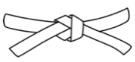
BLAISE PASCAL
PT 2023-2024

TD 13 – Électromagnétisme

Potentiel électrostatique Condensateur

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

Ceinture		Proposition de parcours d'entraînement
	Ceinture blanche	Questions de cours + exercices 1, 2, 4 et 7
	Ceinture jaune	Questions de cours + exercices 1, 2, 3, 4, 7 et 10
	Ceinture rouge	Questions de cours (★) + exercices 1, 3, 5, 7, 8, 9 et 10
	Ceinture noire	Questions de cours (★) + exercices 1, 3, 5, 6, 8, 9 et 10

Flasher ce code pour accéder au corrigé

Questions et applications de cours

Seuls les étudiants du groupe PT* seront interrogés en colle sur les questions marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !

13.1 - Considérons un cylindre de rayon R et de hauteur infinie, uniformément chargé en volume avec la densité ρ_0. En coordonnées cylindriques d'axe (Oz) confondu avec l'axe du cylindre, le champ créé par ce cylindre s'écrit

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\,\vec{e}_r & \text{si } r \leq R \\[2mm] \dfrac{\rho_0 R^2}{2r\varepsilon_0}\,\vec{e}_r & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

Calculer en tout point de l'espace le potentiel dont dérive ce champ en supposant qu'il est nul sur l'axe du cylindre.

13.2 - Établir l'expression de la capacité d'un condensateur plan « en passant par les charges ». L'expression du champ créé par un plan infini chargé en surface avec densité σ sera rappelée par l'étudiant sans démonstration.

13.3 - Établir l'expression de la capacité d'un condensateur plan « en passant par l'énergie » : la démonstration reposera sur l'équation de Poisson et la densité volumique d'énergie électrostatique.

Analyse de corrigé

Exercice 1 : Condensateur cylindrique

1 | 2 |

- *Théorème de Gauss ;*
- *Lien entre champ et potentiel ;*
- *Condensateur ;*
- *Coordonnées cylindriques.*

Considérons un condensateur formé de deux armatures cylindriques coaxiales. L'armature interne, de rayon R_1, supposée de potentiel nul, porte une charge $-Q$. L'armature externe, de rayon R_2, porte une charge $+Q$. Les deux armatures sont de même longueur $\ell \gg R_2$. On supposera les effets de bord négligeables.

1 - Justifier précisément la direction et le sens du champ électrostatique $\vec{E}$, ainsi que la (les) variable(s) dont il dépend.

2 - Calculer le champ électrostatique dans tout l'espace.

3 - En déduire le potentiel électrostatique dans tout l'espace.

4 - Déterminer la capacité C du condensateur.

✎ ***Correction*** — ***1 -*** *Les effets de bord étant négligeables, la distribution sera assimilée à une distribution infinie. Soit M un point quelconque de l'espace.*

Le plan contenant M et l'axe du cylindre est plan de symétrie de la distribution, de même que le plan contenant M et orthogonal à l'axe du cylindre. On en déduit

$$\vec{E}(M) = E_r(M)\vec{e}_r\,.$$

> ***Question d'analyse 1*** *- Nommer les deux plans de symétrie en termes des vecteurs de base.*

Par ailleurs, le champ électrique étant toujours dirigé des charges positives vers les charges négatives, on en déduit que

$$E_r(M) < 0\,.$$

Enfin, la distribution est invariante par rotation autour de l'axe et par translation le long de cet axe, donc E_r ne dépend que la coordonnée r du point M.

2 - *Considérons comme surface de Gauss un cylindre de rayon r quelconque et de hauteur ℓ coïncidant avec celle du condensateur.*

▷ *Le flux du champ électrostatique sortant de ce cylindre s'écrit*

$$\oiint \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \iint_{\text{haut}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} + \iint_{\text{bas}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} + \iint_{\text{lat}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = 0 + 0 + E_r(r)\times 2\pi r\ell\,.$$

> ***Question d'analyse 2*** *- Justifier la nullité des deux premières intégrales.*

▷ *La charge contenue à l'intérieur de la surface de Gauss dépend du rayon r :*
→ *si $r < R_1$, on a directement $Q_{\text{int}} = 0$;*
→ *si $R_1 < r < R_2$ alors seule la première armature se trouve à l'intérieur de la surface de Gauss, donc $Q_{\text{int}} = -Q$;*
→ *enfin, si $r > R_2$, les deux armatures sont comprises dans la surface de Gauss, donc $Q_{\text{int}} = -Q + Q = 0$.*

