

# Ondes électromagnétiques et milieux conducteurs

## Plan du cours

<b>I</b>	<b>Absorption par un conducteur ohmique</b>	<b>2</b>
I.A	Hypothèse de régime lentement variable et conséquences . . . . .	2
I.B	Équation de propagation . . . . .	4
I.C	Onde plane pseudo-progressive harmonique . . . . .	5
I.D	Généralisation : effet de peau. . . . .	8
<b>II</b>	<b>Réflexion en incidence normale sur un conducteur parfait</b>	<b>8</b>
II.A	Phénoménologie . . . . .	8
II.B	Conditions aux limites à l'interface : relations de passage . . . . .	9
II.C	Onde réfléchie . . . . .	9
II.D	Structure de l'onde totale : onde stationnaire . . . . .	11
II.E	Apparition de courants surfaciques . . . . .	14
<b>III</b>	<b>Confinement entre deux plans conducteurs</b>	<b>14</b>
III.A	Modes propres d'une cavité électromagnétique. . . . .	14
III.B	Conséquences de l'équation de d'Alembert . . . . .	15
III.C	Conséquences des conditions aux limites . . . . .	16
III.D	Superposition de modes propres . . . . .	17

## Au programme

Extrait du programme officiel : partie 4 « Électromagnétisme », bloc 5 « Propagation ».

L'étude des ondes électromagnétiques dans un milieu ohmique permet d'enrichir les compétences des étudiants sur les phénomènes de propagation en abordant l'effet de peau. La réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait et son confinement dans une cavité permettent aux étudiants d'aborder la notion d'onde stationnaire et de découvrir des savoir-faire spécifiques permettant leur étude efficace. La notion de densité de courant surfacique est introduite, mais le calcul de l'intensité à travers un segment ne relève pas du programme.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu ohmique dans le cadre de l'ARQS magnétique. Effet de peau.	Établir et interpréter l'expression de la grandeur caractéristique d'atténuation de l'onde électromagnétique dans un milieu ohmique.
Réflexion sous incidence normale d'une onde plane, progressive et monochromatique polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait.  Onde stationnaire.	Exploiter la nullité admise des champs dans un conducteur parfait. Établir l'expression de l'onde réfléchie en exploitant les relations de passage fournies.  Interpréter qualitativement la présence de courants localisés en surface.  Caractériser une onde stationnaire.
Applications aux cavités à une dimension. Mode d'onde stationnaire.	Établir la condition de quantification des solutions. <b>Mettre en œuvre un dispositif permettant d'étudier une onde électromagnétique dans le domaine des ondes centimétriques.</b>

En gras, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

## Ces cinq dernières années au concours

- ▷ Écrit : épreuve A 2020 et 2022.
- ▷ Oral : régulièrement.

Ce chapitre concerne l'interaction entre les ondes électromagnétiques et les métaux. Comme un champ électrique y engendre un courant, donc une perte d'énergie par effet Joule, les OEM s'y comportent forcément différemment par rapport au vide : cette étude fait l'objet de la première partie du cours. Ensuite, nous nous intéresserons au phénomène de réflexion sur un métal.

## I - Absorption par un conducteur ohmique

### I.A - Hypothèse de régime lentement variable et conséquences

- **Hypothèse : loi d'Ohm locale**

Par définition, un conducteur ohmique est un milieu dans lequel la loi d'Ohm locale s'applique :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \text{ avec pour un bon conducteur } \gamma = 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}.$$

*Espace 1*

Pour un métal « normal », la loi d'Ohm est valable tant que le champ électrique varie suffisamment lentement. Une approche type modèle de Drude (cf. cours sur la conduction électrique) permet de montrer que la fréquence limite au delà de laquelle la loi d'Ohm est mise en défaut est de l'ordre de  $10^{13}$  Hz.



Les ondes électromagnétiques envisagées dans ce chapitre sont toutes supposées de basse fréquence, en pratique  $f \lesssim 10^{13}$  Hz, ce qui correspond aux fréquences optiques.

↪ le comportement d'un métal vis-à-vis des ultra-violet, des rayons X ou des rayons gamma ne pourra pas être décrit par le modèle envisagé dans ce cours.

