BLAISE PASCAL
PT 2023-2024

TD 16 – Électromagnétisme

Correction

Conduction électrique

Bilan de charge

Exercice 1 : Charge d'une sphère

1 | 2

- ▷ *Bilan de charge ;*
- ▷ *Potentiel électrostatique ;*
- ▷ *Résistance d'un fil conducteur.*

1 La charge totale de la sphère à un instant donné vaut $Q(t) = 4\pi a^2 \sigma(t)$. Entre t et $t + \mathrm{d}t$, une charge $I\,\mathrm{d}t$ se dépose sur la sphère. Ainsi, par conservation de la charge,

$$Q(t+\mathrm{d}t) = Q(t) + I\,\mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad \cancel{Q(t)} + \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\cancel{\mathrm{d}t} = \cancel{Q(t)} + I\,\cancel{\mathrm{d}t}$$

« L'équation différentielle » vérifiée par σ est donc

$$4\pi a^2 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = I$$

d'où on déduit

$$\boxed{\sigma(t) = \frac{I}{4\pi a^2} t\,.}$$

en supposant la sphère complètement déchargée à l'instant initial.

2 En négligeant l'influence du fil comme le sous-entend l'énoncé, la distribution de charge est à symétrie sphérique. Ainsi,

$$\vec{E} = E_r(r)\,\vec{e}_r\,.$$

En prenant comme surface de Gauss une sphère de rayon r, la charge intérieure est nulle si $r < a$ et égale à σa^2 si $r > a$. On en déduit que le champ est nul à l'intérieur de la sphère et vaut

$$\vec{E} = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0\, r^2}\,\vec{e}_r$$

à l'extérieur. On en déduit le potentiel par application de la définition,

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

Par séparation de variable et intégration entre l'infini et la surface de la sphère, on en déduit

$$\int_0^{V_\mathrm{s}} \mathrm{d}V = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0}\int_\infty^a \frac{-1}{r^2}\,\mathrm{d}r \qquad \text{soit} \qquad V_\mathrm{s} = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_\infty^a$$

et ainsi

$$\boxed{V_\mathrm{s} = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\,.}$$

3 La tension aux bornes du fil orienté en convention récepteur est donc $U = V_0 - V_\mathrm{s}$, qui dépend du temps car σ donc V_s en dépendent. On en déduit que le courant qui le parcourt dépend lui aussi du temps et vaut

$$I = \frac{U}{R} = \frac{V_0 - \dfrac{\sigma(t) a}{\varepsilon_0}}{\ell/\gamma S} = \frac{\gamma S V_0}{\ell} - \frac{\gamma S a}{\varepsilon_0 \ell}\sigma(t)\,.$$

Le bilan de charge établi précédemment prend maintenant la forme

$$4\pi a^2 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = I(t) = \frac{\gamma S V_0}{\ell} - \frac{\gamma S a}{\varepsilon_0 \ell}\sigma(t)\,.$$

On en déduit l'équation différentielle vérifiée par σ,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{\gamma S}{4\pi\varepsilon_0 a\ell}}_{=1/\tau}\sigma = \frac{\gamma S V_0}{4\pi a^2 \ell}\,.}$$

Une solution particulière σ_∞ de cette équation est

$$0 + \frac{\gamma S}{4\pi\varepsilon_0 a\ell}\sigma_\infty = \frac{\gamma S V_0}{4\pi a^2\ell} \qquad \text{soit} \qquad \sigma_\infty = \frac{\varepsilon_0 V_0}{a}\,.$$

La forme générale des solutions est donc

$$\sigma(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{\varepsilon_0 V_0}{a}\,.$$

Comme la charge initiale est nulle, on en déduit directement $A = -\varepsilon_0 V_0/a$ d'où

$$\boxed{\sigma(t) = \frac{\varepsilon_0 V_0}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.}$$

Mouvement des particules chargées

Exercice 2 : Gravure ionique

2 | 2

- *Mouvement d'une charge dans un potentiel ;*
- *Conservation de la charge ;*
- *Équation de Poisson.*

1 L'ion n'est soumis qu'à la force de Lorentz électrique, qui dérive de l'énergie potentielle $E_\mathrm{p} = eV(x)$. Son énergie mécanique est donc constante, et comme l'ion part sans vitesse de la grille de potentiel nul on en déduit

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv^2 + eV \underset{\substack{\uparrow\\ \mathrm{CI}}}{=} 0$$

On en déduit qu'en tout x la vitesse s'écrit

$$\boxed{v(x) = \sqrt{-\frac{2eV(x)}{m}} = \sqrt{\frac{2e\,|V(x)|}{m}}\,.}$$

Comme $|V_1| > |V_0|$, alors $v(x_1) > v(x_0)$ donc le cation est accéléré entre la grille 0 et la grille 1. De même, comme $|V_2| < |V_1|$ alors le cation ralentit entre la grille 1 et la grille 2.