> ***Question d'analyse 3*** *- Dans le cas $R_1 < r < R_2$, pourquoi la charge intérieure est-elle simplement $-Q$ et non pas $-Q\times 2\pi r\ell$?*

▷ *En conclusion, d'après le théorème de Gauss,*
→ *si $r < R_1$,*

$$E_r(r)\times 2\pi r\ell = 0 \qquad \text{soit} \qquad \vec{E}(r < R_1) = \vec{0}\,;$$

→ *si $R_1 < r < R_2$,*

$$E_r(r)\times 2\pi r\ell = \frac{-Q}{\varepsilon_0} \qquad \text{soit} \qquad \vec{E}(r < R_1) = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\, r\ell}\vec{e}_r\,;$$

→ *si $r > R_2$, on a comme dans le premier cas*

$$\vec{E}(r > R_2) = \vec{0}\,.$$

3 - *Le champ ne dépendant que de r, il en est de même pour le potentiel.*
▷ *pour $r < R_1$,*

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -E_r = 0 \qquad \text{soit} \qquad V(r<R_1) = \text{cte} = V(r{=}R_1) \underset{\substack{\uparrow\\ CL}}{=} 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{V(r<R_1) = 0\,.}$$

▷ *entre les deux armatures, on a*

$$-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\, r\ell} \qquad \text{d'où} \qquad \int_0^{V(r)} \mathrm{d}V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\,\ell}\int_{R_1}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

ce qui donne

$$V(R_1 < r < R_2) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\,\ell}\ln\frac{r}{R_1}\,.$$

▷ *enfin, à l'extérieur des armatures, on a comme dans le premier cas*

$$V = \text{cte} = V(r{=}R_2) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{continuité}}}{=} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\,\ell}\ln\frac{R_2}{R_1} \qquad \text{soit} \qquad V(r>R_2) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\,\ell}\ln\frac{R_2}{R_1}\,.$$

***Question d'analyse 4** - Pourquoi la constante n'est-elle pas prise en $r = R_1$, au contraire des deux cas précédents ?*

4 - *De ce qui précède, on déduit la différence de potentiel entre les armatures du condensateur,*

$$U = V(R_2) - V(R_1) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\,\ell}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

et par définition de la capacité

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0\,\ell}{\ln(R_2/R_1)}\,.}$$

Lien entre champ et potentiel

Exercice 2 : Potentiel créé par une sphère uniformément chargée — 1 | 1 |

- *Lien entre champ et potentiel ;*
- *Coordonnées sphériques.*

Une sphère de rayon R contenant une charge q répartie uniformément dans son volume créé le champ

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{R^3}\,\vec{e}_r & \text{si } r < R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r & \text{si } r > R \end{cases}$$

Calculer le potentiel associé, en le prenant nul à l'infini. Reprendre le calcul en le choisissant nul en $r = 0$. Comparer les deux résultats.

Exercice 3 : Charge en surface d'un semi-conducteur — oral banque PT | 1 | 2

- *Équation de Maxwell-Gauss ;*
- *Théorème de Gauss ;*
- *Lien entre champ et potentiel.*

Dans le domaine $x > 0$ se trouve un semi-conducteur chargé en volume selon une densité $\rho(x)$ et en surface selon une densité σ_0 uniforme. Le champ électrique dans ce semi-conducteur s'écrit $\vec{E} = E_0\,\mathrm{e}^{-x/\ell}\,\vec{u}$ avec $E_0 > 0$, $\ell > 0$ et $\vec{u}$ un vecteur unitaire. Le champ électrique est nul dans le domaine $x < 0$.

1 - Déterminer la direction $\vec{u}$ du champ électrostatique.

2 - Déterminer la densité volumique de charge $\rho(x)$ dans les deux domaines $x < 0$ et $x > 0$.

3 - Énoncer le théorème de Gauss. En déduire l'expression de σ_0.

4 - Déterminer le potentiel électrostatique en $x = 0$. On le supposera nul pour $x \to \infty$.

