BLAISE PASCAL
PT 2023-2024

Fiche résumé 12 – Électromagnétisme

Champ électrostatique
Théorème de Gauss

I - Distributions de charge

- **Descriptions mésoscopiques :**
  - ▷ Volumique : $\mathrm{d}Q = \rho(M)\,\mathrm{d}\tau$ avec $\mathrm{d}\tau$ volume méso centré en M
  - ▷ Surfacique : $\mathrm{d}Q = \sigma(M)\,\mathrm{d}S$.
  - ▷ Linéique : $\mathrm{d}Q = \lambda(M)\,\mathrm{d}\ell$.

- **Pertinence des modélisations surfacique et linéique :**
  - ▷ valable si observation à grande distance ;
  - ▷ donne des divergences non-physiques à faible distance.

II - Symétries et invariances

- **Premières propriétés du champ E :** définition à partir de la force de Coulomb.

▷ champ créé par une charge ponctuelle q située en O : $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\,\vec{e}_r$

▷ théorème de superposition : champ créé par plusieurs charges = somme des champs créés par chaque charge.

- **Plan de symétrie de la distribution :**

▷ En un point M_s appartenant à un plan Π_s, $\vec{E}(M_\mathrm{s})$ est inclus dans le plan Π_s ;

▷ En deux points M et M' symétriques par rapport à un plan Π_s, $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ sont eux-mêmes symétriques
→ même composante parallèle au plan, composante perpendiculaire opposée.

▷ Si la distribution est plane, alors ce plan est un plan de symétrie.

- **Plan d'anti-symétrie de la distribution :** ne se rencontre presque jamais dans les exercices niveau PT.

▷ En un point M_a appartenant à un plan Π_a, $\vec{E}(M_\mathrm{a})$ est perpendiculaire au plan Π_a ;

▷ En deux points M et M' symétriques par rapport à un plan Π_a, $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ sont eux-mêmes anti-symétriques
→ même composante perpendiculaire au plan, composante parallèle opposée.

- **Invariances de la distribution :**

▷ invariance par translation = indépendance de $||\vec{E}||$ par rapport aux variables cartésiennes ;

▷ invariance par rotation = indépendance de $||\vec{E}||$ par rapport aux variables angulaires.

III - Théorème de Gauss

- **Équation de Maxwell-Gauss et théorème de Gauss :**

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \underset{\text{Green-Ostrogradski}}{\Longleftrightarrow} \quad \oiint_{\mathrm{SG}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_\mathrm{int}}{\varepsilon_0}\,.}$$

- **Analogies gravitationnelles :** se retrouvent en identifiant les expressions des forces.

$\vec{F}_{\mathrm{C},P\to M} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_0 q}{r^2}\,\vec{e}_r = q\vec{E}(M)$	$\vec{F}_{\mathrm{g},P\to M} = -\mathcal{G}\dfrac{m_0 m}{r^2}\,\vec{e}_r = m\vec{G}(M)$
Charge électrique q Densité volumique de charge ρ	Masse m Masse volumique μ
$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ $\quad\varepsilon_0$	$-\mathcal{G}$ $\quad -\dfrac{1}{4\pi\mathcal{G}}$
$\oiint_{\mathrm{SG}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{Q_\mathrm{int}}{\varepsilon_0}$	$\oiint_{\mathrm{SG}} \vec{G}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -4\pi\,\mathcal{G}\,M_\mathrm{int}$

- **Calculer un champ avec le théorème de Gauss :**
  1. Schéma + choix des **coordonnées** ;
  2. **Symétries** de la distribution :
     - ▷ donne les composantes non-nulles de $\vec{E}$ (mais pas les variables dont il dépend !)
     - ▷ seuls les plans de symétrie passant par le point M sont intéressants.
  3. **Invariances** de la distribution :
     - ▷ donne les variables dont dépend le champ (mais pas ses composantes non nulles !)
  4. Construction de la **surface de Gauss** :
     - ▷ surface sur laquelle le champ est uniforme (p.ex. à $r = \text{cte}$ si $\vec{E}$ ne dépend que de r) ;
     - ▷ éventuellement à compléter par des morceaux sur lesquels le flux est nul car $\vec{E} \perp \vec{n}$ ou en utilisant astucieusement les symétries (géométrie plane).
  5. Calcul du **flux** :
     - ▷ disjonction des cas éventuelle selon le signe de l'abscisse de M (géométrie plane).
  6. Calcul de la **charge intérieure** :
     - ▷ disjonction des cas éventuelle selon que M est à l'intérieur ou à l'extérieur de la distribution.
  7. **Conclusion**, sans oublier que $\vec{E}$ est un vecteur.

- **Exemple de la sphère chargée :** à l'extérieur de toute distribution à symétrie sphérique de charge totale Q_{tot}, le champ électrostatique est identique à celui qui serait créé par une charge ponctuelle Q_{tot} qui serait placée au centre. Résultat analogue pour la gravitation.

- **Exemple du plan chargé :**
  - ▷ Surface de Gauss symétrique par rapport au plan de la distribution :
$$E_z(z' = -z) = -E_z(z)\,;$$
  - ▷ Hypothèse sur le signe de z pour pouvoir exprimer le flux ;
  - ▷ Utiliser la symétrie pour conclure sur le cas $z < 0$;
  - ▷ Résultat final : à connaître !
$$\boxed{\vec{E}(z) = \operatorname{sgn}(z)\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{e}_z\,.}$$

- **Relation de passage :**
  - ▷ le champ électrostatique est partout continu dans le cas d'une distribution volumique ;
  - ▷ mais sa composante normale est discontinue de part et d'autre d'une distribution surfacique.

- **Pertinence des modélisations infinies :** p.ex. un cylindre chargé peut être modélisé par un cylindre infini
  - ▷ si hauteur $h \gg$ rayon R ($\rightsquigarrow$ condition sur la distribution elle-même) ;
  - ▷ à proximité de la distribution, à distance $r \ll h$ ($\rightsquigarrow$ condition sur le point d'observation) ;
  - ▷ suffisamment loin des bords de la distribution $z \ll h$ ($\rightsquigarrow$ condition sur le point d'observation).

IV - Densité volumique d'énergie électrostatique

- **Énergie stockée** dans un volume mésoscopique $\mathrm{d}\tau$ centré sur le point M :
$$\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{e} = w_\mathrm{e}(M)\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{avec} \qquad w_\mathrm{e}(M) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\,||\vec{E}(M)||^2\,.$$