

# Équations de Maxwell

## Énergie électromagnétique

### Plan du cours

<b>I Formulations locale et intégrale de l'électromagnétisme</b>	<b>2</b>
I.A Loi locale, loi intégrale, et passage de l'une à l'autre . . . . .	2
I.B Équations de Maxwell . . . . .	3
I.C Relations de passage . . . . .	4
I.D Exemple : solénoïde parcouru par courant lentement variable . . . . .	5
<b>II Énergie électromagnétique</b>	<b>8</b>
II.A Densité volumique d'énergie électromagnétique . . . . .	8
II.B Vecteur de Poynting . . . . .	8
II.C Bilan d'énergie électromagnétique . . . . .	9
II.D Exemple : bilan d'énergie d'un conducteur ohmique en régime permanent . . . . .	11

### Au programme

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 3 « Équations de Maxwell ».

Dans cette partie, une vision cohérente des lois de l'électromagnétisme est présentée.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Équations de Maxwell : formulations locale et intégrale.	Associer l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday. Citer, utiliser et interpréter les équations de Maxwell sous forme intégrale.
Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) magnétique.	Simplifier les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge dans le cadre de l'ARQS en admettant que les courants de déplacement sont négligeables.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 4 « Énergie du champ électromagnétique ».

Dans cette partie, on s'intéresse à l'aspect énergétique de l'électromagnétisme. [...] L'accent est mis sur les échanges d'énergie entre la matière et le champ électromagnétique, sur l'utilisation du flux du vecteur de Poynting pour évaluer une puissance rayonnée à travers une surface, et sur les bilans d'énergie et de puissance.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.	Établir et utiliser l'expression de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge.
Loi d'Ohm locale, effet Joule.	Analyser les aspects énergétiques dans le cas particulier d'un milieu ohmique.
Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting. Bilans d'énergie.	Utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée. Effectuer un bilan d'énergie sous forme locale et intégrale. Interpréter chaque terme de l'équation locale de Poynting, celle-ci étant donnée.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

## Ces cinq dernières années au concours

- ▷ Écrit : épreuve A 2022, épreuve de modélisation 2023.
- ▷ Oral : de temps en temps.

Ce chapitre a pour but de procéder à une synthèse de nombreuses notions introduites au fur et à mesure des précédents cours d'électromagnétisme. À ce titre, il ne contient que peu de contenu vraiment nouveau.

## I - Formulations locale et intégrale de l'électromagnétisme

### I.A - Loi locale, loi intégrale, et passage de l'une à l'autre

- **Notion de loi locale et intégrale**



Une loi physique reliant entre elles deux champs quelconques  $X(M, t)$  et  $Y(M, t)$  est dite **locale** si elle implique ces deux champs uniquement au même point  $M$ , et **intégrale** si elle implique des propriétés globales de ces champs sur un domaine étendu de l'espace.

Formellement, une loi locale se traduit par une équation différentielle ou une équations aux dérivées partielles, alors qu'une loi intégrale fait apparaître ... des intégrales! En pratique, les lois locales font régulièrement intervenir les opérateurs de l'analyse vectorielle : gradient, divergence, rotationnel, laplacien ... alors que les lois intégrales font souvent apparaître des flux ou des circulations.

**Exemples :**

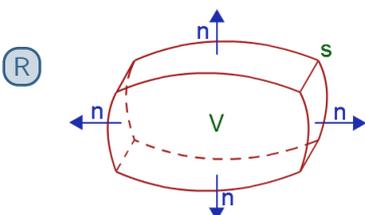
Loi locale	Loi intégrale
Loi des nœuds	Loi des mailles
Th de l'énergie cinétique en puissance	Th de l'énergie cinétique sur une trajectoire
Relation de la statique des fluides	Conservation du débit volumique
Équations de Maxwell	Théorèmes de Gauss et d'Ampère
Loi d'Ohm locale	Loi d'Ohm intégrale
Équation de la chaleur	Loi d'Ohm thermique
Équation de d'Alembert	
Loi des nœuds	Loi des mailles
Th de l'énergie cinétique en puissance	Th de l'énergie cinétique sur une trajectoire
Relation de la statique des fluides	Conservation du débit volumique
Équations de Maxwell	Théorèmes de Gauss et d'Ampère

**Remarque culturelle :** Toutes les lois fondamentales de la physique classiques sont des lois locales, dont les lois intégrales ne sont que des reformulations. Cependant, il n'en va pas de même en mécanique quantique et en physique relativiste.