2 La situation est unidimensionnelle, donc le vecteur densité de courant $\vec{j}$ ne dépend que de x. En régime stationnaire, l'équation de conservation de la charge se simplifie en

$$\operatorname{div}\vec{j} = \frac{\mathrm{d}j_x}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \text{soit} \qquad j_x = J_0 = \text{cte} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\vec{j} = J_0\,\vec{e}_x}\,.$$

3 D'après l'équation de Poisson dans ce cas unidimensionnel,

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} = 0\,.$$

Comme tous les cations ont la même charge e, la densité de courant et la densité de charge sont reliées par $J_0 = n(x)\,e\,v(x)$, d'où

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} + \frac{J_0}{\varepsilon_0\,v(x)} = 0\,.$$

Enfin, la conservation de l'énergie mécanique d'un ion donne

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} + \frac{J_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{-2eV}} = 0\,.}$$

4 En identifiant la solution donnée par l'énoncé en $x = x_1$, on obtient

$$V(x_1) = V_1 = -\left(\frac{3x_1}{2}\right)^{4/3}\left(\frac{J_0}{\varepsilon_0}\right)^{2/3}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/3}$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned}
V_1^3 &= -\left(\frac{3x_1}{2}\right)^{4}\left(\frac{J_0}{\varepsilon_0}\right)^{2}\left(\frac{m}{2e}\right)\\
\left(\frac{J_0}{\varepsilon_0}\right)^{2} &= -\frac{2e}{m}V_1^3\left(\frac{2}{3x_1}\right)^{4}\\
J_0 &= \varepsilon_0\sqrt{-\frac{2e}{m}V_1^3}\left(\frac{2}{3x_1}\right)^{2}\\
J_0 &= \frac{4}{9}\frac{\varepsilon_0}{x_1^2}\sqrt{\frac{2e}{m}|V_1|^3}\\
&\boxed{J_0 = \underbrace{\frac{4}{9}\frac{\varepsilon_0}{x_1^2}\sqrt{\frac{2e}{m}}}_{=k}|V_1|^{3/2}\,.}
\end{aligned}$$

5 La charge électrique totale Q_{tot} atteignant le substrat pendant Δt est reliée d'une part au nombre de cations, et d'autre part à l'intensité du faisceau,

$$Q_{\text{tot}} = Ne = I\,\Delta t \qquad \text{d'où} \qquad Ne = J_0\,S\,\Delta t \qquad \text{soit} \qquad \boxed{N = \frac{J_0\,S}{e}\Delta t = \frac{k\,|V_1|^{3/2}\,S}{e}\Delta t\,.}$$

En approximant le potentiel au niveau du substrat à celui de la grille 2 très proche, on déduit de la question 1 que la vitesse des ions lorsqu'ils atteignent le substrat vaut

$$\boxed{v_{\text{s}} = \sqrt{\frac{2e\,|V_2|}{m}}\,.}$$

Ainsi, le dispositif envisagé permet bien de contrôler le nombre de cations via la grille 1 et leur vitesse par l'intermédiaire de la grille 2.

Exercice 3 : Diode à vide

inspiré oral banque PT | 2 | 2

- ▷ *Équation de Poisson ;*
- ▷ *Mouvement d'une charge dans un potentiel ;*

1 Un problème physique est dit à symétrie cylindrique lorsqu'il est invariant par toute rotation autour de l'axe (Oz).

2 L'espace entre les deux électrodes est vide, donc d'après l'équation de Poisson,

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = 0\,.$$

Par une première intégration, on trouve

$$r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = A = \text{cte} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \frac{A}{r}$$

et une deuxième intégration donne

$$V(r) = A\ln r + B \qquad \text{avec} \qquad A, B = \text{cte}\,.$$

Les constantes se trouvent avec les conditions aux limites,

$$\begin{cases} V(r{=}R_A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{calcul}}}{=} A\ln R_A + B \\ V(r{=}R_C) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} U_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{calcul}}}{=} A\ln R_C + B \end{cases}$$

