



BLAISE PASCAL
PT 2023-2024

TD 17 – Électromagnétisme

Champ magnétique

Théorème d'Ampère

- Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
- Difficulté technique et calculatoire ;
- Exercice important.



Flasher ce code pour accéder au corrigé

Ceinture		Proposition de parcours d'entraînement
	Ceinture blanche	Questions de cours + exercices 1, 2 et 5
	Ceinture jaune	Questions de cours + exercices 1, 2, 4, 5 et 6
	Ceinture rouge	Questions de cours (★) + exercices 1 et 3 à 6
	Ceinture noire	Questions de cours (★) + exercices 1 et 3 à 7

Questions et applications de cours

Seuls les étudiants du groupe PT* seront interrogés en colle sur les questions marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !

17.1 - Établir l'expression du champ magnétostatique créé par un fil rectiligne infiniment fin parcouru par un courant d'intensité I .

17.2 - Établir l'expression du champ magnétostatique créé par un cylindre d'axe (Oz) , de rayon R , parcouru par une densité volumique de courant $\vec{j} = J_0 \vec{e}_z$ uniforme.

17.3 - Établir l'expression du champ magnétostatique créé en tout point de l'espace par un solénoïde d'axe (Oz) formé de n spires par unité de longueur et parcouru par un courant d'intensité I . Pour mener le calcul à son terme, le champ doit être partiellement fourni par l'interrogateur :

- ▷ ou bien on admettra que le champ à l'extérieur du solénoïde est uniformément nul ;
- ▷ ou bien on admettra que le champ sur l'axe du solénoïde vaut $\mu_0 n I \vec{e}_z$.

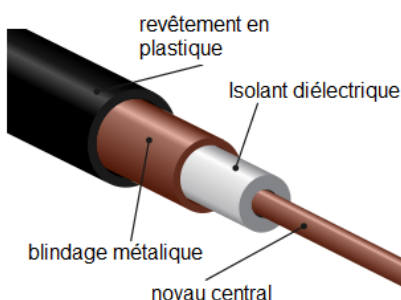
17.4 - Établir l'expression de l'inductance d'une bobine de grande longueur assimilée à un solénoïde infini « en passant par le flux propre ».

17.5 - Établir l'expression de l'inductance d'une bobine de grande longueur assimilée à un solénoïde infini « en passant par l'énergie ».

Exercice 1 : Câble coaxial

1 | 2 |

- ▷ Théorème d'Ampère ;
- ▷ Inductance propre ;
- ▷ Énergie magnétique.



Les câbles coaxiaux servent à transmettre des signaux basse fréquence. Ils sont utilisés quotidiennement, par exemple dans les installations de télévision domestiques, les émetteurs WiFi, etc. Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs cylindriques de même axe (Oz) : un noyau ou âme, de rayon a , et un blindage, de rayon $b > a$, séparés par un matériau isolant.

L'âme est parcourue par un courant constant I , dirigé selon $+\vec{e}_z$, uniformément réparti en volume. Le blindage, d'épaisseur négligeable, est parcouru par un courant exactement opposé réparti à sa surface. L'isolant étant non magnétique, sa perméabilité est égale à celle du vide μ_0 .

- 1 - Déterminer la densité volumique de courant \vec{J} dans l'âme.
- 2 - Calculer le champ magnétique en tout point de l'espace.
- 3 - Déterminer l'énergie magnétique \mathcal{E}_m stockée dans un tronçon de câble de longueur h .
- 4 - En déduire l'inductance \mathcal{L} par unité de longueur du câble.

✎ **Correction** — Raisonsnons sur la figure 1.

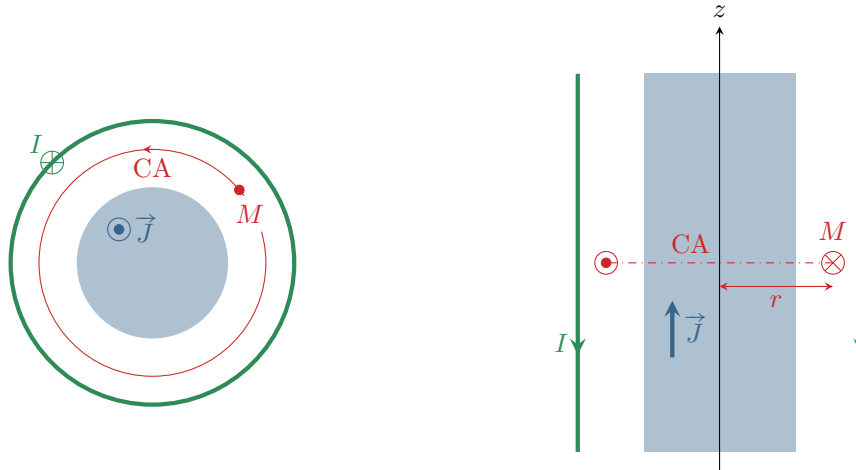


Figure 1 – Distribution de courant dans le câble coaxial.

