BLAISE PASCAL
PT 2023-2024

Fiche résumé 24 – Électromagnétisme

Ondes électromagnétiques et milieux conducteurs

En pratique, très peu des résultats de ce cours sont à connaître par cœur : ils seront toujours à redémontrer.

I - Absorption par un conducteur ohmique

- **Loi d'Ohm locale :** $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ avec $\gamma \sim 10^7\,\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ tant que $f \lesssim 10^{13}\,\mathrm{Hz}$.
- **Conséquence 1 : le métal est localement neutre.** Conservation de la charge + loi d'Ohm + éq de Maxwell-Gauss

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \left(\mathrm{i}\omega + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\right)\underline{\rho} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \underline{\rho} = 0\,.$$

- **Conséquence 2 : le courant de déplacement est négligeable.**

$$\frac{||\vec{j}\,||}{||\varepsilon_0\,\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}||} \sim \frac{\gamma||\vec{E}||}{\varepsilon_0\omega||\vec{E}||} = \frac{\gamma}{\varepsilon_0\omega} \gg 1$$

- **Équation de propagation :** même méthode que dans le vide.

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \mu_0\gamma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

Ce n'est pas l'équation de d'Alembert, mais une équation de diffusion. Parler de célérité n'a plus de sens.

- **Pseudo-OPPH :** la relation de dispersion est complexe.

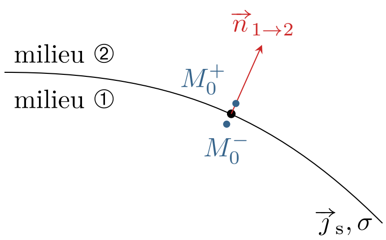
$$k = \pm\frac{1-\mathrm{i}}{\delta} \qquad \text{avec} \qquad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}} \quad \text{(épaisseur de peau)}$$

Pour un métal occupant le demi-espace $x > 0$,

$$\vec{E} = E_0 \underbrace{\mathrm{e}^{-x/\delta}}_{\text{amortissement}} \underbrace{\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi\right)}_{\text{propagation}} \vec{e}_y$$

L'épaisseur de peau est la distance caractéristique d'absorption de l'onde par le conducteur.

II - Réflexion sur un conducteur parfait



- **Relations de passage :** au voisinage d'un point M_0 de l'interface,

$$\begin{cases} \vec{E}_2(M_0^+,t) - \vec{E}_1(M_0^-,t) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to2} \\ \vec{B}_2(M_0^+,t) - \vec{B}_1(M_0^-,t) = \mu_0\,\vec{\jmath}_\mathrm{s} \wedge \vec{n}_{1\to2} \end{cases}$$

avec σ et $\vec{\jmath}_\mathrm{s}$ les densistés surfaciques de charge et de courant à l'interface, et $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ les champs dans les milieux ① et ②.

Exemple : conducteur parfait situé en $x > 0$, dans lequel les champs sont nuls :

$$\begin{cases} \vec{0} - \left(\vec{E}_\mathrm{i}(x\!=\!0^-,t) + \vec{E}_\mathrm{r}(x\!=\!0^-,t)\right) = \dfrac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}\vec{e}_x \\ \vec{0} - \left(\vec{B}_\mathrm{i}(x\!=\!0^-,t) + \vec{B}_\mathrm{r}(x\!=\!0^-,t)\right) = \mu_0\,\vec{\jmath}_\mathrm{s}(t) \wedge \vec{e}_x \end{cases}$$

Attention ! La relation de passage ne s'applique <u>**QUE**</u> sur l'interface, et <u>**PAS**</u> pour un x quelconque.

- **Propriétés de l'onde réfléchie :** suivre l'énoncé pour poser les calculs.

▷ on la cherche de même pulsation que l'onde incidente et se propageant en sens inverse (mais de polarisation éventuellement différente) ;
▷ on démontre à partir des relations de passage qu'elle est de même amplitude et même polarisation que l'onde incidente, mais en opposition de phase.

- **Structure de l'onde totale :** c'est une onde stationnaire (x et t interviennent dans des fonctions séparées, et plus du tout sous la forme $\omega t \pm kx$), avec un nœud de champ électrique sur l'interface.

- **Champ magnétique :** **Attention !** La relation de structure ne s'applique pas à une onde stationnaire.

▷ *Méthode 1 :* appliquer la relation de structure à l'onde incidente et l'onde réfléchie séparément, puis sommer ;
▷ *Méthode 2 :* utiliser l'équation de Maxwell-Faraday.

III - Confinement entre deux plans conducteurs

Les ondes dans la cavité électromagnétique sont forcément des ondes stationnaires, qui doivent vérifier l'équation de d'Alembert et les deux conditions aux limites.

- **Modes propres :** ondes stationnaires harmoniques dans un milieu de taille finie, que l'on cherche sous la forme

$$\vec{E}(x,t) = f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\vec{e}_y\,.$$

- **Conséquence de l'équation de d'Alembert :** en injectant, on obtient

$$f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0$$

donc solution de type $A\sin(kx) + A'\cos(kx)$.

- **Conséquence des conditions aux limites :**

$$\begin{cases} A' = 0 \\ k = \dfrac{n\pi}{L} \end{cases} \iff \qquad L = n\frac{\lambda}{2} \qquad \rightsquigarrow \text{ mode propre d'ordre } n.$$

- **Superposition de modes propres :** toute onde dans la cavité est une combinaison linéaire des modes propres.

Synthèse : quelles relations pour quelles ondes ?

Expressions pour une onde plane le long de l'axe (Ox) et polarisée rectilignement selon $\vec{e}_y$.

	Expression mathématique	Rel. dispersion	Relation de structure
Onde plane quelconque	$\vec{E}(x,t) = [f(x-ct) + g(x+ct)]\,\vec{e}_y$	✘	✘
Onde plane progressive	$\vec{E}(x,t) = f(x \pm ct)\vec{e}_z$	✘	$\vec{B} = \mp\vec{e}_x \wedge \dfrac{\vec{E}}{c}$
Onde plane progressive harmonique	$\vec{E}(x,t) = E_0\cos(\omega t \pm kx + \varphi)\vec{e}_y$ $\iff \underline{\vec{E}}(x,t) = \underline{E_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t \pm kx)}\vec{e}_y$	$\omega = kc$	$\vec{B} = \mp\vec{e}_x \wedge \dfrac{\vec{E}}{c} = \dfrac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}$
Onde plane stationnaire quelconque	$\vec{E}(x,t) = f(x)\,g(t)\vec{e}_y$	✘	✘
Onde plane stationnaire harmonique	$\vec{E}(x,t) = E_0\sin(kx+\psi)\cos(\omega t+\varphi)\vec{e}_y$ $\iff \underline{\vec{E}}(x,t) = \underline{E_0}\sin(kx+\psi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\vec{e}_y$	$\omega = kc$	✘

▷ La relation de dispersion n'existe que pour les ondes harmoniques ;
▷ La relation de structure n'existe que pour les ondes planes progressives ;
▷ Ces relations ne sont valables que dans le vide, mais pas dans les conducteurs (la relation de structure se généralise avec $\underline{k}$ complexe, mais pas la relation de dispersion).