- **Théorèmes reliant les formulations locales et intégrales**

Ces théorèmes sont valables sous des hypothèses de régularité (c'est-à-dire schématiquement de continuité et dérivabilité) des champs considérés, qui seront toujours valables pour les grandeurs physiques que nous étudions.

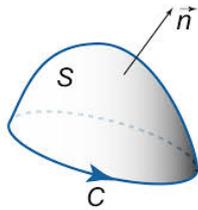
▷ *Théorème de Green-Ostrogradski :*



Soit  $\mathcal{V}$  un volume, délimité par la surface (fermée)  $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$  orientée vers l'extérieur. Alors,

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\operatorname{div} \vec{A}) \, d\tau = \oiint_{\mathcal{S}_{\mathcal{V}}} \vec{A} \cdot d\vec{S}.$$

▷ Théorème de Stokes :



Soit  $S$  une surface (ouverte), délimitée par le contour (fermé)  $C_S$ . La surface et son contour sont orientés par la règle de la main droite. Alors,

$$\iint_S (\text{rot } \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_{C_S} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}.$$

► **Pour approfondir** : Il existe également un théorème du gradient, mais il ne nous est jamais utile dans le cadre de notre programme. Soit  $V$  un volume, délimité par la surface (fermée)  $S_V$  orientée vers l'extérieur. Alors,

$$\iiint_V (\text{grad } f) d\tau = \iint_{S_V} f d\vec{S}.$$

## I.B - Équations de Maxwell

### • Formulation générale

Nom	Forme locale	Forme intégrale	En régime stationnaire
Maxwell-Gauss	$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oiint_{SG} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}(t)}{\epsilon_0}$	Inchangée donc théorème de Gauss toujours valable.
Maxwell-Faraday	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$e = -\frac{d\phi}{dt}$ orientation par RMD	$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ $\Rightarrow \vec{E} = -\text{grad } V$ ce qui n'est pas valable en régime variable
Maxwell-Thomson	$\text{div } \vec{B} = 0$	$\oiint_{SG} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	Inchangée
Maxwell-Ampère	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \underbrace{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{=\vec{j}_d}$	$\oint_{CA} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I_{\text{enl}}(t) + I_{d,\text{enl}}(t))$	Courant de déplacement nul.

### Commentaires physiques :

- ▷ Les sources de champ électrique sont les charges et les variations de champ magnétique ; les sources de champ magnétique sont les courants et les variations de champ électrique.
- ▷ Les équations de Maxwell sont linéaires par rapport aux sources, ce qui permet d'appliquer le théorème de superposition.
- ▷ Il y a un couplage entre les champs en régime variable (un champ ne va pas sans l'autre), mais ce couplage disparaît en régime stationnaire.
- ▷ La conservation de la charge électrique est incluse dans les équations de Maxwell : cf. cours sur la conduction électrique pour la démonstration.
- ▷ La conservation de l'énergie aussi : cf. deuxième partie du cours.

► **Pour approfondir** : Les équations de Maxwell font intervenir la divergence et le rotationnel des champs, c'est-à-dire leurs dérivées spatiales. Il n'est donc pas évident à première vue qu'elles permettent d'en déduire les champs sans ambiguïté : connaître la dérivée ne redonne la fonction qu'à une constante près. On peut montrer mathématiquement que c'est bien le cas : ce résultat constitue le théorème d'Helmholtz-Hodge, qui stipule qu'un champ est entièrement décrit par la donnée de sa divergence et de son rotationnel.