La linéarité de la loi d'Ohm locale et des équations de Maxwell permet d'utiliser les écritures complexes des champs : pour analyser les conséquences de cette hypothèse basse fréquence, considérons un champ sinusoïdal de la forme

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0(M) e^{i\omega t} \quad \text{avec} \quad \frac{\omega}{2\pi} \ll 10^{13} \text{ Hz}.$$

- **Conséquence 1 : le métal est localement neutre**

Dans le cours sur la conduction électrique, nous avons justifié qu'un conducteur en équilibre électrostatique était neutre en volume ( $\rho = 0$ ), mais pas forcément en surface. En régime variable, ce n'est plus nécessairement le cas : les variations du champ électrique peuvent déplacer temporairement les charges (via la force de Lorentz), et donc déroger à la neutralité.

Équation de relaxation de la densité de charge :

Conservation de la charge + Ohm + MG :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \text{div } \vec{E} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \rho &= 0 \end{aligned}$$

Espace 2

Écriture complexe :

$$i\omega \underline{\rho} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \underline{\rho} = 0 \quad \text{soit} \quad \left( i\omega + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \right) \underline{\rho} = 0 \quad \text{donc} \quad \underline{\rho} = 0$$

M

Espace 3



Un conducteur ohmique vérifiant la loi d'Ohm locale est toujours localement neutre.

**Remarque :** On peut également retrouver ce résultat en interprétant  $\varepsilon_0/\gamma$  comme le temps caractéristique de relaxation de la densité de charge vers la neutralité locale. Pour un métal usuel,  $\varepsilon_0/\gamma \sim 10^{-18}$  s, ce qui est très inférieur aux périodes des ondes envisagées ici, et confirme que la durée nécessaire pour retrouver l'électroneutralité suite à une perturbation est négligeable devant les temps caractéristiques d'évolution des champs.

- **Conséquence 2 : le courant de déplacement est négligeable**

Rappel : équation de Maxwell-Ampère

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \vec{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Espace 4

**Comparaison des ordres de grandeur :** pour le champ sinusoïdal envisagé,

▷ *Courant de conduction :*

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \text{et ainsi} \quad \|\vec{j}\| \sim \gamma E_0$$

M

Espace 5

▷ *Courant de déplacement :*

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E} \quad \text{d'où} \quad \left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \sim \varepsilon_0 \omega E_0$$

Espace 6

▷ *Conclusion :*

$$\frac{\|\vec{j}\|}{\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|} \sim \frac{\gamma \|\vec{E}\|}{\varepsilon_0 \omega \|\vec{E}\|} = \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \omega}$$

En envisageant le cas le plus défavorable, c'est-à-dire  $\omega \sim 10^{14}$  rad · s<sup>-1</sup> maximale, on trouve

$$\frac{\|\vec{j}\|}{\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|} \sim \frac{10^6}{10^{-11} \times 10^{14}} = 10^3$$

On en déduit que le courant de déplacement est toujours négligeable devant le courant de conduction : on retrouve l'hypothèse d'ARQS magnétique.

Espace 7



Un conducteur ohmique vérifiant la loi d'Ohm locale peut toujours se décrire dans l'ARQS magnétique.

### • Conclusion : Équations de Maxwell dans le conducteur

R



Un conducteur en régime lentement variable est uniformément et constamment neutre. Le courant de déplacement y est négligeable devant le courant de conduction donné par la loi d'Ohm.

Dans ces hypothèses,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma \vec{E} \end{aligned}$$

## I.B - Équation de propagation

**Méthode** : exactement comme dans le vide, on calcule le double rotationnel du champ cherché avec les équations de Maxwell et avec le laplacien vectoriel grâce à la relation

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}.$$

### • Équation vérifiée par le champ magnétique

M!

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{B}) &= \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B} \\ &\quad \uparrow \text{dble rot} \qquad \qquad \qquad \uparrow \text{MT} \\ &= \mu_0 \gamma \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &\quad \uparrow \text{MA} \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\Delta \vec{B} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}}$$

Espace 8

- Équation vérifiée par le champ électrique

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} \\ &\quad \uparrow \text{ana vect} \qquad \qquad \qquad \uparrow \text{MG} \\ &= \overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &\quad \uparrow \text{MF} \\ \text{d'où} \quad &\boxed{\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}} \end{aligned}$$

M!