Exercice 4 : Potentiel de Yukawa — oral ATS | 1 | 2 |

- *Théorème de Gauss ;*
- *Lien entre champ et potentiel.*

Considérons une distribution de charge pour laquelle, à une distance r d'un point origine O, le potentiel électrostatique a pour expression

$$V(r) = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r}\,\mathrm{e}^{-r/a}$$

où a et Z sont deux constantes positives et e la charge élémentaire.

1 - Calculer le champ électrique $\vec{E}$ en tout point de l'espace.

2 - En déduire la charge contenue à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon r.

3 - Étudier les limites $r \gg a$ et $r \ll a$. Que modélise ce potentiel ? Que représentent Z et a ?

Donnée : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = \dfrac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}$.

Exercice 5 : Électro-érosion par fil 3 | 2

▷ *Théorème de Gauss ;*
▷ *Lien entre champ et potentiel.*

L'électro-érosion est un procédé d'usinage qui consiste à enlever de la matière dans une pièce en utilisant des décharges électriques. Le processus est assez lent mais très précis : la précision sur la cote désirée peut atteindre 2 µm. Il s'agit de faire pénétrer un fil conducteur dans une pièce métallique massive tout en imposant une différence de potentiel entre eux, l'ensemble étant plongé dans un liquide isolant, généralement de l'huile. Lorsque le fil est suffisamment proche de la surface de la pièce, un arc électrique apparaît entre le fil et la pièce, qui se creuse au niveau du point d'impact de l'arc. L'objectif de l'exercice est de déterminer l'ordre de grandeur de la tension à imposer entre le fil et la pièce pour que les arcs électriques puissent apparaître, ce qui nécessite que le champ électrique soit supérieur à $E_{\mathrm{rupt}} = 100\,\mathrm{kV\cdot cm^{-1}}$ tout le long de l'arc.

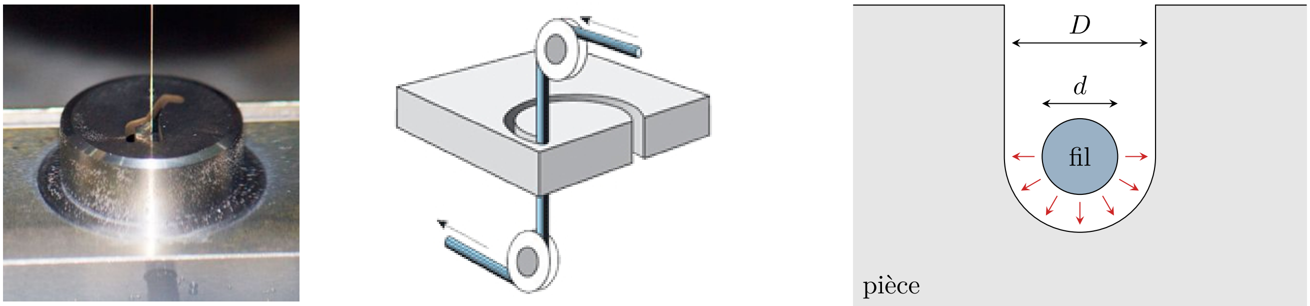


Figure 1 – **Électro-érosion par fil.** Gauche : pièce usinée par électroérosion par fil. Centre : schéma de principe du dispositif. Droite : vue de dessus de l'entaille dans la pièce usinée.

Le fil possède un diamètre d et une longueur suffisante pour négliger les effets de bords. Il créé dans la pièce une entaille de largeur D. Au fond de l'entaille, le champ électrique entre le fil et la pièce est approximativement radial et ne dépendant que de la distance r au centre du fil. On fera l'hypothèse que le champ créé par le fil vérifie ces propriétés sur tout le demi-cylindre correspondant au fond de l'entaille, dans lequel sont représentées les flèches sur la figure 1. L'huile présente entre le fil et la pièce se comporte comme le vide du point de vue électrostatique à condition de remplacer la permittivité diélectrique du vide ε_0 par celle de l'huile, notée $\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}$, où la permittivité relative de l'huile ε_{r} est sans dimension.

Donnée : $\ln 2 \simeq 0{,}7$.

1 - Montrer par le théorème de Gauss que le champ électrique dans le fond de l'entaille est de la forme

$$\vec{E} = \frac{K}{r}\,\vec{e}_r\,.$$

2 - La pièce étant reliée à la masse, déterminer la constante K en fonction de D, d et du potentiel U imposé au fil.