L'équation de Maxwell-Thomson permet de relier  $\vec{B}$  au potentiel-vecteur  $\vec{A}$  par la relation

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$$

Cette relation est toujours valable, aussi bien en régime variable qu'en régime stationnaire. En revanche, comme son nom l'indique, le potentiel *électrostatique* n'est défini qu'en régime stationnaire. En régime variable, travailler avec un potentiel scalaire  $V$  est toujours possible (et utile!) mais le lien avec le champ électrique doit tenir compte du potentiel-vecteur :

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

### • Approximation des régimes quasi-stationnaires magnétiques

L'ARQS consiste à négliger l'une des deux dérivées temporelles des équations de Maxwell. En ce sens, elle constitue un intermédiaire entre le régime statique, où toutes les dérivées temporelles sont nulles, et le régime « ondulatoire », où les deux dérivées partielles temporelles doivent être conservées. Selon le terme négligeable, on distingue l'ARQS magnétique (cas de loin le plus fréquent) de l'ARQS électrique (plus rare, et hors programme).

L'ARQS magnétique consiste à négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction, elle n'est valable que lorsque les variations temporelles de  $\vec{E}$  sont suffisamment lentes, et que l'effet des courants électriques l'emporte sur celui des charges.

↪ conséquence sur les équations de Maxwell :

$$\text{MG, MF et MT inchangées, MA se réécrit } \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Espace 1

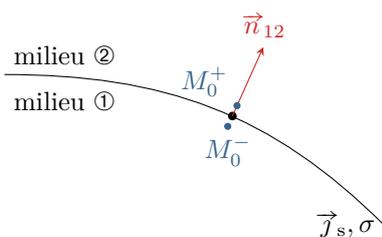
Dans l'ARQS magnétique, le calcul de  $\vec{B}$  se fait comme en statique et celui de  $\vec{E}$  par l'équation de Maxwell-Faraday.

► **Pour approfondir** : Réciproquement, l'ARQS électrique consiste à négliger les variations temporelles de  $\vec{B}$ . C'est donc l'équation de Maxwell-Faraday qui est modifiée en  $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ . Le champ électrique se calcule alors comme en statique, et le champ magnétique ne peut se calculer que via l'équation de Maxwell-Ampère.

Déterminer de quel régime d'ARQS relève un système quelconque n'est absolument pas évident. L'identifier rigoureusement nécessite de comparer les densités volumiques d'énergie électrique et magnétique.

## I.C - Relations de passage

Les équations de Maxwell ne font intervenir que les densités *volumiques* de charge et de courant, et pour cause : toutes les distributions réelles sont volumiques. Cependant, il est parfois utile à des fins de modélisation de négliger l'épaisseur de certaines distributions et de les assimiler à des distributions surfaciques, c'est-à-dire bidimensionnelles. Au niveau de telles distributions, les équations de Maxwell ne sont plus opérantes et doivent être remplacées par les relations de passage, qui s'en déduisent.



Considérons une interface entre deux milieux ① et ②, de normale  $\vec{n}_{12}$ . Les champs de part et d'autre d'un point  $M_0$  de l'interface sont reliés par les **relations de passage**

$$\begin{cases} \vec{E}(M_0^+, t) - \vec{E}(M_0^-, t) = \frac{\sigma(M_0, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \\ \vec{B}(M_0^+, t) - \vec{B}(M_0^-, t) = \mu_0 \vec{j}_s(M_0, t) \wedge \vec{n}_{12} \end{cases}$$

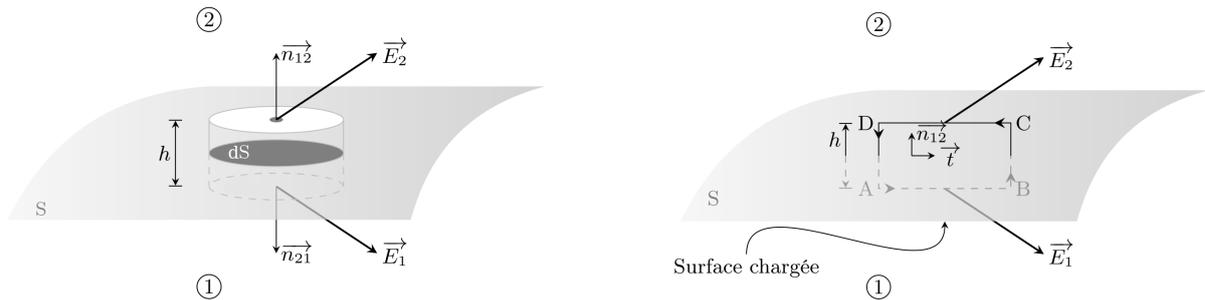
avec  $\sigma$  et  $\vec{j}_s$  les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface.