Espace 9

- Conclusion

Dans un conducteur ohmique et en basse fréquence, les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  vérifient la même équation de propagation. Cette équation n'est pas l'équation de d'Alembert, mais une équation de diffusion,

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

Q

Comme annoncé en introduction, il est logique que l'onde électromagnétique ne vérifie pas l'équation de d'Alembert : l'équation de d'Alembert traduit une propagation sans atténuation, mais ici l'énergie de l'onde est progressivement absorbée et dissipée par effet Joule.

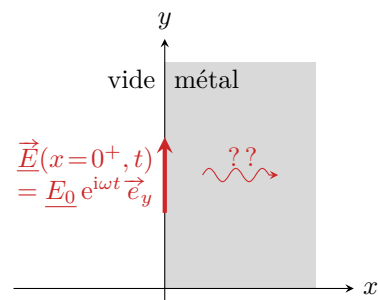
L'équation de propagation n'est pas la même mais certaines propriétés des ondes dans le vide se retrouvent également dans les conducteurs, en particulier le caractère transverse car les deux équations de Maxwell en divergence s'écrivent de la même façon.

## I.C - Onde plane pseudo-progressive harmonique

- Idée de physique

Les OPPH jouent un rôle très important dans le vide car toute onde peut s'écrire comme une somme d'OPPH. L'équation de propagation obtenue dans le conducteur est également linéaire, donc des ondes « qui ressemblent » à des OPPH en seront vraisemblablement solution. Toutefois, pour qu'une OPPH soit solution de l'équation de d'Alembert, il faut que  $\omega$  et  $\|\vec{k}\|$  vérifient la relation de dispersion.

↪ existe-t-il une condition équivalente pour notre nouvelle équation de propagation ?



Nous allons travailler sur l'exemple de l'OPPH

$$\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y,$$

en supposant un forçage sinusoïdal imposé en  $x = 0^+$  à un métal occupant tout le demi espace  $x > 0$ . On cherche à quelle(s) condition(s) sur  $k$  la forme ci-dessus peut décrire la propagation dans le métal (raisonnement type analyse-synthèse).

- Relation de dispersion complexe

(D!)

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$(-ik)^2 \underline{E}_0 - \mu_0 \gamma \times i\omega \underline{E}_0 = 0$$

La relation de dispersion prend donc la forme

$$k^2 = -i\mu_0 \gamma \omega.$$

Espace 10

↪ la relation de dispersion est évidemment différente de  $k^2 = \omega^2/c^2$  de l'équation de d'Alembert, et surtout elle est complexe, ce qui sera lourd de conséquence.

Valeurs possibles de  $k$  :

(D!)

$$k^2 = e^{-i\pi/2} \mu_0 \gamma \omega \quad \text{donc} \quad k = \pm e^{-i\pi/4} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} = \pm \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\mu_0 \gamma \omega}.$$

Espace 11

Ce résultat est traditionnellement écrit sous la forme

(Q)

$$k = \pm \frac{1-i}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}.$$

La grandeur  $\delta$  est homogène à une longueur et est nommée **épaisseur de peau**.

- Combinaison linéaire de pseudo-OPPH

Puisque deux valeurs de  $k$  sont possibles, la forme la plus générale des solutions de l'équation de propagation est a priori une combinaison linéaire.

(M)

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \underline{E}_0 \exp i \left( \omega t - \frac{1-i}{\delta} x \right) \vec{e}_y + \underline{E}'_0 \exp i \left( \omega t + \frac{1-i}{\delta} x \right) \vec{e}_y \\ &= \underline{E}_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)} \vec{e}_y + \underline{E}'_0 e^{x/\delta} e^{i(\omega t + x/\delta)} \vec{e}_y\end{aligned}$$