3 - Déterminer la tension minimale $U_{\min}$ à appliquer au fil pour pouvoir faire une entaille de diamètre $D = 10\,\mu\mathrm{m}$ avec un fil de diamètre $d = 5\,\mu\mathrm{m}$.

En pratique, le fil provenant d'une bobine est déroulé entre deux poulies et c'est la pièce à découper qui effectue des mouvements préalablement programmés par ordinateur.

4 - Pourquoi faut-il dérouler la bobine au fur et à mesure de l'usinage de la pièce ?

Exercice 6 : Floculation d'une suspension colloïdale

oral banque PT | 3 | 3

- *Équation de Poisson ;*
- *Lien entre champ et potentiel ;*
- *Théorème de Gauss ;*
- *Coordonnées sphériques.*

On s'intéresse aux mécanismes de traitement des eaux usées, et plus particulièrement à la floculation des particules colloïdales en solution aqueuse.

Document 1 : Phénomène de floculation

Les particules colloïdales sont caractérisées par deux points essentiels : d'une part, leur rayon est très faible (de 10 nm à 1 µm) ; et d'autre part, elles ont la particularité d'être chargées négativement, ce qui engendre des forces de répulsions inter-colloïdales. Ces deux points confèrent aux colloïdes une vitesse de sédimentation extrêmement faible.

La floculation est le processus physico-chimique au cours duquel des particules colloïdales en suspension dans un liquide s'agglomèrent pour former des particules plus grosses, généralement très poreuses, nommées flocs. Les flocs sédimentent généralement beaucoup plus rapidement que les particules primaires dont ils sont formés, ce qui est utilisé dans le traitement des eaux usées.

Adapté de Wikipédia

On souhaite étudier l'effet de l'ajout de sels ioniques à la suspension. On raisonne sur une particule colloïdale sphérique, de centre O, de rayon R et de charge $Q < 0$. Les densités volumiques des ions sont $N_+(r) = N_0\,\mathrm{e}^{-zeV(r)/k_\mathrm{B}T}$ pour les cations (charge $+ze$, $z = 2$ ou 3 en pratique) et $N_-(r) = N_0\,\mathrm{e}^{+zeV(r)/k_\mathrm{B}T}$ pour les anions (charge $-ze$), avec N_0 une constante, V le potentiel électrostatique, k_B la constante de Boltzmann et T la température. On suppose $|zeV(r)| \ll k_\mathrm{B}T$.

Donnée : laplacien d'une fonction $V(r)$ à symétrie sphérique $\Delta V = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rV)$.

1 - Pourquoi peut-on considérer les ions comme ponctuels ?

2 - Déterminer la densité volumique de charge $\rho(r)$ autour du colloïde étudié.

3 - Déterminer une expression du potentiel électrostatique V.

4 - Montrer que le champ électrique est de la forme

$$E(r) = \frac{K}{r^2}\left(1 + \frac{r}{\delta}\right)\mathrm{e}^{-r/\delta} .$$

Déterminer K en appliquant le théorème de Gauss à une surface bien choisie.

5 - Décrire l'effet des ions sur le champ électrique entre deux particules colloïdales. Conclure.

Cartes de champ

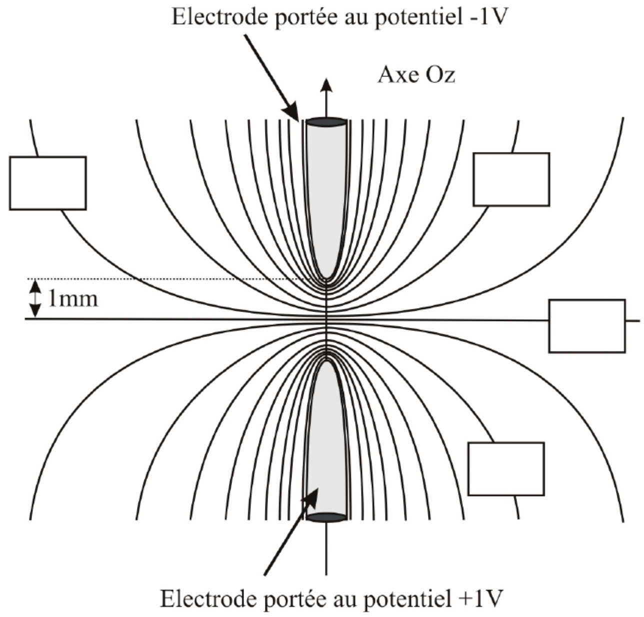
Exercice 7 : Apparition d'un arc électrique