Par soustraction, il vient

$$U_0 = A\ln\frac{R_C}{R_A} \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{U_0}{\ln(R_C/R_A)}\,,$$

et on en déduit

$$B = -\frac{U_0}{\ln(R_C/R_A)}\ln R_A$$

Finalement,

$$V(r) = \frac{U_0}{\ln(R_C/R_A)}\ln r - \frac{U_0}{\ln(R_C/R_A)}\ln R_A \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{V(r) = \frac{\ln(r/R_A)}{\ln(R_C/R_A)}U_0\,.}$$

3 Un électron est une particule chargée négativement, qui se déplace donc vers les zones de potentiel le plus élevé : pour que la diode soit passante, il faut que les électrons émis à l'anode migrent vers la cathode, soit $U_0 > 0$. Au contraire, si $U_0 < 0$ les électrons resteront bloqués au voisinage de l'anode et ne rejoindront jamais la cathode.

4 Le système étant par hypothèse à symétrie cylindrique, la vitesse d'un électron ne peut dépendre que de r. Sa vitesse initiale est nulle par hypothèse et il n'est soumis qu'à la force de Lorentz électrique, $\vec{F} = -e\vec{E}$, car son poids est négligeable. Comme V ne dépend que de r alors $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ est porté par $\vec{e}_r$, et une double intégration du PFD appliqué à un électron montre que sa vitesse est nécessairement radiale également.

La force de Lorentz dérive de l'énergie potentielle $E_\text{p} = -eV$. Comme l'électron n'est soumis qu'à cette seule force conservative, son énergie mécanique est une constante du mouvement. En l'exprimant en $r = R_A$, on obtient

$$E_\text{m} = \frac{1}{2}mv(r{=}R_A)^2 - e\,V(r{=}R_A) = 0\,.$$

En l'exprimant en r quelconque,

$$E_\text{m} = \frac{1}{2}mv(r)^2 - e\,V(r) = \frac{1}{2}mv(r)^2 - \frac{\ln(r/R_A)}{\ln(R_C/R_A)}eU_0\,.$$

Par conservation de l'énergie mécanique, on en déduit

$$\frac{1}{2}mv(r)^2 = \frac{\ln(r/R_A)}{\ln(R_C/R_A)}eU_0$$

et ainsi

$$\boxed{v(r) = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}\frac{\ln(r/R_A)}{\ln(R_C/R_A)}}\,.}$$

> *On constate que ce résultat n'a pas de sens si $U_0 < 0$, ce qui signifie physiquement que l'électron ne peut pas atteindre la sphère de rayon r.*

5 Compte tenu de la symétrie cylindrique, le vecteur densité de courant s'écrit

$$\vec{j} = j(r)\vec{e}_r \qquad \text{avec} \qquad j(r) = -n(r)\,e\,v(r)\,.$$

L'intensité (orientée de la cathode vers l'anode, en sens opposé au mouvement des électrons) traversant un cylindre de rayon r est indépendante du rayon (conservation de la charge) et est reliée à j par

$$I = \iint \vec{j}\cdot(-\mathrm{d}S\,\vec{e}_r) = 2\pi r H\,j(r)\,.$$

Ainsi,

$$I = 2\pi r H\,n(r)\,e\,v(r) \qquad \text{soit} \qquad n(r) = \frac{I}{2\pi r H\,e\,v(r)}$$

et ainsi

$$\boxed{n(r) = \frac{I}{2\pi r H\,e}\sqrt{\frac{m}{2eU_0}\frac{\ln(R_C/R_A)}{\ln(r/R_A)}}\,.}$$

Exercice 4 : Mesure de salinité

3 | 2

▷ *Loi d'Ohm ;*
▷ *Modèle microscopique.*

1 Étudions le mouvement de l'ion dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Il est soumis à la force de Lorentz électrique et la force $\vec{F}$. Ainsi, d'après le théorème de la résultante cinétique,

$$m_i \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = z_i e \vec{E} - \alpha_i r_i \vec{v}_i \,,$$

ce qui se réécrit sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha_i r_i}{m_i}\vec{v}_i = \frac{z_i e}{m_i}\vec{E} \,.$$