Si  $\underline{E}'_0 \neq 0$  alors l'onde diverge pour  $x \rightarrow +\infty$ , ce qui est physiquement impossible puisque l'onde ne reçoit pas d'énergie mais en perd (effet Joule) au cours de la propagation dans le métal. Par conséquent, dans un métal semi-infini (épaisseur  $\gg \delta$ ), seul le signe  $\oplus$  est pertinent, donc

$$\vec{E}(x, t) = \underline{E}_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)} \vec{e}_y = E_0 e^{i\varphi} e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)} \vec{e}_y$$

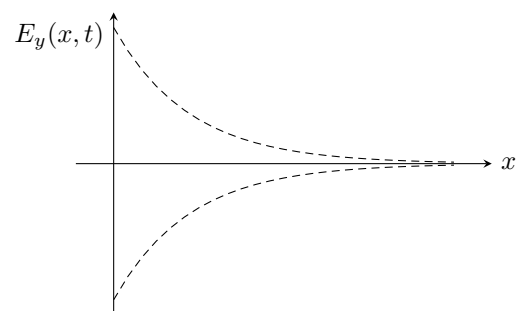
Espace 12

### • Structure des pseudo-OPPH

Expression de l'onde réelle :

$$\vec{E} = E_0 \underbrace{e^{-x/\delta}}_{\text{amortissement}} \underbrace{\cos \left( \omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi \right)}_{\text{propagation}} \vec{e}_y$$

Allure qualitative :



L'onde n'est pas une onde progressive, car son amplitude diminue au cours de la propagation sur une distance caractéristique  $\delta$ . Elle est appelée **onde plane pseudo-progressive harmonique**, par analogie avec les régimes pseudo-périodiques des oscillateurs.

On appelle **épaisseur de peau** la longueur

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

Il s'agit de la longueur caractéristique d'amortissement d'une pseudo-OPPH au sein du conducteur : pour  $x \gg \delta$  l'onde est totalement absorbée et le champ est quasiment nul.

L'épaisseur de peau est plus faible pour les hautes fréquences et dans les bons conducteurs.

**Remarque :** L'épaisseur de peau est également associée à la pseudo-période spatiale de l'OEM au sein du conducteur, puisque l'on peut identifier  $\lambda' = 2\pi\delta$ . Ceci dit la définition est peu intéressante car l'onde est presque totalement amortie avant d'atteindre  $x = \lambda'$  : en effet,  $e^{-\lambda'/\delta} = e^{-2\pi} = 2 \cdot 10^{-3}$ .

### • Simulation numérique

- ▷ plus la fréquence est élevée, plus l'épaisseur de peau est faible ;
- ▷ plus la fréquence est élevée, plus la propagation est rapide : exactement comme pour la diffusion thermique, parler de célérité n'a pas de sens.

## I.D - Généralisation : effet de peau

Lorsqu'une onde électromagnétique incidente est envoyée sur un conducteur ohmique, le paragraphe précédent signifie que les champs et donc les courants électriques sont non nuls uniquement sur une fine couche, l'épaisseur de peau, de l'ordre de  $\delta$ , située à la surface du conducteur.

↪ ce résultat, établi pour une onde électromagnétique, est bien plus général : il se retrouve en fait dès qu'un courant variable parcourt le conducteur.

Lorsqu'un conducteur ohmique est parcouru par un courant alternatif, celui-ci est localisé uniquement à la surface du conducteur, sur une épaisseur d'autant plus faible que la fréquence du courant est élevée.

Cet effet est appelé **effet de peau**.

**Remarque :** Puisque l'équation de propagation des OEM est une équation de diffusion, alors cet effet se retrouve aussi en diffusion thermique : par exemple, les variations périodiques de température (jour/nuit, saisons) deviennent de moins en moins perceptibles au fur et à mesure que l'on s'enfonce dans le sol, si bien qu'au delà de quelques mètres de profondeur la température du sol est la même tout au long de l'année.

**Ordre de grandeur :** pour du cuivre  $\gamma = 6 \cdot 10^7 \Omega \cdot \text{m}^{-1}$ ,

▷  $f = 50 \text{ Hz}$  :  $\delta = 9 \text{ mm}$  ;

▷  $f = 10 \text{ kHz}$  :  $\delta = 0,2 \text{ mm}$

↪ les fils sont de petit diamètre dans les appareils électroniques, alors qu'ils sont nettement plus gros pour le transport d'énergie électrique.

