

Champ électrostatique

Théorème de Gauss

Plan du cours

I Distributions de charge	2
I.A Rappels sur la charge électrique	2
I.B Densité volumique de charge	3
I.C Distributions surfaciques et linéiques	4
II Des propriétés des distributions de charge à celles du champ électrostatique	5
II.A Définition et premières propriétés du champ électrostatique	5
II.B Symétries de la distribution de charges, direction du champ électrostatique	6
II.C Invariances de la distribution de charges, variables du champ électrostatique	9
III Théorème de Gauss	10
III.A Démonstration à partir de l'équation de Maxwell-Gauss	10
III.B Analogie gravitationnelle	12
III.C Exemple : champ électrostatique créé par une sphère uniformément chargée.	13
III.D Exemple : champ électrostatique créé par un cylindre uniformément chargé	16
III.E Exemple : champ créé par une couche épaisse de charge non uniforme	19
III.F Exemple : champ électrostatique créé par un plan uniformément chargé	22
IV Densité volumique d'énergie électrostatique	24

Au programme

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 1 « Électrostatique ».

Les notions abordées dans cette partie sont centrées sur les distributions de charges, le champ [et le potentiel¹]. Pour le champ électrique [et le potentiel], on se limite aux expressions explicites dans le cas de charges ponctuelles et sous forme intégrale dans le cas de distributions continues. L'accent est mis sur les propriétés intégrales du champ et sur le théorème de Gauss pour des situations présentant un haut degré de symétrie. Les analogies avec la gravitation sont centrées sur l'application du théorème de Gauss.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Loi de Coulomb. Champ électrostatique. Principe de superposition.	Exprimer le champ électrostatique créé par une distribution discrète de charges. Citer quelques ordres de grandeur de champs électrostatiques.
Distributions continues de charges : volumique, surfacique, linéique.	Décomposer une distribution en des distributions plus simples dans le but de calculer un champ électrostatique par superposition. Choisir un type de distribution continue adaptée à la situation modélisée. Justifier qualitativement le choix d'une modélisation d'une distribution de charges par une distribution infinie. Évaluer la charge totale d'une distribution continue dans des situations à géométries simples.

1. Abordé au chapitre suivant

Notions et contenus	Capacités exigibles
Symétries et invariances du champ électrostatique.	Identifier les plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de charges. Identifier les invariances d'une distribution de charges. Exploiter les symétries et les invariances d'une distribution de charges pour caractériser le champ électrostatique créé.
Flux du champ électrostatique. Théorème de Gauss.	Utiliser le théorème de Gauss pour déterminer le champ électrostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie.
Systèmes modèles de la sphère, du cylindre infini et du plan infini.	Établir les expressions des champs électrostatiques créés en tout point de l'espace par une sphère uniformément chargée en volume, par un cylindre infini uniformément chargé en volume et par un plan infini uniformément chargé en surface. Établir et exploiter le fait qu'à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique, le champ électrostatique créé est le même que celui d'une charge ponctuelle concentrant la charge totale et placée au centre de la distribution.
Champ de gravitation.	Utiliser le théorème de Gauss dans le cas de la gravitation.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Ces cinq dernières années au concours

- ▷ Écrit : épreuve A 2019 et 2021 ; épreuve de modélisation 2020.
- ▷ Oral : souvent.



On appelle **champ électrostatique** un champ électrique indépendant du temps.

Synonyme : stationnaire

... qu'on ne confondra pas avec « uniforme », qui signifie « indépendant de l'espace ».

I - Distributions de charge

Les sources de champ électrostatique sont les charges électriques, qu'elles soient immobiles ou en mouvement.

I.A - Rappels sur la charge électrique

Au niveau microscopique, les particules chargées sont appelées **porteurs de charge**. La charge électrique est quantifiée : la charge de tout porteur de charge est un multiple de la charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Exemples de porteurs de charge : *électrons et protons dans les atomes ;
cations et anions dans les électrolytes ;
électrons de conduction et cations dans un métal.*

La charge électrique est une grandeur **additive** : un système $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ porte une charge $Q = Q_1 + Q_2$. C'est également une grandeur **conservative** : elle ne peut être ni créée ni détruite, mais seulement transportée d'un point à un autre.

Remarque culturelle : Certains processus de physique nucléaire se font avec création d'une paire particule et anti-particule, par exemple électron et positron, le positron ayant une charge opposée à celle de l'électron, mais la charge électrique totale est conservée lors de tels processus. La conservation de la charge est d'ailleurs l'un des postulats fondamentaux de la physique des particules, au même titre que la conservation de l'énergie.



La matière est globalement neutre mais ce n'est pas forcément le cas localement, même à l'échelle macroscopique : lors des expériences d'électrisation, un grand nombre de charges identiques sont localisées dans une même zone de l'espace. Cela peut donner des effets spectaculaires, comme la célèbre expérience des cheveux dressés sur la tête du Palais de la Découverte : le spectateur-cobaye est placé sur l'armature d'un condensateur géant, si bien que tout son corps acquiert une charge lorsqu'une tension est appliquée ... et les cheveux se repoussent les uns les autres.

Ordre de grandeur : lorsqu'un condensateur est soumis à une tension, des électrons se déplacent d'une armature à l'autre par l'intermédiaire du circuit électrique, si bien que les deux armatures portent des charges opposées.

↪ nombre d'électrons déplacés lorsqu'un condensateur de capacité $C = 16 \text{ nF}$ est soumis à une tension de 1 V :

$$q = Cu = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ C} \text{ ce qui donne } N_e = \frac{q}{e} = 10^{11} \text{ électrons}$$

Espace 2

Conséquence : décrire la façon dont les charges sont réparties dans l'espace par une approche seulement microscopique est illusoire.

↪ étudier des champs électrostatiques à l'échelle macroscopique nécessite de décrire les distributions de charge électrique de manière continue à l'échelle mésoscopique.

I.B - Densité volumique de charge



La charge dQ contenue dans un volume mésoscopique $d\tau$ d'une distribution de charge est décrite par la **densité volumique de charge** ou **charge volumique** ρ

$$dQ = \rho(M) d\tau.$$



↪ charge totale contenue dans un volume \mathcal{V} :

$$Q = \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\tau.$$

Espace 3

Unité : ρ s'exprime en $\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$

Espace 4

Remarque : la densité volumique de charge est l'exact analogue de la masse volumique ... d'où la dénomination de « charge volumique ».

La densité volumique de charge est reliée à la **densité volumique de porteurs de charge** n .

n = nombre de porteurs de charge par unité de volume, s'exprime en m^{-3}

Espace 5

▷ si un seul type de porteurs (p.ex. faisceau d'ions tous identiques de charge q) : $\rho = nq$

Espace 6

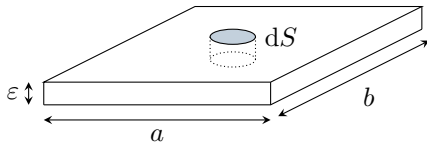
▷ si plusieurs types de porteurs de charge : par sommation, $\rho = \sum_i n_i q_i$.

I.C - Distributions surfaciques et linéiques

Toutes les distributions de charge sont fondamentalement volumiques, c'est-à-dire que les charges sont réparties en trois dimensions. Il existe néanmoins des géométries particulières dans lesquelles une ou deux dimensions sont négligeables devant les autres ... ou des modélisations qui mènent à des distributions plus « radicales ».

• Distribution surfacique

Un exemple pour comprendre : cas d'une plaque de côtés a et b et de hauteur $\varepsilon \ll a, b$, chargée en volume avec une densité uniforme ρ .



Charge électrique portée par un volume de plaque de surface infinitésimale dS :

$$dQ = \rho \times \varepsilon dS = \sigma dS$$

Espace 7

Généralisation :

La charge dQ contenue sur une surface mésoscopique dS d'une distribution surfacique de charge est décrite par la **densité surfacique de charge** ou **charge surfacique** σ

$$dQ = \sigma dS.$$

Unité : σ s'exprime en $C \cdot m^{-2}$.