La durée du régime transitoire est donnée (en ordre de grandeur) par le temps caratéristique apparaissant dans cette équation,

$$\boxed{\tau_i = \frac{m_i}{\alpha_i r_i} \,,}$$

alors que la vitesse limite en est la solution particulière constante,

$$\boxed{\vec{v}_{i\infty} = \frac{z_i e}{\alpha_i r_i}\vec{E} \,.}$$

2 Par définition, la densité volumique de courant dû aux ions de type i est reliée à leur vitesse limite par

$$\vec{j}_i = n_i \, z_i e \, \vec{v}_{i\infty}$$

avec n_i la densité volumique d'ions, c'est-à-dire le nombre d'ions par unité de volume, qui est relié à la concentration molaire c_i par $n_i = \mathcal{N}_\mathrm{A} c_i$. On en déduit

$$\vec{j}_i = \mathcal{N}_\mathrm{A} c_i \frac{(z_i e)^2}{\alpha_i r_i}\vec{E}$$

Ainsi, la densité volumique totale de courant dans la solution vaut

$$\vec{j} = \sum_i \vec{j}_i = \mathcal{N}_\mathrm{A} e^2 \left(\sum_i \frac{{z_i}^2}{\alpha_i r_i} c_i \right) \vec{E}$$

ce qui permet d'identifier la conductivité

$$\boxed{\sigma = \mathcal{N}_\mathrm{A} e^2 \sum_i \frac{{z_i}^2}{\alpha_i r_i} c_i \,.}$$

On constate que la charge z_i intervient au carré dans l'expression : les cations et les anions contribuent donc **de la même façon** à la conductivité, alors qu'on aurait pu imaginer que leurs effets se compensent. On retrouve la **loi de Kohlrausch** reliant la conductivité d'une solution à la concentration des ions, que vous connaissez depuis le lycée sous la forme

$$\sigma = \sum_i \Lambda_i c_i \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\Lambda_i = \mathcal{N}_\mathrm{A} e^2 \frac{{z_i}^2}{\alpha_i r_i} \,,}$$

où Λ_i est la conductivité molaire ionique de l'ion i.

3 La résistance de la portion de solution entre les électrodes est celle d'un conducteur unidimensionnel de longueur ℓ et de section A, elle vaut donc

$$\boxed{R = \frac{\ell}{\sigma A} \,.}$$

Un conductimètre **impose une tension** aux bornes de la cellule de conductimétrie puis **mesure le courant** qui traverse la solution. Une opération d'**étalonnage** donne le rapport ℓ/A (souvent appelé constante de cellule en chimie), ce qui permet de remonter à la conductivité σ.

4 La cellule fonctionne de manière analogue à un condensateur : lorsqu'une tension est imposée, des charges sont apportées par le générateur et vont se regrouper sur les électrodes. Les ions sont alors **attirés par l'électrode de charge opposée** à la leur, sur laquelle **ils vont s'accumuler**. Ce faisant, la charge résultante sur l'électrode **diminue jusqu'à s'annuler** si bien que la solution n'est plus traversée par aucun courant alors même qu'une tension est toujours appliquée à ses bornes.

*On parle alors d'**écrantage** (du mot « écran ») par les ions de la charge portée par l'électrode.*

Une tension alternative est plus appropriée car les ions sont alternativement attirés par l'une ou l'autre électrode, ce qui **empêche le phénomène d'accumulation** et d'écrantage discuté précédemment. Cependant, la conductivité est définie en régime permanent : le régime transitoire du mouvement des ions doit toujours rester **de durée négligeable** devant la période des variations de tensions. Quantitativement, cela se traduit par

$$\boxed{\forall i, \quad \tau_i f \ll 1\,.}$$

5 Notons V le volume d'un échantillon contenant $m_0 = 1\,\mathrm{kg}$ d'eau de mer, ρ_0 sa masse volumique et m la masse totale d'ions qu'il contient. Par définition de la salinité S,

$$S = \frac{m}{m_0} = \frac{m}{\rho_0 V}\,.$$

De plus,

$$m = \sum_i m_i = \sum_i c_i V\, M_i \qquad \text{soit} \qquad S = \frac{1}{\rho_0}\sum_i c_i M_i\,.$$

avec M_i la masse molaire de l'ion i. On définit x_i la proportion de l'ion i dans la solution : en notant c la concentration totale en ions de la solution, on a

$$c = \sum_i c_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_i = \frac{c_i}{c}\,.$$

