] - [(SS_1) + (S_1M)] = (KS_2) + (KH).$$

En raisonnant dans deux triangles rectangles, et en supposant les angles petits,

$$\begin{cases} \tan \alpha_1 \simeq \alpha_1 = \frac{y_1}{f'_1} \\ \sin \alpha_1 \simeq \alpha_1 = \frac{KS_2}{S_1S_2} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \frac{y_1}{f'_1} = \frac{KS_2}{S_1S_2} \quad \text{et} \quad KS_2 = \frac{ay_1}{f'_1}.$$

De même,

$$\begin{cases} \tan \alpha_2 \simeq \alpha_2 = \frac{y_2}{f'_2} \\ \sin \alpha_2 \simeq \alpha_2 = \frac{HS_2}{S_1S_2} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \frac{y_2}{f'_2} = \frac{HS_2}{S_1S_2} \quad \text{et} \quad HS_2 = \frac{ay_2}{f'_2}.$$

Finalement,

$$\delta = \frac{ay_1}{f'_1} + \frac{ay_2}{f'_2} \quad \text{d'où} \quad p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{a}{\lambda_0} \left( \frac{y_1}{f'_1} + \frac{y_2}{f'_2} \right).$$

3 Considérons un point d'ordonnée  $y_2$  fixée, et calculons la différence d'ordre d'interférence  $\Delta p$  pour des ondes émises par le centre de la source ( $y_1 = 0$ ) et son extrémité ( $y_1 = \ell/2$ ),

$$\Delta p = \frac{a}{\lambda_0} \left( \frac{\ell/2}{f'_1} + \frac{y_2}{f'_2} \right) - \frac{a}{\lambda_0} \left( \frac{0}{f'_1} + \frac{y_2}{f'_2} \right) = \frac{a\ell}{2\lambda_0 f'_1}.$$

Par définition, la largeur de cohérence spatiale de la source est telle que  $\Delta p = 1/2$ , soit

$$\frac{a\ell_s}{2\lambda_0 f'_1} = \frac{1}{2} \quad \text{d'où} \quad \ell_s = \frac{\lambda_0 f'_1}{a}.$$

**Exercice 3 : Miroir de Lloyd**

oral CCP MP | 💡 2 | ✂️ 2 | 🌀



- ▷ Autre interféromètre par division du front d'onde ;
- ▷ Différence de marche à grande distance ;
- ▷ Déphasage à la réflexion ;
- ▷ Influence du déplacement et de l'élargissement de la source.

Dans son retour d'oral, le candidat mentionne qu'il a donné tous les résultats sans démonstration et sans que l'examineur ne demande de détail.

1 Les rayons issus de  $S$  peuvent atteindre l'écran directement ou se réfléchir sur le miroir. Tout se passe comme si l'image  $S'$  de  $S$ , symétrique de  $S$  par rapport au miroir, était une deuxième source ponctuelle cohérente avec  $S$ , voir figure 2.

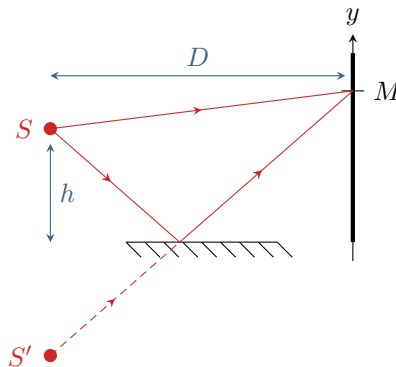


Figure 2 – Tracé des rayons.

2 En raisonnant dans le plan de la figure, d'après le théorème de Pythagore et sachant que  $D \gg y, h$ ,

$$SM = \sqrt{D^2 + (y - h)^2} = D \sqrt{1 + \left(\frac{y - h}{D}\right)^2} \simeq D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{y - h}{D}\right)^2\right) = D \left(1 + \frac{y^2}{2D^2} + \frac{h^2}{2D^2} - \frac{hy}{D^2}\right)$$

De même,

$$S'M = \sqrt{D^2 + (y + h)^2} = D \sqrt{1 + \left(\frac{y + h}{D}\right)^2} \simeq D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{y + h}{D}\right)^2\right) = D \left(1 + \frac{y^2}{2D^2} + \frac{h^2}{2D^2} + \frac{hy}{D^2}\right)$$

Je propose ici une démonstration alternative à celle utilisée dans le cours. Bien entendu, vous pouvez exprimer de même les vecteurs  $\vec{SM}$  et  $\vec{S'M}$  dans la base cartésienne puis calculer leur norme.