Espace 8

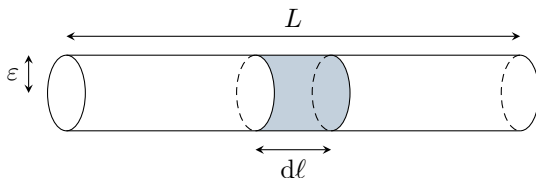
Charge totale portée par la plaque :

$$Q = \iint_{\text{plaque}} \sigma dS.$$

Espace 9

• Distribution linéique

Un exemple pour comprendre : Cas d'un fil de longueur L et de rayon $\varepsilon \ll L$, chargé en volume avec une densité uniforme ρ .



Charge électrique portée par un élément de longueur $d\ell$ du fil :

$$dQ = \rho \times \pi \varepsilon^2 d\ell = \lambda d\ell$$

Espace 10

Généralisation :

La charge dQ contenue sur une longueur mésoscopique $d\ell$ d'une distribution linéique de charge est décrite par la **densité linéique de charge** ou **charge linéique** λ

$$dQ = \lambda d\ell.$$

Unité : λ s'exprime en $C \cdot m^{-1}$.

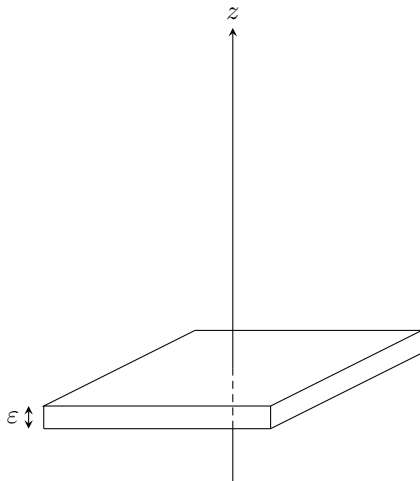
Espace 11

Charge totale portée par le fil :

$$Q = \int_{\text{fil}} \lambda d\ell.$$

Espace 12

- Quand peut-on modéliser une distribution réelle par une distribution surfacique ou linéique ?



Les deux faces de la plaque doivent pouvoir être quasi-confondues : outre $\varepsilon \ll a, b$ cela impose aussi d'avoir $z \gg \varepsilon$. Les modèles surfacique et linéique sont donc valables seulement à grande distance des sources.

Espace 13

Remarque pour la suite : il n'est donc pas surprenant que les modèles linéiques et surfaciques donnent des anomalies mathématiques non physiques (divergence) à faible distance.

II - Des propriétés des distributions de charge à celles du champ électrostatique

II.A - Définition et premières propriétés du champ électrostatique

Le champ électrostatique est fondamentalement défini à partir de la force de Coulomb (force de Lorentz électrique).

Par définition du champ électrostatique, une particule-test de charge q_0 maintenue immobile en un point M subit de la part des autres particules chargées une force égale à

$$\vec{F}_{\text{elec}} = q_0 \vec{E}(M) \quad \text{soit} \quad \vec{E}(M) = \frac{\vec{F}_{\text{elec}}}{q_0}.$$

- Champ créé par une charge ponctuelle

Force de Coulomb exercée par une particule de charge q_1 située en P_1 sur notre particule test q_0 située en M :

- $M(q_0)$

Faire le dessin pour des charges de même signe et de signe opposé

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_1}{P_1 M^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_1}{P_1 M^3} \overrightarrow{P_1 M}$$

•
 $P_1(q_1)$

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ est la **permittivité diélectrique du vide**, l'une des deux constantes fondamentales de l'électromagnétisme.

Remarque culturelle : Cette expression a été déterminée par Charles Augustin Coulomb à la fin du XVIII^e siècle officiellement « expérimentalement » ... mais surtout par analogie avec la gravitation !

Champ électrique créé par la particule q_1 :

$$\vec{E}_1(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{P_1 M^3} \overrightarrow{P_1 M}$$

Espace 15

Écriture plus naturelle dans ce cas particulier : coordonnées sphériques d'origine $O = P_1$.

$$\vec{E}_1(M) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Espace 16

• Théorème de superposition

Si on a plusieurs charges q_n avec $1 \leq n \leq N$, alors la particule test subit une force résultante

$$\vec{F}_{\rightarrow 0} = \sum_n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_n}{P_n M^3} \overrightarrow{P_n M}$$

où on peut factoriser par q_0 pour obtenir

$$\vec{F}_{\rightarrow 0} = q_0 \sum_n \vec{E}_n(M) \stackrel{\text{déf.}}{=} q_0 \vec{E}_{\text{tot}}(M).$$

Théorème de superposition :

Le champ électrique total créé par un ensemble de charges est la somme des champs créés par chaque charge prise individuellement.

Remarque : Dans cette approche, le principe de superposition est déduit du postulat d'additivité des forces. D'un point de vue plus théorique, il vient de (ou est relié à) la linéarité des équations fondamentales de l'électromagnétisme, les équations de Maxwell, vis-à-vis des sources de champ.

Limitation : une telle méthode fonctionne en principe mais est inutilisable en pratique, car le nombre de particules chargées qu'il faudrait considérer pour calculer un champ à l'échelle macroscopique est beaucoup trop grand.

↪ la suite du cours a pour but d'apprendre à calculer de manière plus efficace le champ créé par une distribution de charge connue, c'est-à-dire de déterminer sa direction, son sens et sa norme.

II.B - Symétries de la distribution de charges, direction du champ électrostatique

II.B.1 - Principe de Curie

Le principe de Curie est un principe de portée très générale, qui apporte souvent des considérations qualitatives intéressantes. Il est applicable lorsqu'un phénomène physique peut s'interpréter en termes de cause et conséquence.

Les symétries présentes dans les causes doivent se retrouver dans les conséquences.

↪ ici, les symétries présentes dans la distribution de charge doivent se retrouver sur le champ électrique.

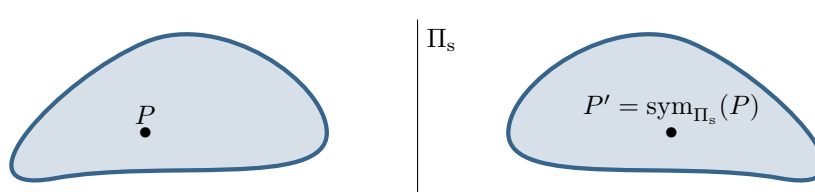
Espace 17

Remarque : C'est ce même principe que nous avons utilisé pour anticiper la direction des forces de pression sur une surface macroscopique.

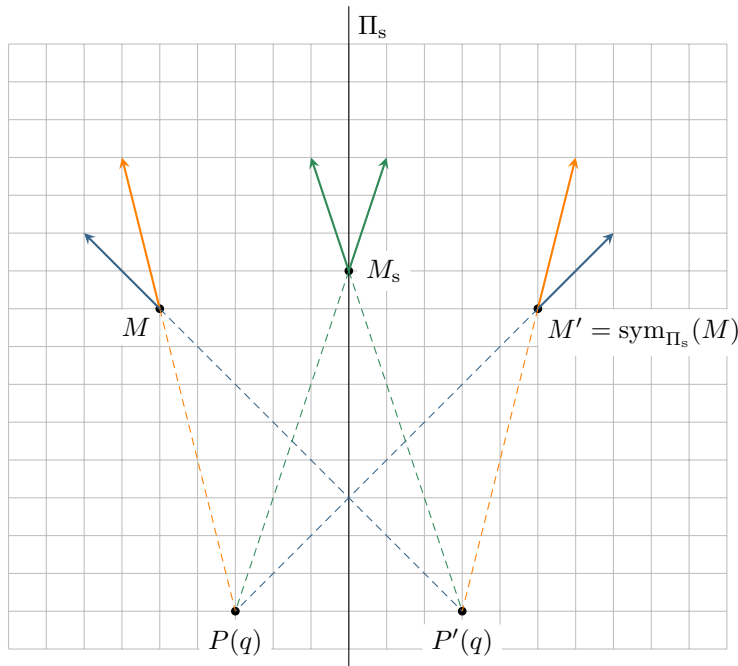
II.B.2 - Effet d'un plan de symétrie de la distribution de charges

Une distribution de charge possède un **plan de symétrie** Π_s lorsque les (densités de) charges en tous points P et P' symétriques par rapport à Π_s sont égales,

$$\rho(P') = \rho(P).$$



Un exemple pour comprendre : Construisons pas à pas le champ créé par deux charges ponctuelles identiques q situées en P et P' à partir des champs « individuels ».