Conséquence importante : pour une distribution volumique, les champs sont partout continus.

↪ s'il y a discontinuité du champ électrique, alors elle ne peut concerner que la composante normale à la surface ;

↪ s'il y a discontinuité du champ magnétique, alors elle ne peut concerner que les composantes tangentielles à la surface.

► **Pour approfondir** : Démontrons ce résultat pour le champ électrique, en raisonnant de part et d'autre d'une interface porteuse d'une densité surfacique de charge  $\sigma(M, t)$ . Pour alléger les notations, posons  $\vec{E}_1 = \vec{E}(M_0^-, t)$  et  $\vec{E}_2 = \vec{E}(M_0^+, t)$ , et définissons le vecteur unitaire tangent  $\vec{t}$  de telle sorte que  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  s'expriment uniquement dans la base formée de  $\vec{n}_{12}$  et  $\vec{t}$ .



Commençons par appliquer le théorème de Gauss au petit cylindre représenté sur la figure de droite, de hauteur  $h \rightarrow 0$  et de section  $dS$  infinitésimale. En faisant tendre la hauteur  $h$  vers 0, l'intégrale sur la partie latérale du cylindre tend vers 0 également, car le champ électrique ne peut pas diverger : cela ferait diverger la densité volumique d'énergie électrique, ce qui est physiquement impossible. Ainsi,

$$\vec{E}_2 \cdot dS \vec{n}_{12} + \vec{E}_1 \cdot dS \vec{n}_{21} = \frac{dq_{\text{int}}(t)}{\epsilon_0} = \frac{\sigma(M_0, t) dS}{\epsilon_0}.$$

Puisque  $\vec{n}_{21} = -\vec{n}_{12}$ , il vient

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{12} = \frac{\sigma(M_0, t)}{\epsilon_0}. \quad (1)$$

On a ainsi montré que la composante normale du champ électrique pouvait être discontinue.

Exprimons maintenant la circulation de  $\vec{E}$  le long du petit rectangle ABCD représenté sur la figure de droite, de côtés  $h \rightarrow 0$  et  $dL$  infinitésimal. En faisant tendre  $h$  vers 0, les contributions des côtés BC et DA disparaissent. Il ne reste que

$$\oint_{\text{ABCD}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \vec{E}_1 \cdot dL \vec{t} - \vec{E}_2 \cdot dL \vec{t}.$$

En appliquant le théorème de Stokes à l'équation de Maxwell-Faraday le long du contour fixe ABCD,

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \rightsquigarrow \quad \oint_{\text{ABCD}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\iint_{\text{ABCD}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_{\text{ABCD}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Or pour  $h$  tendant vers 0, l'aire du rectangle tend vers 0 également et donc le flux magnétique aussi, puisque  $\vec{B}$  ne peut pas non plus diverger. La circulation de  $\vec{E}$  le long du contour ABCD est donc nulle, d'où

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{t} = 0 \quad (2)$$

Les vecteurs  $\vec{n}_{12}$  et  $\vec{t}$  étant orthogonaux, on peut combiner les deux résultats (1) et (2) sous la forme

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \vec{E}(M_0^+, t) - \vec{E}(M_0^-, t) = \frac{\sigma(M_0, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{12},$$

ce qui est bien le résultat annoncé. La démonstration est tout à fait analogue pour le champ magnétique. ■

## I.D - Exemple : solénoïde parcouru par courant lentement variable

### Application 1 : Solénoïde en régime lentement variable

Considérons un solénoïde infini, comptant  $n$  spires par unité de longueur, parcouru par un courant d'intensité  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$  dont la pulsation est suffisamment faible pour pouvoir se placer dans l'ARQS magnétique. Le but est de déterminer les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  à l'intérieur du solénoïde.

$$\text{Donnée : } \text{rot } \vec{E} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

- 1 - Écrire et simplifier les équations de Maxwell dans l'hypothèse d'ARQS magnétique.
- 2 - En déduire que le champ magnétique a la même expression qu'en régime permanent.
- 3 - Justifier qu'un plan de symétrie de  $\partial \vec{B} / \partial t$  a les mêmes conséquences pour  $\vec{E}$  qu'un plan de symétrie de  $\vec{j}$  pour  $\vec{B}$ . En déduire la direction du champ électrique et les variables dont il dépend.
- 4 - Déterminer l'expression de  $\vec{E}$  à l'intérieur du solénoïde.