À ces distances géométriques s'ajoute le déphasage de  $\pi$  dû à la réflexion métallique sur le miroir, qui se traduit par l'ajout de  $\lambda/2$  au chemin optique. On en déduit

$$\delta = (SM)_{\text{miroir}} - (SM)_{\text{direct}} = (S'M) - (SM) = S'M + \frac{\lambda}{2} - SM \quad \text{d'où} \quad \boxed{\delta = \frac{2hy}{D} + \frac{\lambda}{2}}$$

L'ordre d'interférences vaut donc

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2hy}{\lambda D} + \frac{1}{2}$$

D'après la formule de Fresnel,

$$I(M) = 2I_0 [1 + \cos(2\pi p(M))] = 2I_0 \left[1 + \cos\left\{\frac{2\pi}{\lambda} \frac{2hy}{D} + \pi\right\}\right]$$

soit finalement

$$I(M) = 2I_0 \left[1 - \cos\left\{\frac{2\pi}{\lambda} \frac{2hy}{D}\right\}\right]$$

L'interfrange s'en déduit par

$$p(y + i) = p(y) + 1 \quad \text{d'où} \quad \frac{2hi}{\lambda D} = 1 \quad \text{donc} \quad \boxed{i = \frac{\lambda D}{2h}}$$

3 Comme  $i' > i$  et d'après les questions précédentes on déduit

$$h = \frac{\lambda D}{2i'} \quad \text{et} \quad h - \Delta h = \frac{\lambda D}{2i}$$

si bien que

$$\Delta h = \frac{\lambda D}{2} \left( \frac{1}{i} - \frac{1}{i'} \right) = \frac{\lambda D}{2i} \left( 1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{\lambda D}{6i}$$

d'où on déduit finalement

$$\lambda = \frac{6i \Delta h}{D}.$$

Le signe  $\ominus$  devant  $\Delta h$  vient du fait que  $i' > i$  et que l'on souhaite avoir  $\Delta h > 0$ . On pourrait également conserver un signe  $\oplus$  et travailler avec  $\Delta h < 0$ , mais c'est nettement moins naturel.

4 Comme  $I$  ne dépend que de  $y$ , alors

- ▷ un élargissement dans la direction perpendiculaire à  $(Oy)$  est sans effet ;
- ▷ un élargissement dans la direction  $(Oy)$  génère la superposition de systèmes de franges pour lesquels l'interfrange est différent : on observe alors sur l'écran un brouillage progressif des franges, le contraste étant maximal en  $y = 0$  (tous les points de la source donnent des interférences constructives) puis diminuant progressivement (les interférences sont constructives pour certains points de la source mais destructives pour d'autres).

#### Exercice 4 : Fentes d'Young éclairées par un doublet spectral

💡 2 | ✂ 2



- ▷ Doublet spectral ;
- ▷ Influence de la diffraction.

1 Les notations sont identiques à celles du cours (il faut en particulier être vigilant à l'axe selon lequel l'éclairement varie). L'ordre d'interférences vaut donc

$$p_0(x) = \frac{ax}{\lambda_0 D}$$

et d'après la formule de Fresnel l'intensité est

$$I_0(x) = 2I_m \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{ax}{\lambda_0 D} \right) \right].$$

L'interfrange est la période spatiale de la figure d'interférences, définie par

$$p_0(x + i_0) = p_0(x) + 1 \quad \text{soit} \quad \frac{ai_0}{\lambda_0 D} = 1 \quad \text{d'où} \quad i_0 = \frac{\lambda_0 D}{a}$$

L'interfrange est proportionnel à la longueur d'onde, donc

$$i_2 > i_1.$$

2 Les ondes des deux raies  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ne peuvent pas interférer car elles ne sont pas synchrones. L'intensité totale sur l'écran est donc la somme des deux intensités dues à chacune des raies individuellement.

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ &= 2I_m \left[ 2 + \cos \left( 2\pi \frac{ax}{\lambda_1 D} \right) + \cos \left( 2\pi \frac{ax}{\lambda_2 D} \right) \right] \\ &= 2I_m \left[ 2 + 2 \cos \left( 2\pi \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \frac{ax}{D} \right) \cos \left( 2\pi \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \frac{ax}{D} \right) \right] \\ &= 2I_m \left[ 2 + 2 \cos \left( 2\pi \frac{1}{2} \frac{2\lambda}{\lambda^2} \frac{ax}{D} \right) \cos \left( 2\pi \frac{1}{2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \frac{ax}{D} \right) \right] \end{aligned}$$

$$I = I_{\text{moy}} \left[ \underbrace{1 + \cos \left( 2\pi \frac{\Delta\lambda}{2\lambda^2} \frac{ax}{D} \right)}_{\textcircled{1}} \underbrace{\cos \left( 2\pi \frac{ax}{\lambda D} \right)}_{\textcircled{2}} \right]$$

où on pose  $I_{\text{moy}} = 4I_m$ .