Les champs tracés d'une même couleur ont la même norme (mais pas la même direction) car la distance est la même. Par exemple, on a par symétrie

$$PM = P'M'$$

Or la loi de Coulomb indique que la norme du champ créé par une charge ponctuelle ne dépend que de la distance à cette charge. Ainsi,

$$\|\vec{E}_P(M)\| = \|\vec{E}_{P'}(M')\|$$

Il en est de même pour les couples de points P, M' et P', M ainsi que P, M_s et P', M_s .

Généralisation :

Considérons une distribution de charges possédant un plan de symétrie Π_s .
 Les champs électrostatiques $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ en deux points M et M' symétriques par rapport au plan Π_s sont eux-mêmes symétriques par rapport à Π_s , c'est-à-dire

$$\vec{E}(M') = +\text{sym}_{\Pi_s}(\vec{E}(M)) \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \vec{E}_\perp(M') = -\vec{E}_\perp(M) \\ \vec{E}_\parallel(M') = +\vec{E}_\parallel(M) \end{cases}$$

Le champ électrostatique $\vec{E}(M_s)$ en un point M_s appartenant au plan Π_s est inclus dans ce plan.

(R!)

Interprétation : en M_s , les propriétés de symétries imposent $\vec{E}_\perp(M_s) = -\vec{E}_\perp(M_s)$ donc $\vec{E}_\perp(M_s) = \vec{0}$.

Cas particulier important :

Si la distribution de charge est plane, alors ce plan est un plan de symétrie.

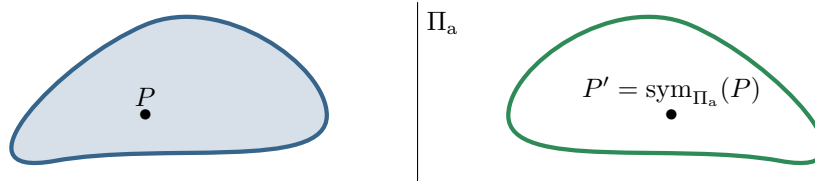
En effet : notons Π_0 le plan de la distribution.

- ▷ pour deux points P et P' symétriques par rapport à Π_0 , on a bien $\rho(P) = \rho(P') = 0$;
- ▷ un point P_0 appartenant au plan Π_0 est son propre symétrique, il est donc évident que $\rho(P_0) = \rho(P_0)$!

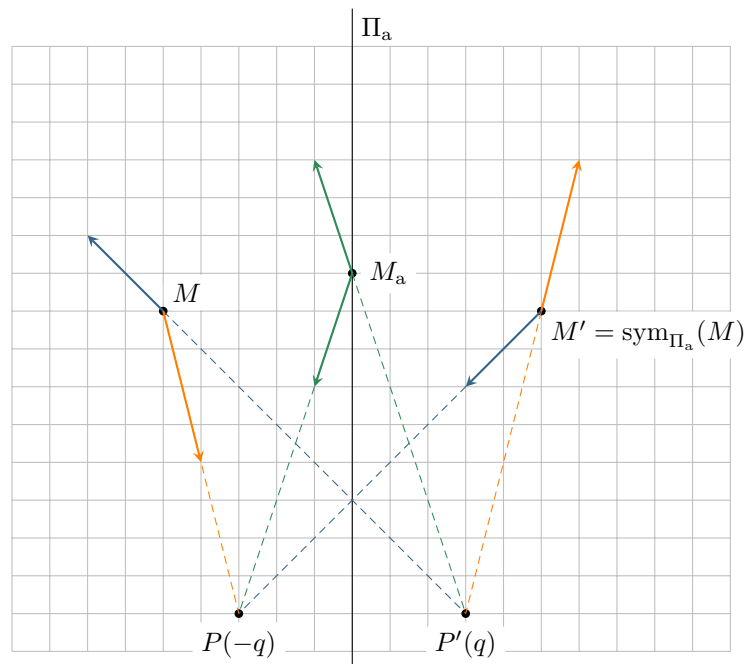
II.B.3 - Effet d'un plan d'anti-symétrie de la distribution de charges

Une distribution de charge possède un **plan d'anti-symétrie** Π_a lorsque les (densités de) charges en tous points P et P' symétriques par rapport à Π_a sont opposées,

$$\rho(P') = -\rho(P).$$



Un exemple pour comprendre : reprenons l'exemple précédent en supposant cette fois les charges opposées.



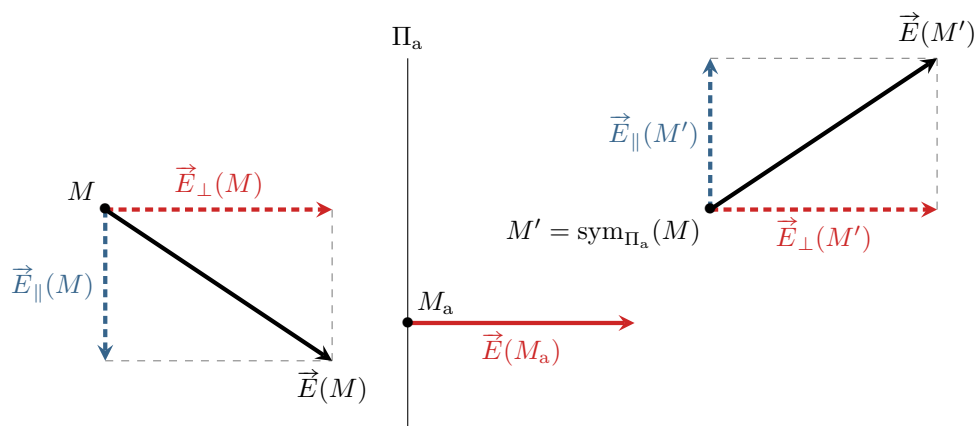
Généralisation :

Considérons une distribution de charges possédant un plan d'antisymétrie Π_a .

Les champs électrostatiques $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ en deux points M et M' symétriques par rapport au plan Π_a sont anti-symétriques par rapport à Π_a , c'est-à-dire

$$\vec{E}(M') = -\text{sym}_{\Pi_a}(\vec{E}(M)) \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \vec{E}_{\perp}(M') = \vec{E}_{\perp}(M) \\ \vec{E}_{\parallel}(M') = -\vec{E}_{\parallel}(M) \end{cases}$$

Le champ électrostatique $\vec{E}(M_a)$ en un point M_a appartenant au plan Π_a est orthogonal à ce plan.



Interprétation : de même que précédemment, les propriétés de symétries imposent qu'au point M_a on ait

$$\vec{E}_{\parallel}(M_a) = -\vec{E}_{\parallel}(M_a) \quad \text{donc} \quad \vec{E}_{\parallel}(M_a) = \vec{0}.$$

Remarque : On pourra retenir que l'anti-symétrique est l'opposé du symétrique ... cependant le plus simple (et le plus utile pour les calculs avec le théorème de Gauss qui suivront) est de raisonner en termes de composantes parallèles ou normales au plan d'(anti)-symétrie.

II.B.4 - Distribution à haut degré de symétrie



Une distribution de charge est dite à **haut degré de symétrie** si la direction du champ électrostatique en tout point de l'espace peut être déterminée uniquement par l'étude des symétries.

Les distributions à haut degré de symétrie sont a priori des exceptions! Toutefois, de nombreuses applications de l'électrostatique (capteurs, condensateurs, etc.) les exploitent ... si bien que presque toutes les distributions que nous étudierons cette année seront à haut degré de symétrie.

II.C - Invariances de la distribution de charges, variables du champ électrostatique

• Invariance par translation le long d'un axe



Une distribution de charge est dite **invariante par translation le long d'un axe** (Oz) si pour tout point P' image de P par translation de vecteur directeur \vec{e}_z on a

$$\rho(P') = \rho(P).$$

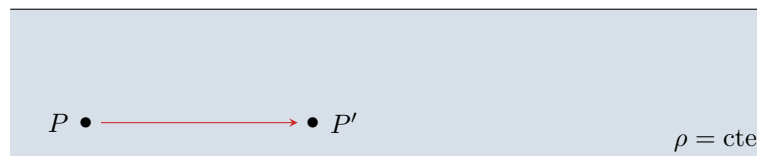
Un exemple pour comprendre : plaque infinie dans la direction (Oz).

$$M_1(x, y, z_1)$$

×

$$M_2(x, y, z_2)$$

×



Traduction de l'invariance sur ρ :

$\rho(P)$ indépendant de la coordonnée z du point P .