1 Cf paragraphe précédent :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \simeq \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

2 Les équations de Maxwell portant sur  $\vec{B}$  s'écrivent exactement de la même façon qu'en statique, tout ce qui en découle est donc préservé. Ainsi,

$$\vec{B}(M, t) = \begin{cases} \mu_0 n i(t) \vec{e}_z = \mu_0 n I_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z & \text{à l'intérieur} \\ 0 & \text{à l'extérieur} \end{cases}$$

3 D'après l'équation de Maxwell-Ampère,  $\vec{j}$  est une source de champ magnétique, liée au champ par un rotationnel. De même, d'après l'équation de Maxwell-Faraday, les variations de  $\vec{B}$  sont une source de champ électrique, liée au champ par un rotationnel. Les équations de Maxwell étant analogues, les propriétés de symétrie qui en découlent le sont également. Ici,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{cases} -\omega \mu_0 n I_0 \sin(\omega t) \vec{e}_z & \text{à l'intérieur} \\ 0 & \text{à l'extérieur} \end{cases}$$

Ainsi, le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  est un plan de symétrie de la dérivée de  $\vec{B}$ . Le champ  $\vec{E}$  est donc orthogonal à ce plan, c'est-à-dire porté par  $\vec{e}_\theta$ . La dérivée de  $\vec{B}$  étant invariante par translation et rotation, on en déduit

$$\vec{E}(M, t) = E_\theta(r, t) \vec{e}_\theta.$$

4 D'après l'équation de Maxwell-Faraday et l'expression donnée du rotationnel,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} = +\omega \mu_0 n I_0 \sin(\omega t)$$

On a donc

$$\frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} = +\omega \mu_0 n I_0 \sin(\omega t) r$$

d'où on déduit

$$r E_\theta(r, t) = \omega \mu_0 n I_0 \sin(\omega t) \frac{r^2}{2} + f(t).$$

Comme on intègre une dérivée *partielle*, la constante d'intégration est aussi une « constante partielle », c'est-à-dire qu'elle peut dépendre de la variable laissée fixée. En se plaçant en  $r = 0$  et comme le champ ne peut pas diverger, on trouve que  $f(t) = 0$ . Finalement, à l'intérieur du solénoïde,

$$\vec{E}(M, t) = \frac{1}{2} \omega \mu_0 n I_0 \sin(\omega t) r \vec{e}_\theta.$$

Notons que le champ est nul pour  $\omega = 0$ , ce qui est bien le résultat obtenu en statique : un courant constant n'est pas source de champ électrique.

*Espace 2*

## II - Énergie électromagnétique

### II.A - Densité volumique d'énergie électromagnétique

Lors des cours d'électrostatique et magnétostatique, nous avons affirmé que chaque champ était un réservoir d'énergie, décrite par une densité volumique d'énergie :

$$u_e(M) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 \text{ et } u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Espace 3

On admet que ces expressions se généralisent à toute situation, y compris en régime variable, et que les deux se somment (en particulier, il n'y a pas de terme croisé en  $E$  et  $B$ ).

La densité volumique d'énergie électromagnétique vaut

$$u_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

Elle s'exprime en  $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$ .

↪ un volume mésoscopique  $d\tau$  centré sur le point  $M$  contient à l'instant  $t$  l'énergie électromagnétique

$$dU_{em} = u_{em}(M, t) d\tau.$$

### II.B - Vecteur de Poynting

Vous savez tous qu'un champ électromagnétique est capable de transporter de l'énergie : c'est par ce biais que le Soleil nous chauffe et nous éclaire ! Raisonnons qualitativement sur cet exemple pour identifier les paramètres dont dépend l'énergie reçue par un récepteur (panneau solaire, etc.) placé sur Terre :

- ▷ de manière évidente, la quantité d'énergie reçue est proportionnelle à la surface éclairée ;
- ▷ de même, elle est proportionnelle à la durée d'exposition ;
- ▷ enfin, elle dépend de l'orientation relative entre le panneau et la direction d'où est issu le rayonnement.