▷  $f = 1 \text{ GHz}$  :  $\delta = 2 \mu\text{m}$

↪ une onde de téléphonie mobile est totalement absorbée par un feuillet de cuivre de quelques microns.

## II - Réflexion en incidence normale sur un conducteur parfait

Considérons de nouveau un conducteur occupant tout le demi-espace  $x > 0$ , le demi-espace  $x < 0$  étant occupé par du vide. Cette situation modélise par exemple un miroir métallique. On envoie sur le conducteur une OPPH en incidence normale, de la forme

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y.$$

Ce paragraphe a pour objectif de décrire ce qu'il advient lorsqu'elle atteint le conducteur.

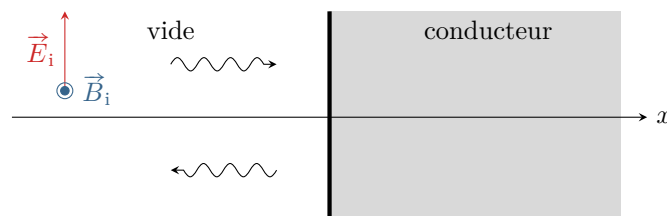


Figure 1 – Onde électromagnétique en incidence normale sur un conducteur.

### II.A - Phénoménologie

#### • Pour un conducteur quelconque



Animation JAVA permettant de visualiser l'onde électromagnétique à l'interface entre le vide et un conducteur ohmique. L'onde incidente et l'onde réfléchi sont représentées en bleu, l'onde totale en rouge. Les abscisses sont graduées en termes de longueur d'onde dans le vide.

Choisir  $\delta/\lambda$  permet de visualiser des conducteurs différents, jusqu'à la limite du conducteur parfait ( $\delta \rightarrow 0$ ). Le coefficient  $R$  correspond au coefficient de réflexion en énergie : le rapport des amplitudes des ondes incidente et réfléchi dans le vide vaut  $\sqrt{R}$ .

Lorsqu'une onde électromagnétique incidente atteint un conducteur, elle est partiellement transmise (puis absorbée) par le conducteur et partiellement réfléchi.

L'amplitude de l'onde transmise est d'autant plus faible et celle de l'onde réfléchi d'autant plus élevée que la conductivité électrique du conducteur est élevée.



### • Cas limite d'un conducteur parfait



Un conducteur parfait est un conducteur de conductivité infinie.

↪ l'épaisseur de peau est nulle, donc aucune onde ne pénètre à l'intérieur du conducteur : toute l'énergie incidente est intégralement réfléchie.



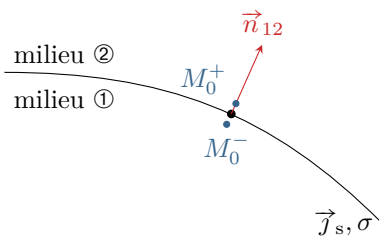
Les champs électrique et magnétique sont nuls dans tout le volume d'un conducteur parfait, de même que les densités volumiques de charge et de courant.

En revanche des charges et des courants peuvent exister en surface du conducteur.

(R)

On ne considérera dans la suite que le cas du conducteur parfait, qui permet des discussions physiques analogues au cas du conducteur réel mais des calculs plus simples.

## II.B - Conditions aux limites à l'interface : relations de passage



Considérons une interface entre deux milieux ① et ②, de normale  $\vec{n}_{12}$ . Les champs de part et d'autre d'un point  $M_0$  de l'interface sont reliés par les **relations de passage**

$$\begin{cases} \vec{E}(M_0^+, t) - \vec{E}(M_0^-, t) = \frac{\sigma(M_0, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \\ \vec{B}(M_0^+, t) - \vec{B}(M_0^-, t) = \mu_0 \vec{j}_s(M_0, t) \wedge \vec{n}_{12} \end{cases}$$

avec  $\sigma$  et  $\vec{j}_s$  les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface.

Conséquence importante : pour une distribution volumique, les champs sont partout continus.

(Q!)