Espace 19

Conséquence sur le champ électrostatique :

La distribution étant invariante par translation suivant \vec{e}_z , elle est identique vue des points M_1 et M_2 . On en déduit que le champ créé ne dépend pas de leur coordonnée z .

Espace 20

Généralisation :



Le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé en un point M par une distribution de charge invariante par translation le long d'un axe ne dépend pas de la coordonnée du point M sur cet axe.



- **Invariance par rotation autour d'un axe**



Une distribution de charge est dite **invariante par rotation autour d'un axe** (Oz) si pour tout point P' image de P par rotation d'axe \vec{e}_z on a

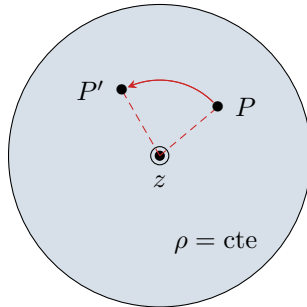
$$\rho(P') = \rho(P).$$

Un exemple pour comprendre : cylindre infini dans la direction (Oz).

$$M_1(r, \theta_1, z) \times$$

Traduction de l'invariance sur ρ :

$\rho(P)$ indépendant de la coordonnée angulaire θ du point P .



Conséquence sur le champ électrostatique :

Espace 21

La distribution étant invariante par rotation autour de l'axe (Oz), elle est identique vue des points M_1 et M_2 . On en déduit que la norme du champ créé ne dépend pas de leur coordonnée θ (mais sa direction en dépend).

$$M_2(r, \theta_2, z) \times$$

Espace 22

Remarque : sur cet exemple, la distribution possède également une invariance par translation le long de l'axe (Oz) : le champ qu'elle crée ne dépend donc ni de θ ni de z , ou autrement dit il ne dépend que de la seule variable r .

Généralisation :

(R)



La norme du champ électrique $\vec{E}(M)$ créé en un point M par une distribution de charge invariante par rotation autour d'un axe ne dépend pas de la coordonnée angulaire θ du point M autour de cet axe.

III - Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss est un théorème qui permet un calcul relativement simple du champ électrostatique créé par des distributions à haut degré de symétrie. Il est toujours valable, mais inefficace, dans les autres cas.

III.A - Démonstration à partir de l'équation de Maxwell-Gauss

- **Introduction culturelle : les équations de Maxwell**



Les équations de Maxwell sont les équations fondamentales de l'électromagnétisme. Elles jouent un rôle analogue au principe fondamental de la dynamique en mécanique. En particulier, ce sont des principes : elles ne sont pas démontrables ... mais n'ont jamais été mises en défaut par les expériences.

Au nombre de quatre, elles portent sur la divergence et le rotationnel des champs \vec{E} et \vec{B} : ce sont donc des équations locales, formulées en tout point de l'espace. Elles permettent (au moins dans le principe) de déterminer les champs connaissant la distribution des sources de champ (charges pour \vec{E} , courant et aimantation pour \vec{B}).

James Maxwell a énoncé ces équations en 1865 en procédant à une synthèse de diverses lois expérimentales connues à l'époque, et en comprenant qu'il y manquait un terme ... le terme en question a permis de prédire l'existence des ondes électromagnétiques avant de les observer, ce qui est particulièrement rare dans l'histoire de la physique. On peut également noter l'exploit mathématique de Maxwell : l'analyse vectorielle, et donc les notions de divergence et rotationnel d'un champ, n'ont été formalisées qu'au tout début du XX^e siècle.

- **Équation de Maxwell-Gauss**

Équation de Maxwell-Gauss :

En tout point M de l'espace, $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Espace 23

avec $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ est la **permittivité diélectrique du vide**.

Elle est valable en régime stationnaire et en régime variable.

Rappel : en coordonnées cartésiennes (et seulement dans ces coordonnées), $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$

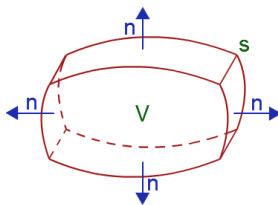
Espace 24

↪ l'équation de Maxwell-Gauss est donc une équation aux dérivées partielles sur les composantes du champ électrique.

Dans certains cas simples (haute symétrie + conditions aux limites connues), le champ électrique peut être déterminé directement par intégration de l'équation de Maxwell-Gauss.

- **De l'équation de Maxwell-Gauss au théorème de Gauss**

Théorème de Green-Ostrogradski :



Soit \mathcal{S} une surface fermée orientée vers l'extérieur délimitant un volume \mathcal{V} .
Pour tout champ vectoriel \vec{A} suffisamment régulier,

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\operatorname{div} \vec{A}) d\tau = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Démonstration du théorème de Gauss : Considérons une surface fermée \mathcal{S} de normale orientée vers l'extérieur : Une telle surface est usuellement nommée **surface de Gauss**.

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{E} dV \underset{\uparrow \text{GO}}{=} \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \underset{\uparrow \text{MG}}{=} \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dV = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

où Q_{int} est la charge contenue à l'intérieur de la surface de Gauss.

Espace 25

Théorème de Gauss :

Le flux du champ électrostatique sortant d'une surface de Gauss est relié à la charge contenue à l'intérieur de cette surface,

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}.$$

où le vecteur $d\vec{S}$ est orienté vers l'extérieur.

⚠️ ⚠️ ⚠️ **Attention !** La présence de Q_{int} ne doit pas faire croire que le champ n'est créé que par les charges à l'intérieur de la surface de contrôle : le champ est toujours créé par **la totalité** des charges. De même, il est faux de croire que la position des charges est indifférente tant qu'elles sont à l'intérieur ou à l'extérieur de la surface de Gauss. D'ailleurs, comme nous le verrons dans les exemples suivants, il y a besoin de connaître toutes les charges ... pour bien choisir la surface de Gauss.

III.B - Analogie gravitationnelle

La force de Coulomb et la force gravitationnelle présentent une écriture analogue : une particule P de charge q_1 (resp. masse m_1) exerce une force sur une particule test M de charge q_0 (resp. masse m_0) située en M qui s'écrit

$$\vec{F}_{C,1 \rightarrow 0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_1}{PM^3} \vec{PM} \quad \longleftrightarrow \quad \vec{F}_{g,1 \rightarrow 0} = -\mathcal{G} \frac{m_0 m_1}{PM^3} \vec{PM}$$

avec la constante de gravitation ou constante de Cavendish $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

L'analogie sur la force laisse supposer d'autres analogies entre les deux interactions. En particulier, on peut définir le **champ gravitationnel** $\vec{G}(M)$ par

$$\vec{F}_C = q_0 \vec{E}(M) \quad \longleftrightarrow \quad \vec{F}_g = m_0 \vec{G}(M).$$

Comme la loi de force est la même, le champ gravitationnel vérifie les mêmes propriétés de symétrie que le champ électrique ... mais évidemment comme une masse est toujours positive il n'y a pas de plan d'antisymétrie de la distribution de masse.

Par ailleurs, le champ gravitationnel vérifie un analogue du théorème de Gauss, en faisant correspondre les constantes :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \longleftrightarrow -\mathcal{G} \quad \text{donc} \quad \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \longleftrightarrow -4\pi\mathcal{G} M_{\text{int}}$$

M!

Espace 26

Théorème de Gauss gravitationnel :

Le flux sortant du champ gravitationnel au travers d'une surface de Gauss est relié à la masse contenue à l'intérieur de cette surface,

$$\oiint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi\mathcal{G} M_{\text{int}}.$$

Récapitulatif des analogies entre électrostatique et gravitation :

M

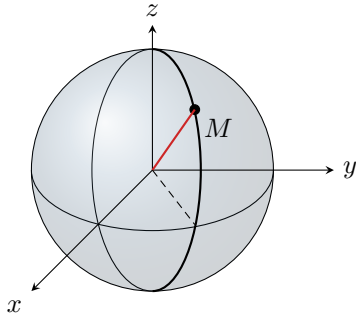
Électrostatique	Gravitation
Force de Coulomb : $\vec{F}_{C,1 \rightarrow 0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_1}{PM^3} \vec{PM} = q_0 \vec{E}(M)$	Force gravitationnelle : $\vec{F}_{g,1 \rightarrow 0} = -\mathcal{G} \frac{m_0 m_1}{PM^3} \vec{PM} = m_0 \vec{G}(M)$
Charge électrique : q_0, q_1 ρ densité volumique de charge	Masse : m_0, m_1 μ masse volumique
Permittivité diélectrique du vide ϵ_0 : $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ϵ_0	Constante de gravitation \mathcal{G} : $-\mathcal{G}$ $-\frac{1}{4\pi\mathcal{G}}$
Équation de Maxwell-Gauss : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Équation de Gauss gravitationnelle : $\text{div } \vec{G} = -4\pi\mathcal{G}\mu$
Théorème de Gauss : $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$	Théorème de Gauss gravitationnel : $\oiint \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi\mathcal{G} M_{\text{int}}$

III.C - Exemple : champ électrostatique créé par une sphère uniformément chargée

Application 1 : Champ électrostatique créé par une sphère uniformément chargée en volume

Considérons une sphère de centre O , de rayon R , chargée uniformément par une densité volumique de charge ρ_0 . Calculer le champ électrostatique \vec{E} qu'elle crée en tout point M de l'espace.