1 - Le courant dans l'âme est dirigé selon l'axe (Oz) , donc $\vec{J} = J\vec{e}_z$, et l'intensité vaut I , donc

$$I = \iint_{\text{âme}} \vec{J} \cdot \vec{dS} = J \times \pi a^2 \quad \text{d'où} \quad \boxed{J = \frac{I}{\pi a^2}}.$$

Question d'analyse 1 - Détailler le calcul de l'intégrale. Pourquoi est-il inutile d'exprimer explicitement \vec{dS} ?

2 - • **Symétries** : le plan $\Pi_s = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc le champ magnétique est orthogonal à ce plan,

$$\vec{B}(M) = B_\theta(M)\vec{e}_\theta.$$

Question d'analyse 2 - Représenter le plan Π_s sur les deux schémas.

Question d'analyse 3 - Identifier un plan d'anti-symétrie de la distribution. Qu'en déduit-on sur le champ magnétique ?

• **Invariances** : la distribution de courant est invariante par toute translation d'axe (Oz) et toute rotation autour de cet axe, donc

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r)\vec{e}_\theta.$$

• **Contour d'Ampère** : cercle de rayon r passant par M .

• **Circulation** :

$$\oint_{CA} \vec{B} \cdot \vec{dl} = B_\theta(r) \times 2\pi r.$$

Question d'analyse 4 - Détailler le calcul de l'intégrale. Pourquoi est-il inutile d'exprimer explicitement \vec{dl} ?

• **Courant enlacé** : il est nécessaire de procéder par disjonction de cas.

- ▷ si $r \leq a$, $I_{\text{enl}} = +J\pi r^2 = Ir^2/a^2$;
- ▷ si $a \leq r < b$, $I_{\text{enl}} = +I$;
- ▷ si $r > b$, $I_{\text{enl}} = +I - I = 0$.

Question d'analyse 5 - Justifier les trois expressions du courant enlacé.

• **Conclusion** : d'après le théorème d'Ampère,

$$2\pi r B_\theta(r) = \mu_0 I_{\text{enl}}.$$

Ainsi, en reprenant ce qui précède,

$$\begin{cases} \vec{B}(r \leq a) = \mu_0 \frac{I}{2\pi a^2} r \vec{e}_\theta \\ \vec{B}(a \leq r < b) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \\ \vec{B}(r > b) = \vec{0} \end{cases}$$

3 - L'énergie magnétique totale stockée dans le tronçon de câble s'écrit

$$\mathcal{E}_m = \iiint_{\text{câble}} \frac{B(M)^2}{2\mu_0} d\tau.$$

L'expression de \vec{B} n'étant pas la même dans tous les domaines, le plus simple est de décomposer l'intégrale

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \iiint_{\text{âme}} \frac{1}{2\mu_0} \left(\mu_0 \frac{I}{2\pi a^2} r \right)^2 r dr d\theta dz + \iiint_{\text{isolant}} \frac{1}{2\mu_0} \left(\mu_0 \frac{I}{2\pi r} \right)^2 r dr d\theta dz \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 a^4} \int r^3 dr \int d\theta \int dz + \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2} \int \frac{dr}{r} \int d\theta \int dz \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 a^4} \times \frac{a^4}{4} \times 2\pi \times h + \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2} \times \ln \frac{b}{a} \times 2\pi \times h \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} h \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right) \end{aligned}$$

Question d'analyse 6 - Compléter les bornes d'intégration sur la deuxième ligne du calcul.

4 - En identifiant à la définition énergétique de l'inductance,

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} h \mathcal{L} I^2,$$

on obtient

$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right).$$

Question d'analyse 7 - Retrouver le lien entre l'inductance L du tronçon de câble et l'inductance par unité de longueur \mathcal{L} .

Exercice 2 : Cylindre parcouru par un courant inhomogène



- ▷ Théorème d'Ampère ;
- ▷ Coordonnées cylindriques.