**Écriture dans notre cas particulier** : ici, le milieu ① est le vide et le milieu ② le conducteur parfait, et l'interface se trouve en  $x = 0$  :

$$\begin{cases} \vec{E}_2(x=0^+, t) - \vec{E}_1(x=0^-, t) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \\ \vec{B}_2(x=0^+, t) - \vec{B}_1(x=0^-, t) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x \end{cases}$$

Espace 13

## II.C - Onde réfléchie

### • Nécessité d'une onde réfléchie

Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie. La relation de passage pour le champ électrique s'écrirait alors simplement

$$-E_0 e^{i(\omega t - 0)} \vec{e}_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x,$$

ce qui ne serait possible à tout instant que si  $E_0 = 0$  ... donc s'il n'y avait pas d'onde incidente.

### • Sous quelle forme chercher l'onde réfléchie ?

Caractéristiques « intuitives » :

- ▷ l'onde réfléchie a la même pulsation  $\omega$  que l'onde incidente, et donc la même norme de vecteur d'onde  $k = \omega/c$ ;
- ▷ l'onde réfléchie se propage dans le sens des  $x$  décroissants;
- ▷ l'onde réfléchie est forcément transverse, mais a priori la polarisation pourrait être modifiée à la réflexion;
- ▷ l'amplitude et la phase initiale de l'onde réfléchie sont inconnues car a priori modifiées à la réflexion.

(Q)

Conclusion : on cherche l'onde réfléchie sous la forme

$$\vec{E}_r = \underline{E}'_{0y} e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_y + \underline{E}'_{0z} e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_z$$

Espace 14

↪ les caractéristiques inconnues de l'onde réfléchie se déterminent par application des relations de passage.

- **Relation de passage sur le champ électrique**

🔴🔴🔴 **Attention !** La relation de passage implique le champ **total** dans les deux milieux, donc d'après le principe de superposition la somme du champ incident et du champ réfléchi :

$$\vec{E}_1(x, t) = \vec{E}_i(x, t) + \vec{E}_r(x, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y + \underline{E}'_{0y} e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_y + \underline{E}'_{0z} e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_z$$

Relation de passage en termes des champs complexes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ -\left(\underline{E}_0 e^{i\omega t - 0} + \underline{E}'_{0y} e^{i\omega t + 0}\right) = 0 \\ -\underline{E}'_{0z} e^{i\omega t + 0} = 0 \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ \underline{E}_0 + \underline{E}'_{0y} = 0 \\ \underline{E}'_{0z} = 0 \end{array} \right.$$

M!

Espace 15

- **Conservation de la polarisation**

On constate directement que  $\underline{E}'_{0z} = 0$  : la seule composante non nulle de l'onde réfléchie est selon  $\vec{e}_y$ .



La réflexion en incidence normale conserve la polarisation de l'onde incidente.

- **Coefficient de réflexion en amplitude**

On appelle coefficient de réflexion en amplitude d'une onde à l'interface entre deux milieux quelconques le rapport des amplitudes complexes du champ incident et du champ réfléchi :

$$r = \frac{E_{0r}}{E_{0i}}$$

Physiquement, le module  $|r|$  représente le rapport des amplitudes des champs incident et réfléchi et l'argument  $\arg r$  leur déphasage.



D!

$$r = \frac{E'_{0y}}{E_0} = -1$$

d'où on déduit

$$\vec{E}_r(x, t) = -E_0 e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_y \quad \text{soit} \quad \vec{E}_r(x, t) = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y.$$

Espace 16



Après réflexion en incidence normale sur un conducteur parfait, l'onde incidente et l'onde réfléchie ont même amplitude car  $|r| = 1$  et elles sont en opposition de phase car  $\arg r = \pi$ .

**Remarque culturelle :** Une réflexion métallique introduit un déphasage de  $\pi$ , ce que l'on retrouvera occasionnellement dans des exercices d'optique.

### • Généralisation au cas d'une réflexion entre deux milieux quelconques (hors programme)

Dans le cas d'une réflexion en incidence normale entre deux milieux quelconques, la conservation de la polarisation est toujours vérifiée (ce n'est plus vrai en incidence quelconque, mais trop loin du programme de PT pour que cela mérite d'être retenu). En revanche, l'onde est généralement partiellement réfléchi et partiellement transmise. On définit ainsi les **coefficients de réflexion et de transmission en amplitude** à partir des amplitudes complexes des champs incident, réfléchi et transmis :

$$\underline{r} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} .$$

On peut également définir à partir du vecteur de Poynting (en moyenne temporelle) des coefficients de réflexion et de transmission en énergie.