1 Choix du système de coordonnées



Définition des coordonnées sphériques :

- ▷ le **rayon** r est compté à partir du centre de la sphère ;
- ▷ la **colatitude** θ est comptée à partir de l'axe des pôles (et pas à partir du plan équatorial!) ;
- ▷ l'**azimuth** φ est compté à partir d'un méridien de référence.

On cherche donc le champ électrostatique sous la forme

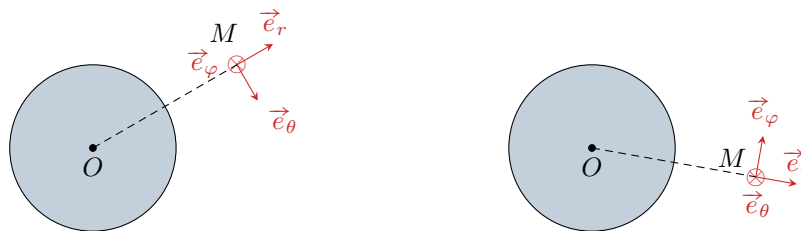
$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\varphi$$

2 Symétries de la distribution de charge



Les symétries de la distribution de charge (resp. de masse) permettent de déterminer la direction du champ électrostatique (resp. gravitationnel), mais n'apportent pas d'information sur les variables dont il dépend.

- ↪ s'il existe un plan de symétrie de la distribution de charge passant par M , alors $\vec{E}(M)$ est inclus dans ce plan.
- ↪ la distribution peut parfaitement admettre des plans de symétrie ne passant pas par M ... mais ils sont sans intérêt pour trouver la direction de $\vec{E}(M)$.



Identifier deux plans de symétrie pertinents pour cette distribution de charge, les représenter sur les deux schémas de la distribution, et en tirer les conséquences sur les composantes de \vec{E} .

Le plan $\Pi_{s1} = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de charge, donc $\vec{E}(M)$ est inclus dans ce plan, donc $E_\varphi(M) = 0$.

Le plan $\Pi_{s2} = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ est un plan de symétrie de la distribution de charge, donc $\vec{E}(M)$ est inclus dans ce plan, donc $E_\theta(M) = 0$.

Espace 27

Argument plus rapide : tout plan contenant O et M est plan de symétrie de la distribution de charge, donc $\vec{E}(M)$ doit être inclus dans chacun de ces plans, c'est-à-dire dans leur intersection ... qui se réduit à la droite (OM) . On en déduit que $\vec{E}(M)$ est colinéaire à cette droite, et donc qu'il est porté par \vec{e}_r .

Conclusion :

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r + \overbrace{E_\theta(r, \theta, \varphi)}^0 \vec{e}_\theta + \overbrace{E_\varphi(r, \theta, \varphi)}^0 \vec{e}_\varphi = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r.$$

3 Invariances de la distribution de charge

Q



Les invariances de la distribution de charge (resp. de masse) permettent de déterminer les variables dont dépend la norme du champ électrostatique (resp. gravitation), mais n'apportent pas d'information sur sa direction et son sens.

M!

✍ Identifier une transformation géométrique laissant invariante la distribution de charge, et en tirer les conséquences sur les variables dont dépend E_r .

La distribution est invariante par toute rotation autour du centre O , donc E_r est indépendant des variables angulaires.

Espace 28

🚫🚫🚫 **Attention !** Soyez précis pour décrire la transformation ! En particulier, la distribution **N'EST PAS** « invariante par rotation autour de \vec{e}_θ » : il suffit de regarder le schéma pour constater que ce n'est pas vrai, tourner autour de \vec{e}_θ change la façon dont la distribution est vue.

Conclusion :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r = E_r(r) \vec{e}_r.$$

4 Construction de la surface de Gauss

Q



Une bonne surface de Gauss est une surface fermée qui permet d'une part de calculer facilement le flux sortant, et d'autre part de le relier facilement au champ au point M .

↪ on cherche le champ électrostatique au point M , il faut donc forcément que la surface de Gauss passe par M .

↪ le calcul est particulièrement simple si $\vec{E} \cdot \vec{dS}$ prend la même valeur en tout point de la surface de Gauss ... dans l'idéal, \vec{E} doit donc être de norme constante et normal à la SG en tout point.

M!

✍ Identifier la surface de Gauss pertinente.

\vec{E} ne dépend que de r , on choisit donc une surface de rayon r constant, c'est-à-dire une sphère passant par M , dont la normale est \vec{e}_r .

Espace 29

5 Calcul du flux

M!

✍ Calculer le flux du champ électrostatique au travers de la surface de Gauss précédemment définie. Rappelons qu'il faut commencer par simplifier le calcul de l'intégrale autant que possible (la surface de Gauss n'a pas été choisie pour rien !), et que ces simplifications font qu'il n'est généralement pas nécessaire d'exprimer dS .

$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = E_r(r) \times 4\pi r^2$ car E_r est constant sur le domaine d'intégration. Bien détailler le calcul au tableau et préciser qu'il est inutile, voire contre-productif, de décomposer dS .

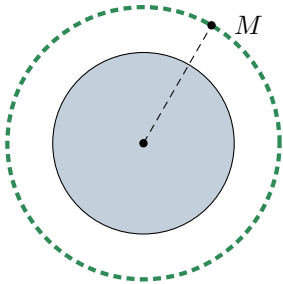
Espace 30

6 Calcul de la charge intérieure

Comme souvent, il faut faire une disjonction des cas selon que M est à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère.

▷ si $r > R$ (M à l'extérieur de la sphère) :

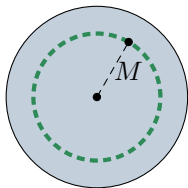
(M!)



$$Q_{\text{int}} = \iiint_{\text{SG}} \rho \, d\tau = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 = Q_0 \text{ charge totale de la sphère}$$

Espace 31

▷ si $r < R$ (M à l'intérieur de la sphère) :



$$Q_{\text{int}} = \iiint_{\text{SG}} \rho \, d\tau = \frac{4}{3}\pi \rho_0 r^3.$$

Espace 32

7 Conclusion

✍ Conclure sur le champ dans les deux domaines de l'espace, sans oublier de revenir à une expression vectorielle complète.

▷ Si $r > R$:

$$4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q_0}{\epsilon_0} \quad \text{d'où} \quad \vec{E}(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

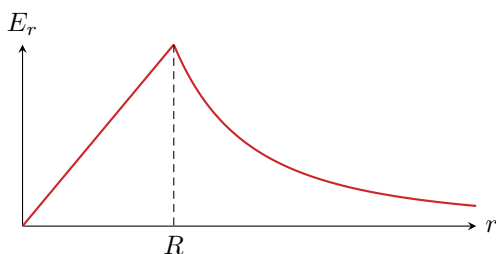
▷ Si $r < R$:

$$4\pi r^2 E_r(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} \rho_0 r^3 \quad \text{d'où} \quad \vec{E}(r) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \vec{e}_r$$

Espace 33

Analyse du résultat :

Continuité du champ :



On constate que le champ électrostatique est continu au passage de $r = R$.

↪ ce constat se généralise : pour des distributions volumiques, le champ est toujours continu en tout point de l'espace.

Champ à l'extérieur de la distribution exprimé en fonction de Q_0 :

on reconnaît le champ « habituel » créé par une charge ponctuelle placée en O

Espace 34

À l'extérieur de toute distribution à symétrie sphérique de charge totale Q_{tot} (resp. masse totale m_{tot}), le champ électrostatique (resp. gravitationnel) est identique à celui qui serait créé par une charge ponctuelle Q_{tot} (resp. masse ponctuelle m_{tot}) qui serait placée au centre.