3 Notons  $\Delta x$  la période du terme ①, telle que

$$\frac{\Delta \lambda}{2\lambda^2} \frac{a(x + \Delta x)}{D} = \frac{\Delta \lambda}{2\lambda^2} \frac{ax}{D} + 1 \quad \text{soit} \quad \frac{\Delta \lambda}{2\lambda^2} \frac{a \Delta x}{D} = 1 \quad \text{donc} \quad \boxed{\Delta x = \frac{2\lambda^2 D}{a \Delta \lambda}}.$$

De même, la période  $i$  du terme ② vaut

$$\boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}.$$

Ainsi, en ordre de grandeur,

$$\boxed{\frac{\Delta x}{i} = \frac{2\lambda^2 D/a \Delta \lambda}{\lambda D/a} = \frac{2\lambda}{\Delta \lambda} = 578}.$$

Le terme ① varie donc beaucoup plus lentement que le terme ② : on en déduit que le terme ① traduit physiquement le contraste des interférences décrites par le terme ②. L'allure de la fonction  $I(x)$  est représentée figure 3.

Contrairement au cas d'une source étendue, le contraste dépend ici du point d'observation, ce qui est presque toujours le cas en présence de source polychromatique.

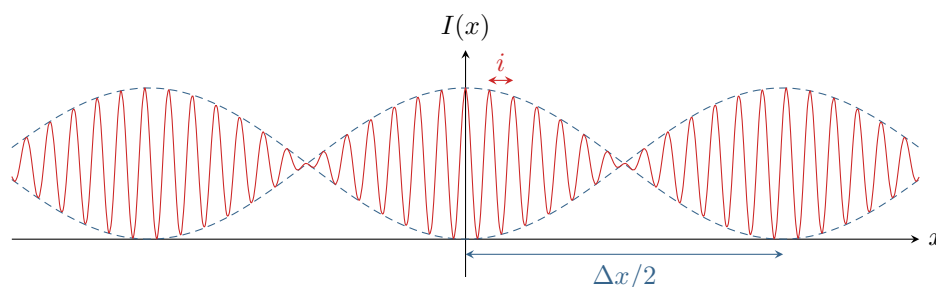


Figure 3 – Allure de la fonction  $I(x)$ . Bien sûr, le rapport  $\Delta x/i$  n'est pas respecté pour que la figure reste lisible !

4 Avec un dispositif d'Young, les franges d'interférences sont incluses dans la figure de diffraction par la fente. Sur l'écran à une distance  $D$  d'une fente de largeur  $a/10$ , la figure de diffraction a pour largeur

$$\ell = \frac{\lambda D}{a/10}.$$

L'interfrange  $i$  correspond à la distance entre deux franges identiques, ou autrement dit à la « taille » d'une frange. Le nombre  $N$  de franges observables est donc tel que

$$\ell = Ni \quad \text{soit} \quad \boxed{N = \frac{\ell}{i} = 10}.$$

Ainsi, seules les dix franges centrales sont observables. Comme le contraste varie de manière significative sur une longueur de l'ordre de quelques centaines d'interfrange, les variations de contraste sont ici sans impact sur l'éclairement observé sur l'écran ... c'est plutôt les variations d'éclairement dans la figure de diffraction qui entrent en jeu.

### Exercice 5 : Interférométrie stellaire

inspiré oraux banque PT | 2 | 2 |



- ▷ Différence de marche à l'infini ;
- ▷ Deux sources ponctuelles ;
- ▷ Déphasage à la réflexion.

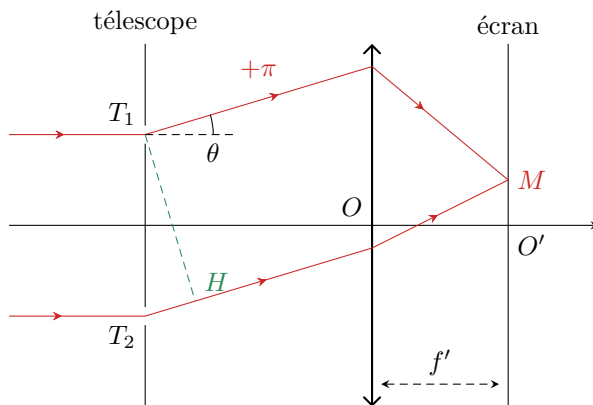
1 Venant d'une même source primaire, les rayons qui arrivent sur les deux télescopes **sont cohérents**. Raisonnons à partir de la figure 4 pour déterminer la différence de chemin optique d'origine géométrique.

Les rayons issus de l'étoile étant parallèles à l'axe optique, on a

$$(E_1 T_1) = (E_1 T_2).$$

De plus, si la source était en  $M$  et qu'il n'y avait pas le déphasage induit par les réflexions, alors les points  $T_1$  et  $H$  appartiendraient au même plan d'onde.

$$(T_1 M) = (H M).$$

Figure 4 – Différence de marche pour l'étoile  $E_1$ .