Les proportions des différents types d'ions sont indépendantes de l'échantillon considéré, c'est-à-dire que seule la concentration totale c varie. Ainsi,

$$S = \frac{1}{\rho_0}\sum_i c_i M_i = c\frac{\sum_i x_i M_i}{\rho_0} = Ac \qquad \text{et} \qquad \sigma = \sum_i \Lambda_i c_i = c\sum_i \Lambda_i x_i = Bc$$

avec A et B sont deux constantes caractéristiques de l'eau de mer mais indépendantes de l'échantillon.

Pour bien comprendre, on peut voir que chacun des termes $x_i M_i$ ou $\Lambda_i x_i$ est indépendant de l'échantillon, donc leur somme l'est forcément.

Ainsi, la salinité s'exprime par

$$S = \frac{A}{B}\sigma = \frac{\sum_i x_i M_i}{\rho_0 \sum_i \Lambda_i c_i}\,\sigma\,.$$

Mesurer la conductivité σ_0 d'une solution de salinité S_0 connue permet de s'affranchir du rapport A/B : la salinité S d'une solution d'eau de mer de conductivité mesurée σ vaut

$$S = \frac{S_0}{\sigma_0}\sigma\,.$$

Loi d'Ohm

Exercice 5 : Chute ohmique dans un électrolyseur 2 | 2 |

▷ *Loi d'Ohm locale et intégrale ;*
▷ *Coordonnées cylindriques.*

1 Par définition, l'intensité est le flux du vecteur densité de courant. En raisonnant sur une surface cylindrique,

$$I = \iint \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = j(r)\times 2\pi r h \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{j(r) = \frac{I}{2\pi r h}\,.}$$

D'après la loi d'Ohm locale,

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\vec{E} = \frac{I}{2\pi\sigma r h}\,\vec{e}_r\,.}$$

2 Le champ électrique peut être relié à la tension imposée entre les deux électrodes par l'intermédiaire du potentiel. En effet, compte tenu de la géométrie particulière,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{I}{2\pi\sigma r h}\,.$$

On intègre par séparation des variables entre $r = r_2$ et $r = r_1$,

$$\int_{V(r_2)}^{V(r_1)} \mathrm{d}V = -\frac{I}{2\pi\sigma h}\int_{r_2}^{r_1}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

ce qui donne

$$U = -\frac{I}{2\pi\sigma h}\ln\frac{r_1}{r_2} \qquad \text{soit} \qquad U = \frac{I}{2\pi\sigma h}\ln\frac{r_2}{r_1}\,.$$

Par identification avec la loi d'Ohm intégrale, on en déduit

$$\boxed{R = \frac{1}{2\pi\sigma h}\ln\frac{r_2}{r_1}\,.}$$

3 La puissance dissipée par effet Joule dans la solution vaut

$$\boxed{\mathcal{P} = RI^2 = \frac{I^2}{2\pi\sigma h}\ln\frac{r_2}{r_1}\,.}$$

On peut également l'obtenir en intégrant la densité volumique de puissance Joule,

$$p = \vec{j}\cdot\vec{E} = \frac{j(r)^2}{\sigma} = \frac{1}{4\pi^2 r^2 h^2 \sigma} I^2$$

soit en intégrant sur l'espace compris entre les deux électrodes,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} = \iiint p\,\mathrm{d}\tau &= \iiint \frac{1}{4\pi^2 r^2 h^2\sigma} I^2 \times r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{4\pi^2 h^2\sigma}\times\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}\times\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\times\int_0^h\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{4\pi^2 h^2\sigma}\times\ln\frac{r_2}{r_1}\times 2\pi\times h \\
&\boxed{\mathcal{P} = \frac{I^2}{2\pi\sigma h}\ln\frac{r_2}{r_1}\,.}
\end{aligned}$$

> *On montre dans le cours d'électrochimie que la tension totale à imposer aux bornes de l'électrolyseur se décompose en trois contributions : une contribution thermodynamique (liée à l'écart des potentiels de Nernst), une contribution cinétique (surtensions à vide et à courant non nul) et une contribution ohmique. La tension U considérée dans cet exercice correspond à cette dernière contribution, mais comme les deux autres ne sont pas prises en compte, elle ne correspond en réalité pas directement à la tension imposée par le générateur à l'électrolyseur.*

Exercice 6 : Accident de pêche

oral Centrale MP | 3 | 2

- *Loi d'Ohm locale et intégrale ;*
- *Champ magnétique.*

1 Le courant dans une ligne haute tension oscille à la fréquence de 50 Hz, soit une période de 20 ms. Or pour se propager sur une longueur $L = 10\,\mathrm{m}$, une onde électromagnétique met une durée $L/c = 3\cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$, négligeable devant la période d'oscillation, ce qui justifie de travailler dans l'ARQS.