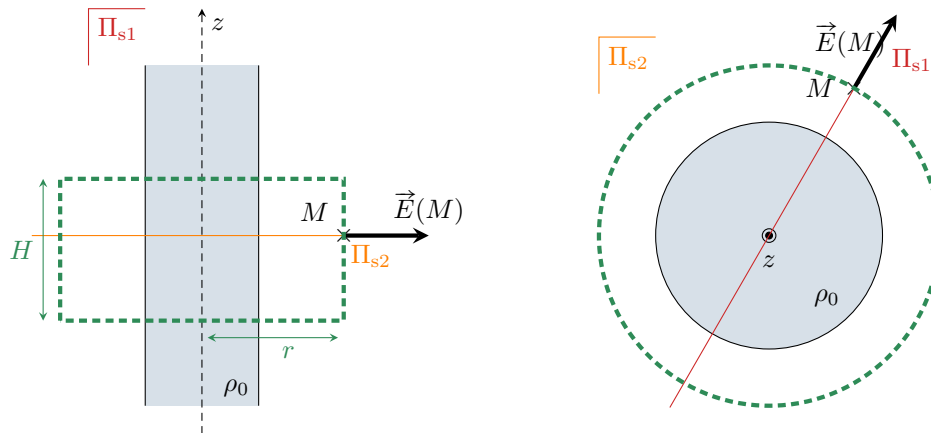
(R)

III.D - Exemple : champ électrostatique créé par un cylindre uniformément chargé

Application 2 : Champ électrostatique créé par un cylindre uniformément chargé en volume

M!

Considérons un cylindre de rayon R et de hauteur infinie, chargé uniformément par une densité volumique de charge ρ_0 . Calculer le champ électrostatique \vec{E} qu'il crée en tout point M de l'espace.



❶ **Choix du système de coordonnées** : évidemment cylindriques,

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + E_z(r, \theta, z) \vec{e}_z.$$

❷ **Symétries de la distribution de charge**

Rappelons que s'il existe un plan de symétrie de la distribution de charge passant par M , alors $\vec{E}(M)$ est inclus dans ce plan, ce qui renseigne sur sa direction.



Les symétries de la distribution de charge permettent de déterminer la direction du champ électrostatique, mais n'apportent pas d'information sur les variables dont il dépend.

Le plan $\Pi_{s1} = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution donc $E_\theta(M) = 0$.

Le plan $\Pi_{s2} = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution donc $E_z(M) = 0$.

Ainsi, $\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z) \vec{e}_r$. Le dessiner.

Espace 35

❸ **Invariances de la distribution de charge**



Les invariances de la distribution de charge permettent de déterminer les variables dont dépend la norme du champ électrostatique, mais n'apportent pas d'information sur sa direction et son sens.

Invariance par rotation autour de l'axe Oz , donc $E_r(M)$ est indépendant de la coordonnée θ du point M .

Invariance par translation le long de l'axe Oz , donc $E_r(M)$ est indépendant de la coordonnée z du point M .

Ainsi, $\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r$.

Espace 36

④ Construction de la surface de Gauss

Une bonne surface de Gauss est une surface fermée qui permet d'une part de calculer facilement le flux sortant, et d'autre part de le relier facilement au champ au point M .



↪ on cherche le champ électrostatique au point M , il faut donc forcément que la surface de Gauss passe par M .

↪ le calcul est particulièrement simple si $\vec{E} \cdot \vec{dS}$ prend la même valeur en tout point de la surface de Gauss ... dans l'idéal, \vec{E} doit donc être de norme constante et normal à la SG en tout point.

Première idée :

\vec{E} ne dépend que de r donc surface de rayon r constant, c'est-à-dire un cylindre passant par M , dont la normale est \vec{e}_r .

Espace 37

Difficulté :

cette surface n'est pas fermée, donc on ne peut pas y appliquer le théorème de Gauss.

Espace 38

↪ l'astuce consiste à fermer la surface par des éléments au travers desquels le flux est nul, ici des « couvercles » de normale \vec{e}_z : même si le champ n'y est pas du tout de norme constante (il dépend de r), il est partout orthogonal à \vec{e}_z .

Conclusion :

la SG est un cylindre (fermé!!) passant par M , donc de rayon r , et de hauteur H arbitraire. Compléter le schéma en dessinant une SG où M n'est pas au milieu.

Espace 39

⑤ Calcul du flux

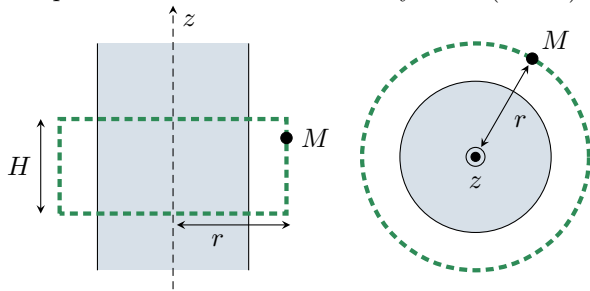
Le choix de la surface de Gauss rend ce calcul assez simple, si bien qu'il en règle générale inutile d'explicitier l'expression de dS pour mener le calcul.

$$\begin{aligned} \oiint_{SG} \vec{E} \cdot \vec{dS} &= \iint_{\text{lat}} (E_r(r) \vec{e}_r) \cdot (dS \vec{e}_r) + \iint_{\text{haut}} (E_r(r) \vec{e}_r) \cdot (dS \vec{e}_z) + \iint_{\text{bas}} (E_r(r) \vec{e}_r) \cdot (-dS \vec{e}_z) \\ &= E_r(r) \iint_{\text{lat}} dS + 0 + 0 \\ &= E_r(r) 2\pi r H. \end{aligned}$$

Espace 40

⑥ **Calcul de la charge intérieure** : comme souvent, il faut faire une disjonction des cas selon que M est à l'intérieur ou à l'extérieur du cylindre.

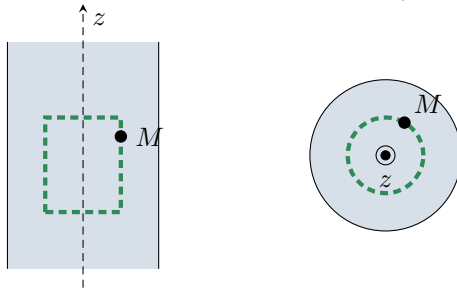
▷ si le point M est à l'extérieur du cylindre ($r > R$) :



$$Q_{\text{int}} = \iiint_{\text{SG}} \rho \, d\tau = \rho_0 \times \pi R^2 H$$

Espace 41

▷ si le point M est à l'intérieur du cylindre ($r < R$) :



$$Q_{\text{int}} = \iiint_{\text{SG}} \rho \, d\tau = \rho_0 \times \pi r^2 H$$

Espace 42

⑦ **Conclusion**

▷ Si $r > R$:

$$E_r(r) 2\pi r H = \frac{\rho_0 \pi R^2 H}{\epsilon_0} \quad \text{d'où} \quad \vec{E}(r) = \frac{\rho_0 R^2}{2r\epsilon_0} \vec{e}_r$$

Espace 43

▷ Si $r < R$:

$$E_r(r) 2\pi r H = \frac{\rho_0 \pi r^2 H}{\epsilon_0} \quad \text{d'où} \quad \vec{E}(r) = \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0} \vec{e}_r$$

Espace 44

On constate à nouveau que le champ est continu en $r = R$, c'est-à-dire entre l'intérieur et l'extérieur de la distribution.

Validité du modèle du cylindre infini : il faut que l'influence des bords de la distribution soit négligeable sur le champ calculé, on dit alors que les **effets de bord** sont négligeables.

Critère de validité :



observation à proximité du milieu du cylindre et à distance raisonnable de celui-ci : $r \ll H$ et $z \ll H$

Espace 45



Une distribution de charge peut être modélisée par une distribution infinie lorsque le champ est calculé à proximité de la distribution mais loin des bords de celle-ci.