Ces considérations permettent de se convaincre qu'il est « physiquement raisonnable » d'écrire l'énergie électromagnétique rayonnée au travers d'une surface élémentaire  $d\vec{S}$  centrée sur un point  $M$  entre deux instants proches  $t$  et  $t + dt$  sous la forme

$$\delta Q_{\text{ray}} = \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S} dt.$$

On comprend que le passage à une surface macroscopique s'obtient par intégration ... et on constate dimensionnellement que  $\vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S}$  a la dimension d'une puissance.

La puissance électromagnétique rayonnée au travers d'une surface  $\mathcal{S}$  est égale au flux du **vecteur de Poynting** au travers de cette surface.

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}.$$

Le vecteur de Poynting est relié aux champs par

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)}{\mu_0}.$$

Le vecteur de Poynting s'exprime en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ , il représente une puissance surfacique.

**Ordres de grandeur :**

- ▷ le flux d'énergie solaire au niveau de la Terre vaut  $\langle \Pi_{\text{sol}} \rangle \sim 1400 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  ;
- ▷ pour un laser de puissance 1 mW et de diamètre 1 mm,  $\langle \Pi_{\text{laser}} \rangle \sim 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  ;
- ▷ pour un téléphone passant un appel, au niveau du téléphone  $\langle \Pi_{\text{tél}} \rangle \sim 0,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

## II.C - Bilan d'énergie électromagnétique

### • Bilan d'énergie électromagnétique pour un volume de contrôle macroscopique immobile

Considérons un volume de contrôle macroscopique  $\mathcal{V}$ , immobile, et notons  $U_{\text{em}}(t)$  l'énergie électromagnétique qu'il stocke à un instant  $t$ . Cette énergie peut varier selon deux mécanismes :

- ▷ d'une part, il peut y avoir échange d'énergie électromagnétique avec l'extérieur par rayonnement ;
- ▷ d'autre part, une fraction de cette énergie peut être dissipée à l'intérieur du volume  $\mathcal{V}$ , c'est-à-dire convertie en une autre forme d'énergie : on peut penser par exemple à l'effet Joule.

La conservation de l'énergie impose alors :

$$\begin{array}{rcccl} \text{énergie stockée} & = & \text{énergie stockée} & - & \text{énergie cédée} & - & \text{énergie dissipée} \\ \text{à l'instant } t + dt & & \text{à l'instant } t & & \text{par rayonnement} & & \text{(absorbée)} \\ & & & & \text{entre } t \text{ et } t + dt & & \text{entre } t \text{ et } t + dt \end{array}$$

▷ Énergie cédée par rayonnement : En orientant  $\vec{dS}$  vers l'extérieur,

$$\delta Q_{\text{ray}} = \oint \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} dt.$$

▷ Énergie dissipée :  $\delta Q_{\text{abs}} = \mathcal{P}_{\text{abs}} dt$ .

Espace 4

Conclusion :

$$\begin{aligned} U_{\text{em}}(t + dt) &= U_{\text{em}}(t) - \oint \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} dt - \mathcal{P}_{\text{abs}} dt \\ U_{\text{em}}(t) + \frac{dU_{\text{em}}}{dt} dt &= U_{\text{em}}(t) - \oint \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} dt - \mathcal{P}_{\text{abs}} dt \end{aligned}$$

Espace 5

Le bilan d'énergie électromagnétique d'un volume de contrôle macroscopique s'écrit

$$\frac{dU_{\text{em}}}{dt} = - \underbrace{\oint \vec{\Pi} \cdot \vec{dS}}_{\text{rayonnement}} - \underbrace{\mathcal{P}_{\text{abs}}}_{\text{dissipation}}.$$

avec  $U_{\text{em}}$  l'énergie électromagnétique stockée dans le volume en question.

### • Bilan local d'énergie électromagnétique

Exprimons chacun des termes du bilan ci-dessus comme l'intégrale d'une quantité locale.