▮ **Remarque** : la réflexion sur un conducteur parfait se caractérise donc par  $\underline{t} = 0$ .

## II.D - Structure de l'onde totale : onde stationnaire



Animation permettant de visualiser l'onde produite par deux OPPH se propageant en sens opposés : on constate que le champ ne se propage pas mais semble osciller sur place, et que l'amplitude de ces oscillations dépend de la position  $x$  à laquelle on se place. Une telle onde est appelée **onde stationnaire**.

### • Calcul du champ électrique

Principe de superposition :

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0 \left[ e^{i(\omega t - kx)} - e^{i(\omega t + kx)} \right] \vec{e}_y = E_0 e^{i\omega t} (e^{-ikx} - e^{+ikx}) \vec{e}_y$$

$$\vec{E} = -2iE_0 \sin(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_y$$

(M)

Espace 17

Pour revenir à l'onde réelle, on prend la partie réelle :

$$\text{Re}(i e^{i\omega t}) = \text{Re}[i \cos(\omega t) - \sin(\omega t)] = -\sin(\omega t)$$

et ainsi

$$\vec{E}(x, t) = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y .$$

↪ on ne retrouve pas la forme en  $\omega t - kx$  ou  $x - ct$  caractéristique d'une onde progressive : il y a découplage entre les dépendances spatiales et temporelles.

↪ amplitude locale de vibration du champ électrique :  $2E_0 \sin(kx)$

Espace 18.



Qualitativement, une onde stationnaire ne se propage pas mais oscille sur place. Mathématiquement, les dépendances spatiale et temporelle des champs sont découplées.

- **Nœuds et ventres**



On appelle **nœuds** d'une onde stationnaire les points où le champ électrique demeure nul à tout instant, et **ventres** ceux où l'amplitude de vibration est maximale.



### Application 1 : Nœuds et ventres d'une onde stationnaire

Considérons une onde stationnaire de la forme  $\vec{E} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{e}_y$ . Déterminer les positions des nœuds et des ventres ainsi que la distance séparant deux nœuds, puis deux ventres, consécutifs.

**1** **Position des nœuds** : champ électrique constamment nul. Les nœuds (repérés par un entier  $p$ ) se trouvent aux positions  $x_p$  telles que

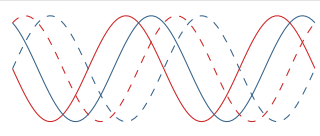
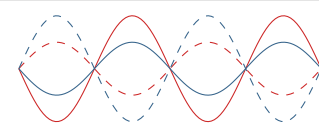
$$\sin(kx_p) = 0 \quad \text{donc} \quad kx_p = p\pi \quad \text{soit} \quad x_p = \frac{p\pi}{k} = p \frac{\lambda}{2}$$

où  $p$  est un entier relatif. En particulier on constate un nœud du champ électrique en  $x = 0$ , c'est-à-dire au niveau du plan conducteur, conformément aux relations de passage.

**2** **Position des ventres** : champ électrique d'amplitude maximale. Les ventres (repérés par un entier  $q$ ) se trouvent aux positions  $x_q$  telles que

$$\sin(kx_q) = \pm 1 \quad \text{donc} \quad kx_q = \frac{\pi}{2} + q\pi \quad \text{soit} \quad x_q = \frac{\lambda}{4} + q \frac{\lambda}{2}$$

• Comparaison entre ondes harmoniques progressives et stationnaires

	Onde plane progressive harmonique	Onde plane stationnaire harmonique
Expression	$\sim \cos(\omega t - kx)$	$\sim \sin(kx) \cos(\omega t)$
Chrono-photographie	 — $t = 0$ - - - $t = T/3$ — $t = T/6$ - - - $t = T/2$	 — $t = 0$ - - - $t = T/3$ — $t = T/6$ - - - $t = T/2$
Propagation	Progression de l'onde à la célérité $c$ .	Pas de progression mais vibration sur place.
Déformation	Toutes les points sont soumis, au cours du temps, aux mêmes champs.	Certains points ne vibrent pas (nœuds) alors que d'autres subissent des vibrations maximales (ventres).
Double périodicité	La longueur d'onde $\lambda$ et la période $T$ sont reliées par la relation de dispersion $\lambda = cT$ .	La longueur d'onde $\lambda$ et la période $T$ sont reliées par la relation de dispersion $\lambda = cT$ .