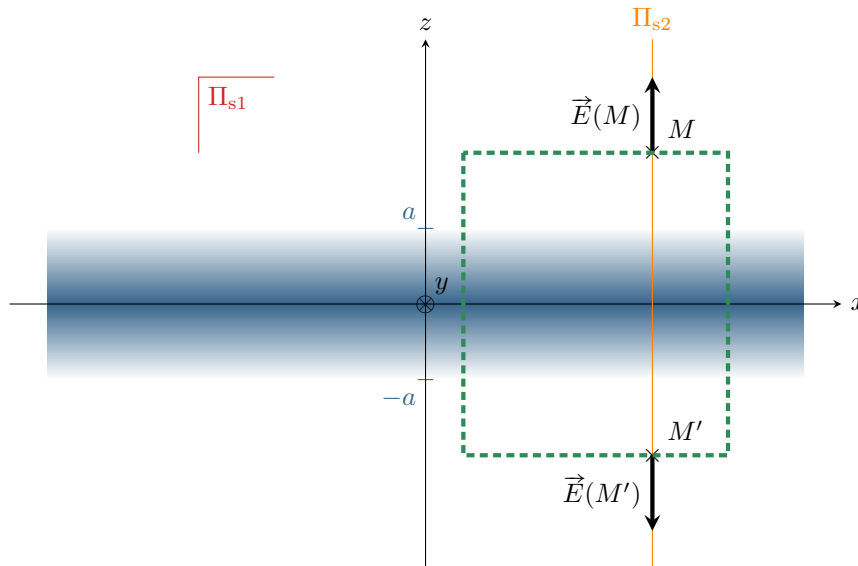
III.E - Exemple : champ créé par une couche épaisse de charge non uniforme

Application 3 : Champ créé par une couche épaisse de charge non-uniforme

Considérons une couche plane de normale \vec{e}_z , d'épaisseur $2a$, dont la densité volumique de charge vaut

$$\rho(z) = \rho_0 \cos \frac{\pi z}{2a} \quad \text{pour } -a \leq z \leq a$$

Calculer le champ électrostatique \vec{E} qu'elle crée dans le demi-espace $z > 0$.



❶ **Choix du système de coordonnées** : évidemment cartésiennes,

$$\vec{E}(M) = E_x(x, y, z) \vec{e}_x + E_y(x, y, z) \vec{e}_y + E_z(x, y, z) \vec{e}_z.$$

❷ **Symétries de la distribution de charge**

Le plan $\Pi_{s1} = (M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution donc $E_y = 0$.

Le plan $\Pi_{s2} = (M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution donc $E_x = 0$.

Espace 46

❸ **Invariances de la distribution de charge**

Distrib de charge invariante par translation le long des axes (Ox) et (Oy) donc \vec{E} ne dépend que de la variable z .

Espace 47

Conclusion de ces deux études :

$\vec{E} = E_z(z) \vec{e}_z$. Le dessiner.

Espace 48

❹ **Choix de la surface de Gauss**

▷ Un morceau de cette surface va forcément être une portion de plan d'aire S quelconque et de normale \vec{e}_z passant par M (peu importe sa forme exacte), mais ce n'est pas du tout une surface fermée.

▷ On utilise alors la même astuce que pour le cylindre : on y ajoute des portions au travers desquelles le flux sortant est nul, c'est-à-dire ici des portions verticales ... mais la surface n'est toujours pas fermée !

▷ Pour trouver comment fermer la surface de Gauss, il faut donc chercher une autre portion plane sur laquelle le champ \vec{E} sera uniforme et facile à relier au champ cherché $\vec{E}(M)$. On utilise alors un argument de symétrie, en s'intéressant au point M' , symétrique de M par rapport au plan (Oxy) .

Ce plan est un plan de symétrie de la distribution, donc pour M' symétrique de M par rapport à ce plan on a $\vec{E}(M')$ qui est le symétrique de $\vec{E}(M)$ (le dessiner), et même ici simplement l'opposé. Ainsi,

$$\vec{E}(M') = -\vec{E}(M) \quad \text{soit} \quad E_z(z' = -z)\vec{e}_z = -E_z(z)\vec{e}_z.$$

On complète ainsi la surface de Gauss avec le plan d'abscisse $z' = -z$.

Espace 49

⑤ Calcul du flux

⚠ ⚠ ⚠ **Attention !** Contrairement aux exemples précédents, il faudrait également faire une disjonction de cas ici, en fonction du signe de l'abscisse z du point où l'on calcule le champ : si $z > 0$, alors $d\vec{S}_M = +dS\vec{e}_z$... mais si $z < 0$, alors $d\vec{S}_M = -dS\vec{e}_z$.

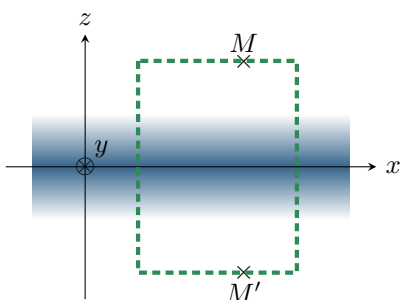
↪ suivant l'énoncé, on se retient ici au cas $z > 0$... donc finalement pas de disjonction de cas.

$$\begin{aligned} \oiint_{SG} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{\text{haut}} (E_z(z)\vec{e}_z) \cdot (dS\vec{e}_z) + \iint_{\text{lat}} (E_z\vec{e}_z) \cdot (dS\vec{n}) + \iint_{\text{bas}} (E_z(z' = -z)\vec{e}_z) \cdot (-dS\vec{e}_z) \\ &= E_z(z)S + 0 - E_z(z' = -z)S \\ &= E_z(z)S + 0 + E_z(z)S \\ \oiint_{SG} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= 2E_z(z)S. \end{aligned}$$

Espace 50

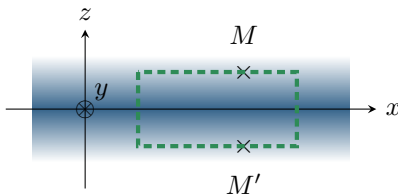
⑥ **Calcul de la charge intérieure** : comme souvent, il faut faire une disjonction des cas selon la position de M .

▷ si le point M est à l'extérieur de la couche épaisse ($z > a$) :



$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \iiint_{SG} \rho \, d\tau = \rho_0 \int_{-a}^a \rho_0 \cos \frac{\pi z}{2a} \, dz \times \iint dx \, dy \\ &= \rho_0 S \left[\frac{2a}{\pi} \sin \frac{\pi z}{2a} \right]_{-a}^a \\ &= \rho_0 S \times \frac{2a}{\pi} \times 2 \\ &= \frac{4aS}{\pi} \rho_0 \end{aligned}$$

▷ si le point M est à l'intérieur de la couche épaisse ($z < a$) :



$$Q_{\text{int}} = \iiint_{\text{SG}} \rho \, d\tau = \rho_0 \int_{-z}^z \rho_0 \cos \frac{\pi z}{2a} \, dz \times \iint dx \, dy$$

$$= \frac{4aS}{\pi} \rho_0 \sin \frac{\pi z}{2a}$$

Conclusion

▷ si $z > a$:

$$2E_z(z)S = \frac{4aS}{\pi\epsilon_0} \rho_0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{E}(z > a) = \frac{2a}{\pi\epsilon_0} \rho_0 \vec{e}_z .}$$

▷ si $0 < z < a$:

$$2E_z(z)S = \frac{4aS}{\pi\epsilon_0} \rho_0 \sin \frac{\pi z}{2a} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{E}(0 < z < a) = \frac{2a}{\pi\epsilon_0} \rho_0 \sin \frac{\pi z}{2a} \vec{e}_z .}$$

► **Pour approfondir** : Comme discuté précédemment, le champ en un point M appartenant au demi-espace $z < 0$ est l'opposé de celui du point symétrique, qui appartient au demi-espace $z > 0$. Ceci étant, contrairement aux apparences, en déduire son expression analytique n'est pas si simple, et il n'est pas possible de réutiliser sans précaution les expressions précédentes, qui ont été établies pour $z > 0$.