Ainsi, la différence de chemin optique d'origine géométrique s'écrit

$$\delta_g = \left[ \cancel{(E_1 T_2)} + (T_2 H) + \cancel{(H M)} \right] - \left[ \cancel{(E_1 T_1)} + (T_1 M) \right] = (T_2 H).$$

En raisonnant dans le triangle  $T_1 T_2 H$ , on a

$$\sin \theta = \frac{T_2 H}{T_1 T_2} = \frac{\delta_g}{a}$$

et dans le triangle  $OO'M$

$$\tan \theta = \frac{x}{f'}$$

Par identification dans la limite des petits angles,

$$\theta = \frac{\delta_g}{a} = \frac{x}{f'} \quad \text{d'où} \quad \delta_g = \frac{ax}{f'}$$

Enfin, les réflexions induisent un déphasage de  $\pi$  soit une différence de marche  $\delta_r = \lambda/2$ . On en déduit

$$\delta_1 = \delta_g + \delta_r \quad \text{soit} \quad \boxed{\delta_1 = \frac{ax}{f'} + \frac{\lambda}{2}}.$$

Pour retrouver le lien entre déphasage et différence de marche, repartir de la définition :

$$\Delta\phi_r = \frac{2\pi}{\lambda} \delta_r = \pi \quad \text{soit} \quad \delta_r = \frac{\lambda}{2}.$$

**2** Avec la formule de Fresnel,

$$I_1(x) = I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{f'} + \pi \right) \right] \quad \text{soit} \quad I_1(x) = I_0 \left[ 1 - \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{f'} \right) \right]$$

Pas de facteur 2 dans la formule de Fresnel, car  $I_0$  est l'intensité moyenne, et non pas l'intensité obtenue lorsque l'un des deux télescopes est « débranché ». De manière équivalente, l'intensité moyenne est la somme des deux intensités des télescopes pris seuls, ce qui inclut le facteur 2 que l'on a rencontré en cours.

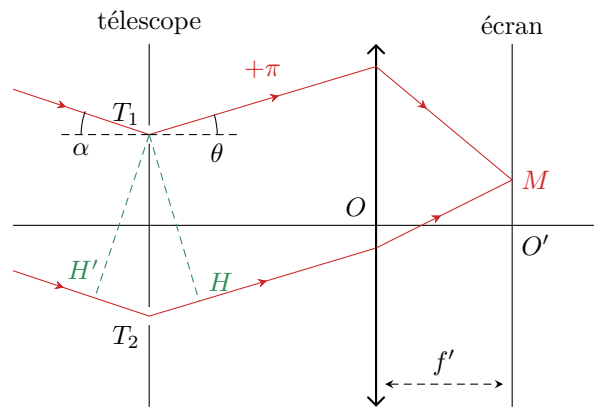
**3** Les deux étoiles étant indépendantes l'une de l'autre, les rayons issus de  $E_1$  et  $E_2$  sont **incohérents**. Pour déterminer la différence de marche, raisonnons sur la figure 5.

L'étoile étant à l'infini, les points  $T_1$  et  $H'$  appartiennent au même plan d'onde, donc  $(E_2 T_1) = (E_2 H')$ . Ainsi,

$$\delta_2 = \left[ \cancel{(E_2 H')} + (H' T_2) + (T_2 M) \right] - \left[ \cancel{(E_2 T_1)} + (T_1 M) \right] = (H' T_2) + \delta_1.$$

En raisonnant dans le triangle  $T_1 T_2 H'$ , on en déduit

$$\sin \alpha \simeq \alpha = \frac{H' T_2}{a}$$

Figure 5 – Différence de marche pour l'étoile  $E_2$ .

et ainsi

$$\delta_2(x) = \frac{ax}{f'} + \alpha a + \frac{\lambda}{2}.$$

On en déduit l'intensité due à l'étoile  $E_2$  prise seule :

$$I_2(x) = I_0 \left[ 1 - \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{ax}{f'} + \alpha a \right) \right\} \right]$$

Les étoiles étant incohérentes, l'intensité totale sur l'écran est la somme des intensités due à chaque étoile,

$$\begin{aligned} I(x) &= I_1(x) + I_2(x) \\ &= I_0 \left[ 1 - \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{f'} \right) \right] + I_0 \left[ 1 - \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{ax}{f'} + \alpha a \right) \right\} \right] \\ &= I_0 \left[ 2 - \underbrace{\cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{f'} \right)}_{=q} - \underbrace{\cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{ax}{f'} + \alpha a \right) \right\}}_{=p} \right] \end{aligned}$$