On considère un câble cylindrique de rayon R et d'axe z parcouru par un courant d'intensité I réparti de façon non uniforme au sein du câble,


$$\vec{j}(r) = J_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \vec{e}_z.$$

- 1 - Exprimer J_0 en fonction de I .
- 2 - Calculer le champ magnétostatique créé par ce câble en tout point de l'espace.
- 3 - Vérifier que le champ trouvé obéit bien à l'équation de Maxwell-Ampère.

$$\text{Donnée : } \vec{\text{rot}} \vec{B} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

Exercice 3 : Fil conducteur creux

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2


 ▷ Théorème d'Ampère ;
 ▷ Principe de superposition.

Un fil conducteur épais de rayon R et d'axe \vec{u}_z est parcouru par un courant de densité $j\vec{u}_z$ uniforme.


- 1 - Déterminer le champ \vec{B}_0 en tout point M de l'espace.
- 2 - Exprimer \vec{B}_0 en fonction de \vec{u}_z et \vec{OM} .

On suppose maintenant que le fil est creux et présente une cavité cylindrique parallèle à l'axe du cylindre mais décentrée par rapport à cet axe. Dans le reste du cylindre, la densité de courant est toujours égale à j .

- 3 - Calculer le champ magnétique dans la cavité.

Exercice 4 : Modèle de Bean d'un supraconducteur

💡 2 | ✂️ 2


 ▷ Équation de Maxwell-Ampère ;
 ▷ Principe de superposition.

Un supraconducteur est un matériau capable de conduire l'électricité sans aucune résistance lorsqu'il est porté à température suffisamment faible. Les applications incluent la transmission d'énergie sans perte, la création d'aimants puissants pour l'IRM médicale, la lévitation magnétique des trains à grande vitesse, ou encore la conception de détecteurs sensibles de champs magnétiques.

Parmi les nombreuses propriétés physiques associées à la supraconductivité figure l'effet Meissner : qualitativement, le champ magnétique à l'intérieur d'un supraconducteur est toujours nul, quel que soit le champ extérieur. Cet effet peut s'interpréter par l'apparition de courants à la surface du supraconducteur, qui créent un champ venant compenser le champ extérieur. Le modèle de Bean suppose ces courants répartis en volume dans une couche d'épaisseur δ , avec une densité volumique J_c uniforme, appelée densité de courant critique, qui est une caractéristique de chaque matériau. Dans ce modèle, c'est l'épaisseur δ qui varie en fonction de l'intensité du champ extérieur.

Cet exercice a pour objectif d'estimer l'épaisseur δ dans une géométrie de type ruban, où l'une des dimensions du supraconducteur est très inférieure aux deux autres, voir figure 2 : on suppose l'échantillon infini dans les directions (Oy) et (Oz) , d'épaisseur $2a$ dans la direction (Ox) , placé dans un champ extérieur $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_y$. Une telle géométrie est très utilisée en pratique car elle facilite la fabrication et la manipulation des échantillons.

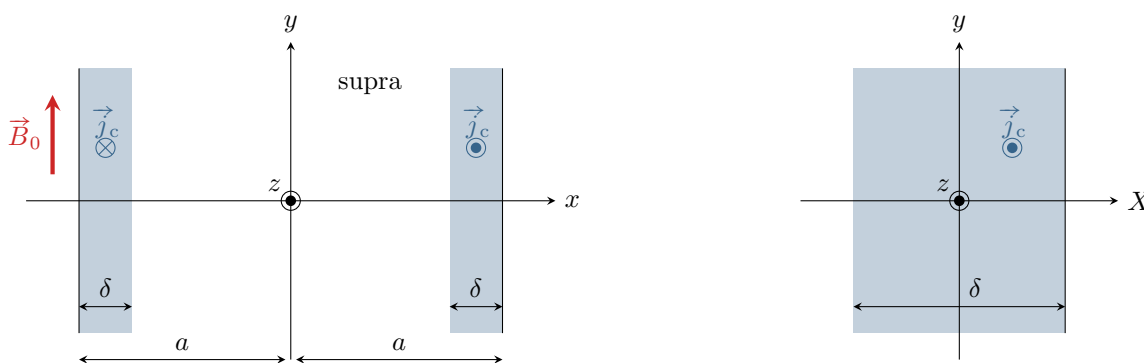


Figure 2 – Modèle de Bean d'un supraconducteur. Gauche : vue d'ensemble du ruban supraconducteur. Droite : zoom sur la couche conductrice de droite.