Commençons par déterminer l'expression du champ à l'intérieur de la couche chargée, et gardons dans un premier temps la notation $z' = -z$, avec $-a < z' < 0$ et donc $0 < z < a$. Par symétrie,

$$E_z(-a < z' < 0) = -E_z(z) = -\frac{2a}{\pi\epsilon_0} \rho_0 \sin \frac{\pi z}{2a} = -\frac{2a}{\pi\epsilon_0} \rho_0 \sin \frac{\pi(-z')}{2a} = +\frac{2a}{\pi\epsilon_0} \rho_0 \sin \frac{\pi z'}{2a}$$

et finalement, en remplaçant la notation z' par la notation z (il s'agit bien cette fois d'un changement de notation et pas d'une symétrie),

$$\vec{E}(-a < z < 0) = \frac{2a}{\pi\epsilon_0} \rho_0 \sin \frac{\pi z}{2a} \vec{e}_z$$

Ainsi, l'expression est la même que pour $z > 0$, le changement de signe de z suffit à assurer la symétrie.

Intéressons-nous maintenant à l'extérieur de la couche chargée. Cette fois, le champ est uniforme et la difficulté ne se pose pas de la même façon : puisque la coordonnée n'intervient pas dans l'expression du champ, le signe \ominus imposé par la symétrie doit être mis « à la main »,

$$\vec{E}(z < -a) = -\frac{2a}{\pi\epsilon_0} \rho_0 \vec{e}_z .$$

L'expression est donc cette fois *différente* de celle pour $z > a$... mais la symétrie est tout autant assurée! ■

Remarque : Les expressions précédentes montrent que $\vec{E}(z = 0) = \vec{0}$, ce qui pouvait s'anticiper par un argument de symétrie. En effet, le plan (Oxy) est un plan de symétrie de la distribution, donc $E_z(z = 0) = 0$... mais comme les deux autres composantes sont nulles également, le champ est nul. Remarquer cette nullité dès le début du calcul donne une deuxième façon de fermer la surface de Gauss, ou, beaucoup plus intéressant, une condition limite pour trouver le champ par intégration de l'équation de Maxwell-Gauss :

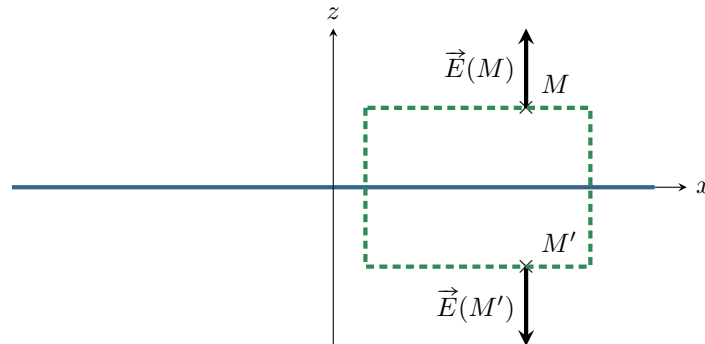
$$\text{div } \vec{E} = \frac{dE_z}{dz} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{donc} \quad \int_{E_z(0)=0}^{E_z(z)} dE_z = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^z \rho(z) \, dz .$$

C'est de loin la méthode la plus efficace pour trouver le champ sur cet exemple.

III.F - Exemple : champ électrostatique créé par un plan uniformément chargé

Application 4 : Champ électrostatique créé par un plan uniformément chargé

Considérons un plan de normale \vec{e}_z infiniment fin, chargé avec une densité surfacique de charge σ uniforme. Calculer le champ électrostatique \vec{E} qu'il crée en tout point M de l'espace.



23 Symétries et invariances de la distribution de charge

Les plans $\Pi_{s1} = (M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ et $\Pi_{s2} = (M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont deux plans de symétrie de la distribution, donc $\vec{E}(M)$ est inclus dans leur intersection, c'est-à-dire qu'il est porté par \vec{e}_z .

De plus, la distribution de charge est invariante par translation le long des axes (Ox) et (Oy) donc E_z ne dépend que de la variable z .

\leadsto conclusion : $\vec{E} = E_z(z)\vec{e}_z$. Le dessiner.

4 Choix de la surface de Gauss : on reprend bien sûr l'idée de l'application de cours précédente.

Le plan de la distribution de charges est un plan de symétrie, donc pour M' symétrique de M par rapport à ce plan on a $\vec{E}(M')$ qui est le symétrique de $\vec{E}(M)$ (le dessiner), soit

$$E_z(z' = -z)\vec{e}_z = -E_z(z)\vec{e}_z.$$

Ainsi la surface de Gauss est composée :

- ▷ d'une portion plane de surface S se trouvant à l'abscisse z ;
- ▷ de portions latérales en tout point desquelles la normale \vec{n} est orthogonale à \vec{e}_z ;
- ▷ d'une deuxième portion plane identique à la précédente mais à l'abscisse $z' = -z$.

La dessiner.

Espace 51

6 Calcul du flux : pour l'orientation des surfaces, on suppose $z > 0$... et on pense à l'écrire et à le dire !

$$\begin{aligned} \oint_{SG} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{\text{haut}} (E_z(z)\vec{e}_z) \cdot (dS\vec{e}_z) + \iint_{\text{lat}} (E_z\vec{e}_z) \cdot (dS\vec{n}) + \iint_{\text{bas}} (E_z(z' = -z)\vec{e}_z) \cdot (-dS\vec{e}_z) \\ &= E_z(z)S + 0 - E_z(z' = -z)S \end{aligned}$$

$$\oint_{SG} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E_z(z)S.$$

Espace 52

6 **Calcul de la charge intérieure** : pour une fois, aucune disjonction de cas n'est nécessaire.

$$Q_{\text{int}} = \sigma_0 S$$

Espace 53

7 **Conclusion** :

▷ pour $z > 0$: $2E_z(z)S = \frac{\sigma_0 S}{\varepsilon_0}$ d'où $\vec{E}(z) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z$.

Espace 54

▷ pour $z < 0$, le champ s'obtient par symétrie et vaut $\vec{E}(z) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z$.

Espace 55

Le champ électrostatique créé par un plan uniformément chargé de vecteur normal \vec{e}_z est uniforme par morceaux et vaut

$$\vec{E} = \text{sgn}(z) \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z$$

où sgn est la fonction signe : $\text{sgn}(z) = \pm 1$ si $z \gtrless 0$

⚠ ⚠ ⚠ **Attention !** Contrairement aux exemples précédents ce résultat est à connaître par cœur.

Remarque : Le fait que cette dépendance en z ne se traduise que par le signe peut s'interpréter par une « invariance » de la distribution (ou plutôt de la façon dont on voit la distribution) par translation le long de l'axe (Oz) : comme le plan est infini, on ne voit pas les bords, si bien que la distribution est vue de la même façon quelle que soit l'altitude z du point M , donc le champ $\vec{E}(M)$ ne dépend pas de z . On sait juste si elle est « au dessus » ou « au dessous » : cela ne se traduit que par le signe.

• Généralisation : relation de passage sur le champ électrique

On constate que le champ est discontinu au passage de la surface chargée ,

$$\vec{E}(z = 0^+) - \vec{E}(z = 0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z .$$

Il s'agit en fait de la traduction dans ce cas particulier d'un résultat beaucoup plus général appelé **relation de passage**, démontrable en toute généralité à partir des équations de Maxwell.

Relation de passage sur le champ électrique :

De part et d'autre d'une surface chargée de normale \vec{e}_z ,

▷ les composantes du champ tangentielles à la surface sont continues :

$$E_{x,y}(z = 0^-) = E_{x,y}(z = 0^+)$$

▷ la composante normale du champ est discontinue, et la discontinuité reliée à la densité surfacique de charges :

$$E_z(z = 0^+) - E_z(z = 0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} .$$

Normalement, cette relation doit être rappelée par un sujet ... en pratique ce n'est malheureusement pas toujours le cas.

- **Validité du modèle du plan infini**

Un plan infini n'existe pas, il s'agit d'un cas limite pour un modèle de plaque de faible épaisseur e devant ses côtés a et b .

↪ vu du point d'observation M , on ne doit voir ni l'effet des bords ni l'effet de l'épaisseur de la plaque.

Condition de validité :

$$x, y, z \ll a, b \text{ et } z \gg e$$

Espace 56

IV - Densité volumique d'énergie électrostatique

Une particule chargée placée dans un champ électrostatique est accélérée, donc acquiert de l'énergie cinétique que lui fournit le champ via la force de Coulomb.

Un champ électrostatique est un réservoir d'énergie.

La **densité volumique d'énergie électrostatique** s'écrit

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2$$

Sens physique :

un volume $d\tau$ au voisinage d'un point M contient une énergie d'origine électrostatique $\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 d\tau$.

Espace 57

R