Pour l'addition des cosinus, on a alors

$$\frac{p-q}{2} = \frac{\pi}{\lambda} \alpha a \quad \text{et} \quad \frac{p+q}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{ax}{f'} + \frac{\alpha a}{2} \right)$$

Finalement, il vient

$$I(x) = 2I_0 \left[ 1 - \cos \left( \frac{\pi \alpha a}{\lambda} \right) \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{ax}{f'} + \frac{\alpha a}{2} \right) \right\} \right]$$

On constate que la présence des deux étoiles a un impact sur le contraste de la figure d'interférences, le facteur de contraste s'écrivant

$$\gamma = \cos \left( \frac{\pi \alpha a}{\lambda} \right).$$

**4** Mesurer les valeurs de  $a$  pour lesquelles le contraste s'annule permet de remonter à l'écart angulaire  $\alpha$  entre les étoiles. La première annulation a contraste a lieu pour une valeur  $a$  telle que

$$\frac{\pi \alpha a}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\alpha = \frac{\lambda}{2a}}.$$

La valeur de  $a$  devant rester inférieure à  $a_{\max} = 200$  m, distance maximale pouvant séparer les télescopes, on en déduit

$$\boxed{\alpha_{\min} = \frac{\lambda}{2a_{\max}} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ rad} = 2,8 \cdot 10^{-7} \text{ }^\circ}.$$

En pratique, tenant compte des nombreuses perturbations, la résolution du VLTI n'est « que » de  $8 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ$  à la longueur d'onde de  $2,2 \mu\text{m}$  où elle est optimale.

**Exercice 6 : Fentes d'Young éclairées par une fente source**

oral CCP MP | 💡 3 | ✂ 3



▷ Influence de l'élargissement de la source.

1 Cf cours : franges rectilignes.

2 Cf. cours :  $F$  est sur l'axe optique, donc  $(FO_1) = (FO_2)$ , et ainsi

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda} = \frac{ay}{\lambda D}$$

si bien que d'après la formule de Fresnel

$$I = I_0 \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{ay}{\lambda D} \right) \right].$$

3 Chaque point de la source crée son propre système d'interférences, mais comme les ordonnées  $Y$  ne sont pas les mêmes ces systèmes sont décalés les uns par rapport aux autres. Par convention, la figure d'interférences est dite brouillée lorsque

$$p_{Y=\varepsilon}(M) - p_{Y=0}(M) > \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \left( \frac{ay}{\lambda D} + \frac{a\varepsilon}{\lambda d} \right) - \frac{ay}{\lambda D} > \frac{1}{2}$$

ce qui donne

$$\varepsilon > \frac{\lambda d}{2a} = \varepsilon_c.$$

4 Les bandes élémentaires sont incohérentes, dont l'intensité totale est la somme des intensités produites par chaque bande ... mais s'agissant d'une découpage mésoscopique, la somme devient une intégrale. Ainsi,

$$I(M) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathcal{I}_Y(M) dY$$

En outre, chaque bande produit son propre système d'interférences, donné par la formule de Fresnel. On a donc bien

$$I(M) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathcal{I}_0 \left[ 1 + \cos \left\{ \frac{2\pi a}{\lambda} \left( \frac{y}{D} + \frac{Y}{d} \right) \right\} \right] dY$$

5 En faisant le calcul de l'intégrale et en utilisant la formule trigonométrique donnée, on trouve

$$I = 4\mathcal{I}_0\varepsilon \left[ 1 + \underbrace{\frac{\lambda d}{2\pi a \varepsilon} \sin \left( \frac{2\pi a \varepsilon}{\lambda d} \right)}_{\text{contraste}} \underbrace{\cos \left( 2\pi \frac{ay}{\lambda D} \right)}_{\text{interférences}} \right].$$

Pour le calcul de l'intégrale, on gagne à introduire des notations réduites, par exemple

$$k = \frac{2\pi a}{\lambda d} \quad \text{et} \quad \psi = \frac{2\pi a}{\lambda} \frac{y}{D}$$

ce qui permet d'alléger le calcul en intégrant la fonction  $Y \mapsto 1 + \cos(kY + \psi)$ .

6 Il y a brouillage total lorsque le facteur de contraste s'annule, c'est-à-dire

$$\sin \left( \frac{2\pi a \varepsilon}{\lambda d} \right) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{2\pi a \varepsilon}{\lambda d} = \pi \quad \text{donc} \quad \varepsilon_c = \frac{\lambda d}{2a}.$$

Ainsi, dans ce cas particulier de fente de luminance uniforme, le critère de brouillage coïncide avec la première annulation de contraste.



## Réseaux

## Exercice 7 : Spectrométrie à réseau

oral banque PT | 💡 1 | ✂ 1 | ☒



- ▷ Résultats expérimentaux ;
- ▷ Formule des réseaux.