oral banque PT | 1 | 0

- *Lignes de champ et équipotentielles.*

Un arc électrique est un phénomène durant lequel un courant électrique apparaît et devient visible dans l'air. Ce phénomène explique aussi bien les étincelles dues à « l'électricité statique » que les éclairs des orages. L'air étant un milieu isolant, il faut que le champ électrique dépasse une valeur critique $E_\mathrm{c} = 3{,}6 \cdot 10^6\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$, appelé champ disruptif, pour que l'arc électrique apparaisse. Plus précisément, un arc électrique peut se produire entre deux électrodes s'il existe un chemin reliant ces conducteurs métalliques tel qu'en chaque point le champ électrique dépasse la valeur disruptive. On considère deux électrodes distantes de $d = 2\,\mathrm{mm}$.

1 - Estimer la tension minimale à imposer pour qu'un arc électrique apparaisse lorsque ces électrodes sont celles d'un condensateur plan.



On s'intéresse maintenant à deux électrodes paraboliques. Un logiciel de simulation est mis à profit pour dresser une carte de potentiel dans la zone des extrémités des électrodes. Dans la simulation, l'une est portée au potentiel 1 V et l'autre au potentiel −1 V. D'une ligne à l'autre, le potentiel varie de 100 mV.

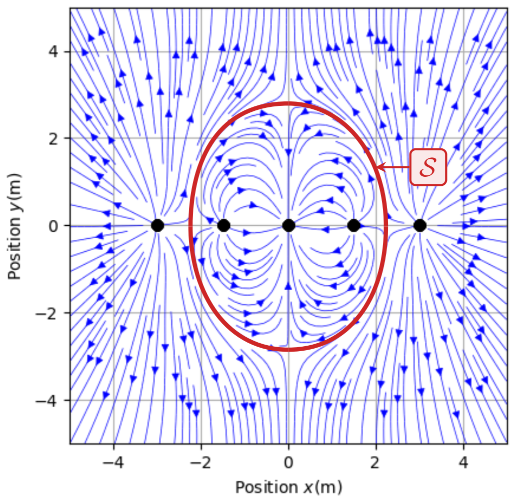
2 - Indiquer dans chacun des cadres la valeur de potentiel correspondant.

3 - Superposer à la figure un réseau de lignes de champ électrique.

4 - On augmente progressivement la tension entre les électrodes. Où l'arc apparaîtra-t-il ?

Exercice 8 : Lecture d'une carte de champ — 2 | 0

- *Lignes de champ ;*
- *Symétries du champ électrostatique.*



On donne ci-contre les lignes de champ électrostatique générées par une distribution de charges ponctuelles. Les charges sont numérotées 1 à 5 de gauche à droite. La surface $\mathcal{S}$ sera discutée dans les questions.

1 - Donner le signe de chacune des charges.

2 - Déterminer les éventuels plans de symétrie et d'anti-symétrie de la distribution de charge. Exprimer les charges q_4 et q_5 en fonction des autres.

3 - On admet que le champ est nul en tout point de la surface $\mathcal{S}$: comment cela se traduit-il sur les lignes de champ ?

4 - En déduire q_3 en fonction des autres charges.

Condensateur

Exercice 9 : Puissance transportée par un éclair — oral banque PT | 2 | 2

- *Théorème de Gauss ;*
- *Lien entre champ et potentiel ;*
- *Condensateur ;*
- *Coordonnées sphériques.*

On modélise l'ensemble Terre-ionosphère par un condensateur sphérique. La Terre, de rayon $R = 6{,}4 \cdot 10^3$ km, se comporte comme un conducteur parfait de potentiel nul et porte une charge négative $-Q$ uniformément répartie à sa surface. L'ionosphère est représentée par une surface équipotentielle sphérique de rayon $R + h$ ($h = 60$ km) porteuse d'une charge $+Q$. Les propriétés électromagnétiques de l'air sont assimilées à celles du vide.