- 1 - Dans un premier temps, considérons uniquement la couche conductrice située du côté $x > 0$, parcourue par un courant de densité volumique uniforme $\vec{j} = J_c \vec{e}_z$. La variable X est définie de telle sorte que la position $X = 0$ corresponde au milieu de la couche conductrice. Déterminer la direction du champ magnétique créé par cette couche et les variables dont il dépend.
- 2 - Montrer sans calcul que ce champ est nécessairement nul dans le plan $X = 0$.
- 3 - En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, en déduire le champ créé dans tout l'espace par cette couche conductrice uniquement.
- 4 - En prenant désormais en compte l'ensemble du système, déterminer l'épaisseur δ nécessaire pour que le champ magnétique soit nul à l'intérieur du supraconducteur.
- 5 - Représenter graphiquement $\|\vec{B}\|$ en fonction de x pour l'ensemble de l'échantillon.

Exercice 5 : Solénoïdes imbriqués

oral CCINP PSI | 💡 2 | ✂️ 1

- 📈 ▷ Théorème d'Ampère ;
- 📈 ▷ Couplage inductif.

Deux solénoïdes S_1 et S_2 de même axe (Oz), de même longueur ℓ et de rayons r_1 et $r_2 > r_1$ sont emboîtés l'un dans l'autre, voir figure 3. Ils présentent tous deux le même nombre de spires N . On suppose que la longueur ℓ est très supérieure aux rayons.

La bobine intérieure est parcourue par un courant $i_1(t) = I \cos(\omega t)$, avec $I = 1$ A, avec ω une pulsation suffisamment basse pour que l'ARQS magnétique s'applique. La bobine extérieure est en court-circuit.

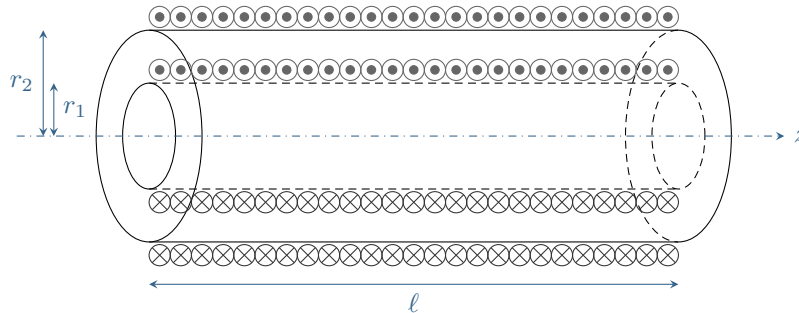


Figure 3 – Solénoïdes imbriqués.

- 1 - Sachant que le champ est nul à l'extérieur, déterminer le champ à l'intérieur d'un solénoïde infini.
- 2 - Déterminer les coefficients d'induction propre L_1 , L_2 , et le coefficient d'induction mutuelle M .
- 3 - En négligeant les résistances internes des fils, déterminer le courant $i_2(t)$ parcourant la bobine extérieure. Quelle est son amplitude ?
- 4 - Que vaut le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde central ?

Exercice 6 : Transformateur torique

💡 2 | ✂️ 2 | ⚡

- 📈 ▷ Théorème d'Ampère ;
- 📈 ▷ Couplage inductif.

On s'intéresse dans cet exercice au transformateur représenté ci-dessous, dans lequel les spires du primaire et du secondaire sont bobinées en alternance autour d'un tore de section carrée. Le primaire compte $N_1 \gg 1$ spires, parcourues en série par le courant i_1 , et le secondaire $N_2 \neq N_1$ spires parcourues par le courant i_2 .

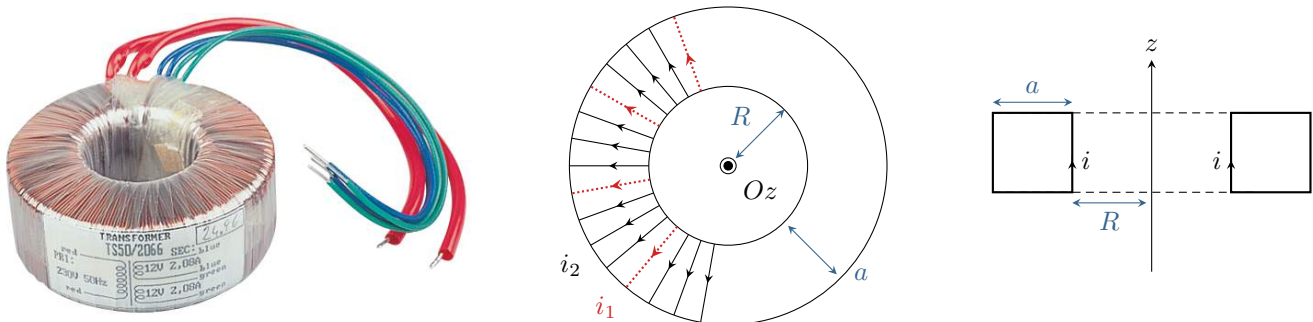
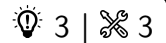



Figure 4 – Transformateur torique à section carrée. Les spires du primaire sont représentées en traits pointillés et les spires du secondaire en traits pleins. Avec ce schéma, on aurait $N_2 = 3N_1$.