1 On peut par exemple utiliser un montage à goniomètre. Le collimateur permet d'obtenir une source à l'infini à partir d'une lampe spectrale, et la lunette de visée d'observer à l'infini. Le vernier du goniomètre permet de mesurer précisément les angles de déviation. Une méthode efficace est celle du minimum de déviation, cf. TP.

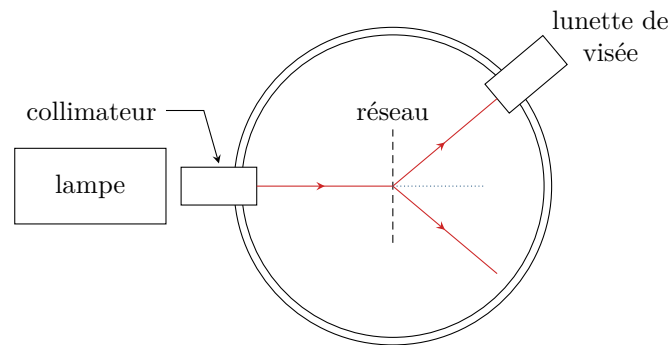


Figure 6 – Montage de spectrométrie à réseau utilisant un goniomètre.

2 Raisonnons sur deux motifs consécutifs, séparés de  $a = 1/n$ , avec les notations de la figure 7 pour changer par rapport au cours et bien montrer les difficultés pouvant se poser avec le tracé des rayons puis les conventions d'algébrisation des angles.

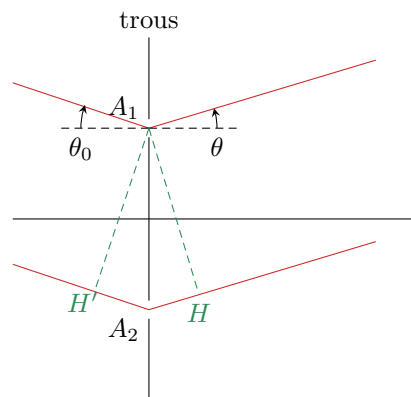


Figure 7 – Notations pour la formule des réseaux.

Grâce au collimateur, la source primaire  $S$  est située à l'infini et d'après le théorème de Malus les surfaces d'ondes sont des plans parallèles orthogonaux aux rayons. Ainsi,

$$(SA_1) = SH'.$$

Grâce à la lunette de visée, l'observation se fait en un point  $M$  à l'infini. Les rayons qui interfèrent sont donc parallèles entre eux à la sortie du réseau et forment tous la même inclinaison  $\theta$  avec l'axe du réseau. D'après le principe de retour inverse et le théorème de Malus, si la source était située au niveau du point d'observation alors les points  $A_1$  et  $H$  seraient dans le même plan d'onde. Ainsi,

$$(A_1M) = (HM).$$

*Attention, les deux arguments sont importants. Le théorème de Malus indique que si une source ponctuelle était placée au point d'observation  $M$ , alors  $A_1$  et  $H$  appartiendraient au même plan d'onde et donc il y a égalité des chemins optiques  $(MA_1)$  et  $(MH)$ . Le principe du retour inverse permet d'en déduire l'égalité des chemins optiques  $(A_1M)$  et  $(HM)$ , qui n'aurait a priori rien d'évident puisque  $H$*

et  $A_1$  n'appartiennent pas au même plan d'onde.

Par conséquent, la différence de marche s'écrit simplement

$$\delta = (SA_2M) - (SA_1M) = (H'A_2) + (A_2H) = -a \sin \theta_0 + a \sin \theta,$$

en faisant très attention au fait que  $\theta_0 < 0$  mais  $H'A_2 > 0$ , d'où le signe  $\ominus$  dans l'expression. Finalement, la différence de marche entre deux motifs successifs vaut

$$\delta = a (\sin \theta - \sin \theta_0).$$

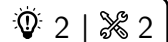
La formule des réseaux donne la position des maxima d'intensité  $\theta_p$ , atteints lorsque  $\delta = p\lambda$  avec  $p$  entier, soit

$$\sin \theta_p - \sin \theta_0 = p \frac{\lambda}{a}.$$

**3** Le réseau étant éclairé en incidence normale, les ordres sont symétriques par rapport à la direction de la lumière incidente. Ainsi,  $\theta_2 = \alpha/2$  et d'après la formule des réseaux on obtient

$$\lambda = \frac{a}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = 508,6 \text{ nm}.$$

### Exercice 8 : Monochromateur à réseau



- ▷ Formule des réseaux;
- ▷ Lentille convergente.