1 - Exprimer le champ électrique entre les deux sphères.

2 - Calculer le potentiel de l'ionosphère.

3 - Déterminer la capacité de ce condensateur.

4 - Simplifier son expression compte tenu des valeurs numériques et commenter le résultat obtenu. La calculer numériquement.

5 - Un éclair correspond à un courant moyen de 30 kA pendant 25 ms. Quelle est sa puissance ?

Exercice 10 : Capteur capacitif de niveau de liquide 2 | 2 |

- *Équation de Poisson ;*
- *Condensateur ;*
- *Énergie électrostatique ;*
- *Coordonnées cylindriques.*

Le niveau de liquide contenu dans une cuve peut être mesuré en temps réel à l'aide de capteurs capacitifs, dont plusieurs sont présentés dans la vidéo ci-contre (flasher ou cliquer sur le QR code). Cet exercice propose d'étudier l'un de ces capteurs, appelé sonde à tube de masse, utilisable pour mesurer le niveau d'un liquide non conducteur (solvant organique, huile, etc.). Il se présente comme une longue tige cylindrique de même hauteur que la cuve et de rayon beaucoup plus faible, voir figure 2. Le capteur est constitué de deux cylindres métalliques coaxiaux formant un condensateur dont la capacité dépend directement du niveau de liquide dans la cuve. Le cylindre intérieur est un cylindre plein, alors que le cylindre extérieur est creux et percé d'orifices permettant au fluide de pénétrer dans l'espace entre les deux cylindres. Le cylindre extérieur est électriquement relié à la terre.

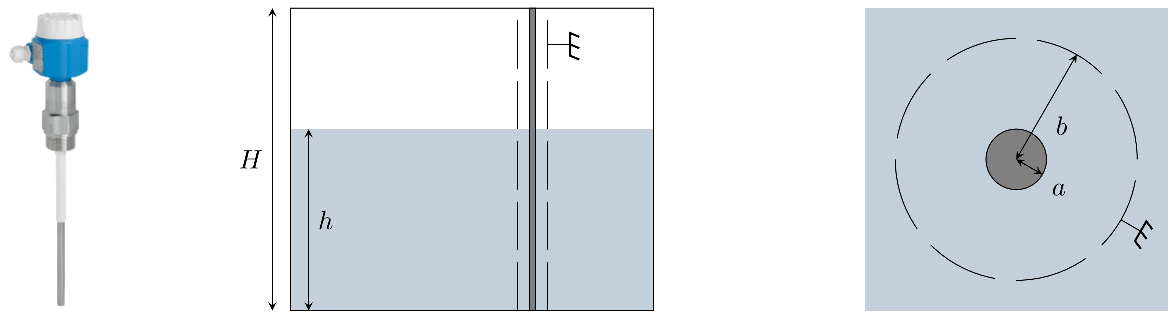


Figure 2 – Sonde à tube de masse.

Hypothèses pour l'ensemble de l'exercice :

- les orifices ne modifient pas les propriétés électromagnétiques du cylindre extérieur, qui sont identiques à celles d'un cylindre creux non percé ;
- les effets de bords aux limites de la cuve et à l'interface entre le liquide et l'air sont négligeables ;
- les propriétés électromagnétiques du fluide sont analogues à celles du vide à condition de remplacer la permittivité du vide ε_0 par celle du liquide $\varepsilon_0\varepsilon_r$, où ε_r (sans dimension) est la constante diélectrique du liquide.

Donnée : en coordonnées cylindriques,

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z \qquad \text{et} \qquad \Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\,.$$

1 - Justifier que le potentiel V dans l'espace contenu entre les deux cylindres ne dépend que de la distance r à l'axe des cylindres.

2 - En déduire l'expression du potentiel dans l'espace entre les deux cylindres en fonction du potentiel V_0 auquel est porté le cylindre central.

3 - Déterminer le champ électrique régnant entre les deux cylindres.

4 - Exprimer l'énergie électrostatique stockée entre les deux cylindres en fonction notamment de h et H.

5 - Montrer que la mesure de la capacité C du condensateur formé par les deux cylindres permet de déterminer le niveau h de liquide contenu dans la cuve.

6 - La sonde peut-elle convenir à n'importe quel liquide isolant ? Qu'en est-il si le liquide est conducteur (solution aqueuse par exemple) ?