- 1 - Calculer le champ \vec{B}_1 créé en tout point de l'espace par le primaire pris seul, puis son inductance propre L_1 .
- 2 - En déduire sans calcul l'inductance propre L_2 du secondaire.
- 3 - Calculer l'inductance mutuelle M . Montrer qu'elle s'exprime simplement en fonction de L_1 et L_2 uniquement.
- 4 - On impose au primaire une tension sinusoïdale $u_1(t) = U_1 \cos(\omega t)$, alors que le secondaire est ouvert. Quelle est la tension $u_2(t)$ mesurée aux bornes du secondaire ? Que se passerait-il si u_1 était constante ?
- 5 - Le transformateur annonce une conversion $230 \text{ V} \rightarrow 12 \text{ V}$. En déduire la valeur numérique du rapport N_1/N_2 .

Exercice 7 : Lévitación magnétique

- 
 ▷ Inductance propre ;
 ▷ Flux magnétique ;
 ▷ Force de Laplace.

🔥🔥🔥 **Attention !** Cet exercice est nettement plus difficile que les autres, bien trop pour la banque PT ... réservé à ceux qui veulent un petit défi ☺

Au Palais de la Découverte, à Paris, une expérience présentée aux visiteurs consiste à faire léviter un plateau métallique en aluminium au-dessus d'une bobine d'une centaine de spires parcourue par un courant alternatif.

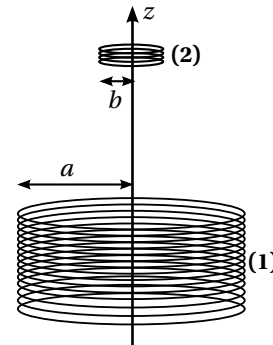


Figure 5 – Lévitación magnétique.

Pour comprendre simplement ce phénomène, considérons un long bobinage, noté (1), de n spires par unité de longueur, d'axe (Oz) et de rayon a . Il est parcouru par un courant alternatif $i_1(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Une bobine circulaire de N spires et de rayon $b \ll a$, notée (2), est placée au-dessus de (1), à une distance z sur l'axe. On se place dans l'ARQS magnétique.

Le champ magnétique créé par le bobinage (1) au centre de la spire (2) s'écrit :

$$\vec{B}(r=0, z, t) = \mu_0 n i_1(t) (1 - \cos \alpha) \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad \tan \alpha = \frac{a}{z}.$$

1 - En supposant que la composante B_z du champ est uniforme sur la section de la bobine (2), déterminer le coefficient d'induction mutuelle M entre les deux bobines.

2 - La bobine (2) présente une résistance R et une inductance propre L . Montrer qu'il y apparaît un courant $i_2(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$, pour lequel on déterminera l'amplitude I_m et $\cos \varphi$.

3 - Le champ \vec{B} créé par la bobine (1) a également une composante radiale $B_r(r, z)$. En raisonnant sur le flux sortant d'un petit cylindre centré sur l'axe (Oz), de hauteur dz et de rayon $r \ll a$, montrer que

$$B_r(r, z, t) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z(0, z, t)}{\partial z}$$

4 - En déduire¹ que

$$B_r(r=b, z, t) = \frac{\mu_0 n i_1(t) b}{2a} \sin^3 \alpha.$$

5 - Calculer la force de Laplace qui s'exerce sur la spire (2), puis sa moyenne temporelle. L'exprimer en fonction notamment de I_m , I_0 et $\cos \varphi$.

6 - Justifier que la spire atteint une position d'équilibre, qu'il n'est pas demandé de déterminer. Étudier sa stabilité.

7 - Expliquer qualitativement comment le modèle à deux bobines permet d'expliquer la lévitation du plateau d'aluminium visible au Palais de la découverte. De quoi les spires de la bobine (2) seraient-elles l'analogue ?

1. Admettez le résultat si vous n'y arrivez pas : les questions intéressantes sont les suivantes, celle-ci est purement technique.