Énergie stockée :

$$U_{\text{em}}(t) = \iiint u_{\text{em}} d\tau \quad \text{donc} \quad \frac{dU_{\text{em}}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint u_{\text{em}} d\tau \underset{\text{volume fixe}}{=} \iiint \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} d\tau$$

Puissance rayonnée :

$$\oint \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} \underset{\text{Ostrogradski}}{=} \iiint \text{div } \vec{\Pi} d\tau$$

Puissance absorbée :

$$\mathcal{P}_{\text{abs}} = \iiint p_{\text{abs}} d\tau \underset{\text{Joule}}{=} \iiint \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

Conséquence : le bilan d'énergie se réécrit

$$\iiint \frac{\partial u_{em}}{\partial t} d\tau = - \iiint \operatorname{div} \vec{\Pi} d\tau - \iiint p_{abs} d\tau$$

et comme cette relation est vraie quel que soit le volume de contrôle considéré, on en déduit que l'égalité intégrale doit également être vérifiée au niveau local. Ainsi,

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{\Pi} - p_{abs} = - \operatorname{div} \vec{\Pi} - \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{E}}_{\text{effet Joule}}$$

Le bilan local d'énergie électromagnétique s'écrit

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = - \underbrace{\operatorname{div} \vec{\Pi}}_{\text{rayonnement}} - \underbrace{p_{abs}}_{\text{dissipation}} = - \underbrace{\operatorname{div} \vec{\Pi}}_{\text{rayonnement}} - \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{E}}_{\text{effet Joule}}$$

Cette relation est appelée **équation** ou **théorème de Poynting**.

**Remarque :** La forme avec une puissance absorbée, un peu plus générale, permet notamment d'appliquer le bilan d'énergie aux milieux transparents, mais les équations de Maxwell s'y écrivent différemment que dans le vide, et la démonstration est beaucoup moins directe.

**Analogie avec la conservation de la charge :** dans le cours sur la conduction électrique, un bilan mésoscopique des entrées et des sorties de charge conduit une équation de la forme

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{j}$$

où la densité volumique de charge  $\rho$  décrit bien un terme de stockage, et la densité volumique de courant  $\vec{j}$  est reliée aux échanges de charge avec l'extérieur. Dans le cas de l'équation de Poynting, l'énergie électromagnétique peut être dissipée (au contraire de la charge), ce que traduit le terme supplémentaire.

► **Pour approfondir :** L'équation locale de Poynting est une conséquence directe des équations de Maxwell. Montrons-le. D'après l'équation de Maxwell-Ampère,

$$\operatorname{rot} \vec{B} \cdot \vec{E} = \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}. \quad \text{soit} \quad \operatorname{rot} \vec{B} \cdot \vec{E} = \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \right).$$

L'identité d'analyse vectorielle  $\operatorname{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}$ , permet d'écrire

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \operatorname{div} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \right).$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$-\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \operatorname{div} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \right)$$

soit

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) - \operatorname{div} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \right)$$

Enfin, réorganiser les termes de part et d'autre de l'égalité conduit à l'équation de Poynting :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) = -\operatorname{div} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{\Pi} - \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

## II.D - Exemple : bilan d'énergie d'un conducteur ohmique en régime permanent

### Application 2 : Bilan d'énergie d'un conducteur ohmique en régime permanent



Considérons un conducteur ohmique cylindrique de longueur  $\ell$ , rayon  $a$ , fait d'un matériau de conductivité électrique  $\gamma$ . Une différence de potentiel est imposée aux bornes de l'échantillon, dans lequel apparaît un champ électrique  $\vec{E}$  uniforme, et par suite une densité volumique de courant  $\vec{j}$ .

Donnée : champ magnétique à l'intérieur d'un cylindre parcouru par un courant  $I$  uniformément réparti en volume

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 r}{2\pi a^2} I \vec{e}_\theta.$$

- 1 - Déterminer la puissance totale  $\mathcal{P}_J$  dissipée par effet Joule dans l'échantillon. Interpréter physiquement le résultat.
- 2 - Exprimer le vecteur de Poynting en tout point, puis à la surface du conducteur. Interpréter sa direction et son sens.
- 3 - En déduire la puissance totale  $\mathcal{P}_{\text{ray}}$  rayonnée par le conducteur.
- 4 - Analyser le bilan de puissance global.