**1** Si l'ordre 2 est sur l'axe optique, alors il émerge avec un angle  $i = 0$ . Comme le pas du réseau  $a = 1/n$ , on a d'après la formule des réseaux,

$$\sin 0 - \sin i_0 = 2n\lambda_0 \quad \text{d'où} \quad i_0 = -\arcsin(2n\lambda_0) = -30^\circ.$$

**2** En linéarisant la formule des réseaux, on obtient

$$\sin i - \sin i_0 = 2n(\lambda_0 + \delta\lambda) \quad \text{d'où} \quad i + 2n\lambda_0 = 2n\lambda_0 + 2n\delta\lambda$$

On en déduit donc

$$i = 2n\delta\lambda.$$

La dispersion angulaire est donc égale à  $2n = 1 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{mm}^{-1} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{nm}^{-1}$ .

**3** En raisonnant sur le rayon passant par le centre optique de la lentille, qui est non dévié, on en déduit que les rayons qui convergent aux deux extrémités de la fente de sortie forment un angle

$$\pm i_{\text{lim}} = \pm \frac{d/2}{f'}$$

avec l'axe optique du montage. À partir de la question précédente, on en déduit les longueurs d'onde correspondantes,

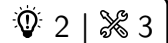
$$\lambda_{\text{lim}} = \lambda_0 \pm \frac{i_{\text{lim}}}{2n} \quad \text{soit} \quad \lambda_{\text{lim}} = \lambda_0 \pm \frac{d}{4nf'}.$$

La résolution du monochromateur vaut donc

$$\Delta\lambda = \frac{d}{2nf'}.$$

**4** Minimiser  $\Delta\lambda$  demande de choisir  $d$  faible ... mais une fente trop étroite laisse passer peu de rayons, et le faisceau de sortie est peu lumineux.

**5** De même, minimiser  $\Delta\lambda$  demande de choisir  $f'$  élevée.

**Exercice 9 : Réseau linéaire d'antennes**

▷ Interférences à  $N$  ondes.

1 Raisonons sur la figure 8 pour calculer la différence de marche. Si la source était en  $M$ , alors, d'après le théorème de Malus,  $H$  et  $S_0$  appartiendraient au même plan d'onde. Avec le principe de retour inverse, on en déduit

$$(S_0M) = (HM) \quad \text{d'où} \quad \delta = (S_1H) + (HM) - (S_0M) = (S_1H).$$

Par trigonométrie dans le triangle  $S_0S_1H$ , il vient

$$\delta = d \sin \theta \quad \text{d'où} \quad \boxed{\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta.}$$

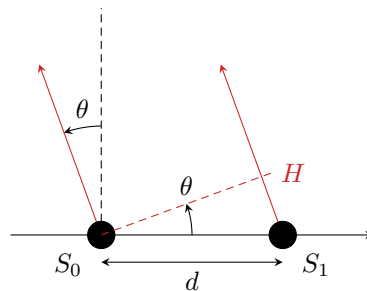


Figure 8 – Zoom sur les deux premières antennes.

Comme les antennes sont régulièrement espacées, les déphasages sont simplement des multiples de  $\phi$ , soit

$$\phi_n = \frac{2\pi nd}{\lambda} \sin \theta.$$

Pour comprendre ce résultat, on peut voir que pour la source  $S_n$  l'hypoténuse du triangle servant à exprimer  $\delta_n$  vaudrait  $nd$ .

2 D'après le principe de superposition,

$$s(M, t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n(M, t) = \sum_{n=0}^{N-1} A e^{i(\omega t - n\phi)} = A e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-in\phi}.$$

On reconnaît alors une somme géométrique à  $N$  termes de raison  $e^{-i\phi}$ , ce qui permet d'écrire

$$s(M, t) = A e^{i\omega t} \frac{1 - e^{-iN\phi}}{1 - e^{-i\phi}} = A e^{i\omega t} \frac{e^{-iN\phi/2}}{e^{-i\phi/2}} \frac{e^{iN\phi/2} - e^{-iN\phi/2}}{e^{i\phi/2} - e^{-i\phi/2}}$$

ce qui conduit bien au résultat donné

$$s(M, t) = A e^{i\omega t} \frac{e^{-iN\phi/2}}{e^{-i\phi/2}} \frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)}.$$

On en déduit l'intensité,

$$\boxed{I(M) = |s(M, t)|^2 = A^2 \frac{\sin^2(N\phi/2)}{\sin^2(\phi/2)}.$$

3 Les maxima d'intensité se trouvent aux angles  $\theta_m$  tels que

$$\frac{\phi}{2} = m\pi \quad \text{soit} \quad \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta_m = m\pi \quad \text{d'où} \quad \boxed{\theta_m = \arcsin \frac{m\lambda}{d}.$$