2 La résistance électrique de l'échantillon vaut

$$R = \frac{L}{\sigma S}\,.$$

Définissons un axe z le long de la canne à la pêche, l'origine $z = 0$ étant située au sommet et $z = L$ à sa base. Une section de la canne s'assimile à un anneau circulaire d'épaisseur e et de rayon

$$r(z) = \frac{a}{L} z \qquad \text{avec} \qquad a = 2\,\text{cm}\,.$$

Elle a donc pour aire

$$S(z) = 2\pi\, r(z)\, e = \frac{2\pi a e}{L} z\,.$$

Ainsi, un tronçon de canne à pêche d'épaisseur dz a pour résistance

$$\mathrm{d}R = \frac{\mathrm{d}z}{\sigma S(z)} = \frac{L}{2\pi a e} \frac{\mathrm{d}z}{z}\,.$$

Les différents tronçons étant montés en série, on a

$$R_\text{c} = \int \mathrm{d}R$$

... mais se pose le problème (mathématique) de la divergence de l'intégrale en $z = 0$, ce qui n'est pas un vrai problème physique puisque la pointe ne peut pas être infiniment fine. Pour contourner la difficulté, on peut imaginer intégrer sur le rayon et considérer par exemple que le rayon minimal au sommet du cône est égal à l'épaisseur du métal,

$$R_\text{c} = \int \frac{L}{2\pi a e} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_e^a \frac{L}{2\pi a e} \frac{\mathrm{d}r}{r}$$

ce qui donne alors

$$\boxed{R_\text{c} = \frac{L}{2\pi a e} \ln \frac{a}{e} = 5{,}9 \cdot 10^5\,\Omega\,.}$$

On peut légitimement s'interroger sur le choix très arbitraire du rayon minimal. Toutefois, compte tenu de la présence du logarithme, il n'est pas si critique numériquement : choisir comme rayon minimal $a/10 = 2\,\text{mm}$ donne $R = 3{,}7 \cdot 10^5\,\Omega$. À défaut d'être une valeur précise, l'ordre de grandeur obtenu est fiable.

3 Le pêcheur tient la canne à pêche dans sa main, la résistance de la canne et celle du pêcheur sont donc montées en série. En pratique, à notre niveau d'approximation, la résistance du pêcheur est négligeable devant celle de la canne et on a donc

$$R_\text{tot} = R_\text{c} + R_\text{p} \simeq R_\text{c} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{I = \frac{U_\text{max}}{R_\text{c}} \simeq 0{,}15\,\text{A}\,.}$$

C'est un courant extrêmement élevé par rapport à ce que peut supporter le corps : le seuil de fibrilation cardiaque irréversible est de 75 mA, le pêcheur risque de ne pas s'en remettre.

4 Modélisons le pêcheur par un cylindre uniforme de hauteur 2 m et de diamètre $d = 30\,\text{cm}$, dans lequel le courant se répartit de façon uniforme avec une densité volumique de courant

$$j = \frac{I}{\pi d^2/4}\,.$$

On en déduit la norme du champ électrique,

$$\boxed{E = \frac{j}{\sigma} = 2 \cdot 10^{-6}\,\text{V}\cdot\text{m}^{-1}\,.}$$