1 Par définition,

$$\mathcal{P}_J = \iiint \vec{j} \cdot \vec{E} \, d\tau = \frac{1}{\gamma} \|\vec{j}\|^2 \times \pi a^2 \ell = \frac{1}{\gamma} \frac{I^2}{(\pi a^2)^2} \times \pi a^2 \ell$$

ce qui se met sous la forme

$$\mathcal{P}_J = \frac{\ell}{\gamma \pi a^2} I^2.$$

On reconnaît l'expression de la résistance du cylindre, et on retrouve le célèbre  $\mathcal{P}_J = RI^2$ .

2 En un point quelconque à l'intérieur du cylindre,

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \times \frac{I}{\gamma \pi a^2} \times \frac{\mu_0 r}{2\pi a^2} I (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta) = -\frac{1}{2\gamma(\pi a^2)^2} r I^2 \vec{e}_r$$

En particulier, en  $r = a$ ,

$$\vec{\Pi}(r=a) = -\frac{1}{2\gamma(\pi a^2)^2} a I^2 \vec{e}_r$$

On constate que, contrairement à ce que l'on aurait pu croire,  $\vec{\Pi}$  est porté par  $-\vec{e}_r$  et non pas  $\vec{e}_z$  : l'énergie électromagnétique n'entre pas par les fils, mais par les parois latérales du cylindre !

3 Par définition, la puissance algébrique rayonnée vaut

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \iint \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} = -\frac{1}{2\gamma(\pi a^2)^2} a I^2 \times 2\pi a \ell = -\frac{\ell}{\gamma \pi a^2} I^2.$$

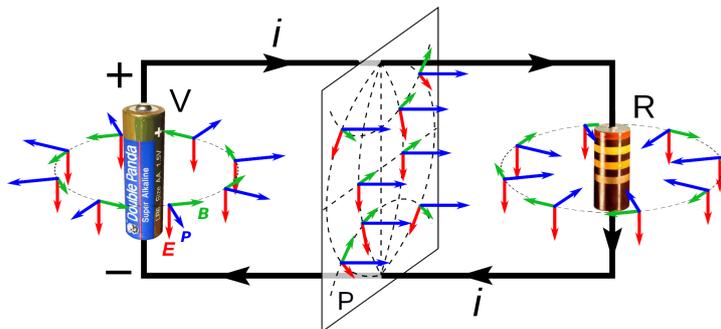
Cette puissance est négative, ce qui signifie en fait que le conducteur *reçoit* de l'énergie par rayonnement.

4 Le bilan de puissance s'écrit

$$\frac{dU_{\text{em}}}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RP}}}{=} 0 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bilan}}}{=} -\mathcal{P}_{\text{ray}} - \mathcal{P}_J$$

ce qui est conforme aux expressions établies ci-dessus.

Ce résultat très inattendu peut être résumé sur le schéma ci-dessous. La pile rayonne une puissance dans toutes les directions, au milieu du circuit cette puissance est globalement orientée de la pile vers la résistance, et au voisinage de la résistance le vecteur de Poynting est dirigé vers celle-ci.



Plus généralement, on pourra retenir qu'en électronique l'énergie n'est *pas* transportée par le courant électrique, mais par des champs électromagnétiques. Ceci n'est pas si surprenant : nous avons déjà montré dans le cours sur la conduction électrique que l'information dans les circuits ne pouvait pas non plus se transmettre via le déplacement des électrons, dont la vitesse d'ensemble est beaucoup trop lente.

►► **Pour approfondir** : L'image de l'énergie transportée par les électrons est assurément fautive ... mais la réalité est plus complexe que ce que l'interprétation ci-dessus laisse entendre. En effet, la démonstration bonus du paragraphe précédent montre que les équations de Maxwell ne contraignent que la divergence du vecteur de Poynting, mais pas son rotationnel. La définition du vecteur de Poynting n'est donc pas unique ! On peut montrer que tous les couples  $(u'_{em}, \vec{\Pi}')$  définis par

$$u'_{em} = u_{em} - \text{div } \vec{Y} \quad \text{et} \quad \vec{\Pi}' = \vec{\Pi} + \text{rot } \vec{X} + \frac{\partial \vec{Y}}{\partial t}$$

donnent le même bilan d'énergie, et seraient donc tout aussi pertinents physiquement. En pratique, les expressions les plus utilisées (et de loin !) sont celles données dans ce cours, car elles sont particulièrement adaptées à l'étude des ondes électromagnétiques ... même si elles conduisent à des paradoxes en régime permanent. ■