La valeur  $m = 0$  donnera toujours un maximum en  $\theta_m = 0$ , c'est-à-dire dans la direction normale au réseau. Pour qu'il soit unique, il faut que le maximum  $m = 1$  n'existe pas, ce qui est le cas si  $\lambda/d > 1$ , car un sinus est forcément inférieur à 1. Ainsi, le réseau d'antennes ne produit qu'un seul maximum dès que

$$\boxed{d \leq \lambda.}$$

4 En utilisant la donnée, l'intensité au niveau d'un maximum vaut

$$I_{\max} = N^2 A^2.$$

La première annulation d'intensité de part et d'autre du maximum central a lieu pour

$$\frac{N\phi}{2} = \pm\pi \quad \text{soit} \quad \frac{N\pi d}{\lambda} \sin\theta_{\pm} = \pm\pi \quad \text{d'où} \quad \theta_{\pm} = \arcsin \frac{\lambda}{Nd} = \arcsin \frac{2}{N}.$$

On en déduit la largeur angulaire,

$$\Delta\theta = 2 \arcsin \frac{2}{N},$$

qui est d'autant plus petite que  $N$  est élevé. Ainsi, augmenter le nombre d'antennes du réseau permet d'avoir une **intensité maximale plus élevée** ( $I_{\max} \propto N^2$ ) et des **maxima plus étroits** ( $\Delta\theta \propto 1/N$  dès que  $N$  est assez grand pour faire un développement limité de l'arcsinus).

5 Les calculs sont en tous points identiques, en remplaçant  $\phi$  par  $\phi + \psi$ . Les maxima d'intensité se trouvent donc dans les directions  $\theta$  telles que

$$\frac{\phi + \psi}{2} = m\pi \quad \text{soit} \quad \frac{\pi d}{\lambda} \sin\theta_m + \frac{\psi}{2} = m\pi \quad \text{et} \quad \sin\theta_m = \arcsin \left( \frac{m\lambda}{d} - \frac{\psi}{2} \right).$$

En supposant la distance entre antennes telle que seul  $m = 0$  donne un maximum visible, celui-ci se trouve à l'angle

$$\theta_{\max} = -\arcsin \frac{\psi}{2}.$$

Modifier le déphasage  $\psi$  permet donc bien de contrôler la position du maximum d'intensité.

### Exercice 10 : Étalonage d'un réseau

oral Mines Télécom MP | 💡 3 | ✂ 2



- ▷ Résultats expérimentaux ;
- ▷ Réseau optique.

1 La formule des réseaux est une condition d'interférences constructives entre toutes les ondes diffractées par tous les motifs du réseau. Avec les notations du cours,

$$\sin\theta_p - \sin\theta_0 = \frac{p\lambda}{a},$$

où  $a$  est le pas du réseau et  $\theta$  est mesuré par rapport à la normale au réseau.

2 L'angle  $\theta$  est compté par rapport à la normale au réseau, alors que manifestement l'angle  $\alpha$  donné par l'énoncé est compté par rapport à une référence arbitraire : on a  $\theta = \alpha - \varphi$ . Si le réseau est éclairé en incidence normale ( $\theta_p = 0$ ) alors  $\theta_p = -\theta_{-p}$  donc

$$\theta_p + \theta_{-p} = 0 = \alpha_p + \alpha_{-p} - 2\varphi \quad \text{d'où} \quad \varphi = \frac{\alpha_p + \alpha_{-p}}{2}.$$

Avec les valeurs de l'énoncé,

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_{-1}}{2} = \frac{42 + \frac{48}{60} + 77 + \frac{20}{60}}{2} = 59,98^\circ \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_2 + \alpha_{-2}}{2} = \frac{23 + \frac{23}{60} + 96 + \frac{40}{60}}{2} = 60,02^\circ$$

ce qui tout à fait compatible avec l'hypothèse d'incidence normale.

3 D'après la formule des réseaux en incidence normale,

$$\sin\theta_p = \sin(\alpha_p - \varphi) = p \frac{\lambda}{a},$$

d'où on déduit

$$a = \frac{p\lambda}{\sin(\alpha_p - \varphi)}.$$

En prenant par exemple  $p = 2$ , on trouve

$$a = 1,45 \mu\text{m} \quad \text{soit} \quad n = \frac{1}{a} = 686 \text{ traits par millimètre.}$$

Prendre un seul point serait une mauvaise idée du point de vue expérimental : il faut bien sûr passer par une régression linéaire, par exemple  $p\lambda$  en fonction de  $\sin(\alpha_p - \varphi)$  qui donne une droite de pente  $a$ .

4 D'après la formule des réseaux en incidence normale,

$$\frac{\sin \theta'_p}{\sin \theta_p} = \frac{\lambda'}{\lambda} \quad \text{d'où} \quad \lambda' = \frac{\sin(\alpha'_2 - \varphi)}{\sin(\alpha_2 - \varphi)} \lambda = 546 \text{ nm}$$