On peut ensuite calculer le champ magnétique à l'intérieur du corps, c'est une question de cours sur le théorème d'Ampère, et pour $r < d/2$ on a

$$\vec{B}(r) = \mu_0 \frac{2r}{\pi d^2} I\, \vec{e}_\theta\,.$$

En se plaçant dans le cas le plus défavorable, en $r = d/2$, le champ a pour norme

$$\boxed{B_\text{max} = \frac{\mu_0}{\pi d} I = 2 \cdot 10^{-7}\,\text{T}\,.}$$

Ainsi, le pacemaker ne risque pas d'être endommagé ... au contraire du pêcheur ☺

Exercice 7 : Magnétorésistance, effet Corbino 3 | 3

▷ *Loi d'Ohm locale ;*
▷ *Modèle microscopique.*

1 Étude des invariances : le potentiel ne dépend que de r, donc $\vec{E} = E_r(r)\vec{e}_r$ et idem pour $\vec{j}$. Pour exprimer l'intensité, on intègre au travers d'un cylindre de rayon r compris entre R_1 et R_2 et de hauteur h :

$$I = j_r(r) \times 2\pi r\, h$$

puis on utilise la loi d'Ohm locale et on sépare les variables :

$$I = -2\pi r\, h\, \gamma \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$$
$$\int_{V_1}^{V_2} \mathrm{d}V = -\frac{I}{2\pi\gamma h}\int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{d}r}{r}$$
$$-U = -\frac{I}{2\pi\gamma h} \ln\frac{R_2}{R_1}$$

car en convention récepteur $U = V_1 - V_2$ vu le sens donné à I, d'où

$$\boxed{R_0 = \frac{1}{2\pi\gamma h}\ln\frac{R_2}{R_1}\,.}$$

2 Le PFD appliqué à un électron donne

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\left(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right) - \frac{ne^2}{\gamma_0}\vec{v}\,.$$

En supposant l'accélération de l'électron négligeable devant les forces mises en jeu (même si elle n'est pas rigoureusement nulle, puisque la trajectoire est incurvée, contrairement au cas habituel du modèle de Drude), il vient

$$-e\left(\vec{E} + \frac{\vec{j}}{-ne}\wedge\vec{B}\right) - \frac{ne^2}{\gamma_0}\frac{\vec{j}}{-ne} = \vec{0}$$
$$\boxed{\vec{E} - C_{\mathrm{H}}\,\vec{j}\wedge\vec{B} - \frac{1}{\gamma_0}\vec{j} = \vec{0}\,.}$$

3 Le champ électrique est inchangé par rapport à la question précédente. En exprimant les trois vecteurs en coordonnées cylindriques, avec $\vec{j} = j_r\,\vec{e}_r + j_\theta\,\vec{e}_\theta + j_z\,\vec{e}_z$, il vient

$$\begin{cases} E_r - C_{\mathrm{H}} j_\theta B - \dfrac{1}{\gamma_0} j_r = 0 \\ 0 + C_{\mathrm{H}} j_r B - \dfrac{1}{\gamma_0} j_\theta = 0 \\ 0 + 0 - \dfrac{1}{\gamma_0} j_z = 0 \end{cases}$$

Le courant électrique sortant de l'anneau n'est toujours donné que par la composante radiale de $\vec{j}$,

$$I = \iint \vec{j}\cdot\mathrm{d}S\,\vec{e}_r = \iint j_r(r)\mathrm{d}S\,.$$

En éliminant j_θ entre les deux premières équations, il vient

$$j_r = \frac{\gamma_0}{1 + C_{\mathrm{H}}^2 B^2 {\gamma_0}^2} E_r\,.$$

Tout se passe comme si le champ magnétique modifiait la conductivité du milieu. On en déduit directement la résistance apparente en remplaçant la conductivité,

$$\boxed{R = (1 + C_{\mathrm{H}}^2 B^2 {\gamma_0}^2) R_0\,.}$$

4 Les lignes de courant sont inclinés d'un angle α avec $\overrightarrow{e_r}$ tel que

$$\tan\alpha = \frac{j_r}{j_\theta}\,.$$

En reprenant les expressions précédentes, on obtient

$$\tan\alpha = \frac{1}{\gamma_0 C_\mathrm{H} B}\,,$$

5 En revenant à l'interprétation mécanique de $\overrightarrow{j}$ par rapport à la vitesse de l'électron,

$$\tan\alpha = \frac{-ne\,\dot{r}}{-ne\,r\dot{\theta}} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} - \tan\alpha r = 0$$

ce qui se résout en

$$r(\theta) = R_1\,\mathrm{e}^{+\theta\,\tan\alpha}$$

On en déduit alors que la courbe $r(\theta)$ est une spirale exponentielle. Qualitativement, la présence du champ magnétique rallonge les lignes de courant, il y a donc plus de frottement avec le réseau cristallin, et donc une résistance électrique plus grande.