(R!)

• Champ magnétique

Attention !

Une onde stationnaire n'est pas une onde progressive (!!), donc le champ magnétique ne peut pas se calculer à partir de la relation de structure, qui n'est valable que pour les OPP.

(Q!)

**Méthode 1 :** utilisons l'équation de Maxwell-Faraday pour calculer  $\vec{B}$  à partir de  $\vec{E} = -2iE_0 \sin(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_y$ .

$$\text{rot } \vec{E} = -2ikE_0 \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z$$

(M)

d'où on déduit

$$\begin{aligned}
 -i\omega \vec{B} &= -2ik \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z \\
 \vec{B} &= 2E_0 \frac{k}{\omega} \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z \\
 \vec{B} &= \frac{2E_0}{c} \cos(kx) e^{i\omega t} \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

Espace 20

**Méthode 2 :** calcul **indépendant** de  $\vec{B}_i$  et  $B_r$  avec la relation de structure (les ondes incidente et réfléchie sont deux OPP) puis somme.

$$\vec{B}_i = \vec{e}_x \wedge \frac{\vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}_r = (-\vec{e}_x) \wedge \frac{\vec{E}_r}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z,$$

(M)

Après calculs :

$$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{e}_z.$$

On retrouve une onde stationnaire : l'OEM a la même nature qu'elle soit écrite en fonction de  $\vec{E}$  ou de  $\vec{B}$ . Cependant, les nœuds de  $\vec{E}$  correspondent aux ventres de  $\vec{B}$  et réciproquement.

### II.E - Apparition de courants surfaciques

La relation de passage sur le champ magnétique s'écrit

$$\vec{0} - \vec{B}(x=0^-, t) = \mu_0 \vec{j}_s(t) \wedge \vec{e}_x \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = \mu_0 j_{s,z} \\ -\frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) = -\mu_0 j_{s,y} \end{cases}$$

↪ on en déduit que la réflexion s'accompagne nécessairement d'un courant surfacique non nul à l'interface,

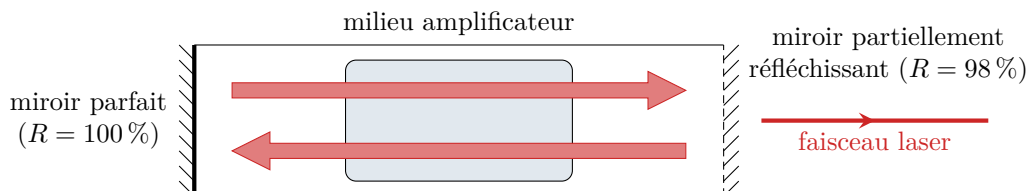
$$\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{e}_y$$

**Interprétation :** on peut considérer que le courant surfacique variable émet lui aussi une onde électromagnétique :

- ▷ dans le vide, cette onde est l'onde réfléchié ;
- ▷ dans le conducteur, cette onde interfère avec l'onde incidente en opposition de phase, donc de manière parfaitement destructive, si bien que l'onde totale est nulle.

## III - Confinement entre deux plans conducteurs

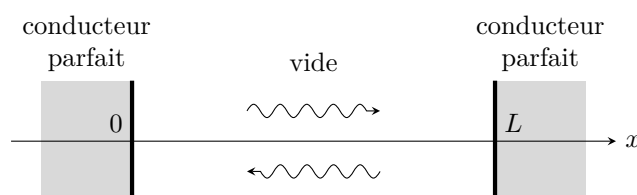
Considérons maintenant une cavité formée par deux plans parallèles parfaitement conducteurs : une telle cavité modélise par exemple un laser, voir figure 2.



**Figure 2 – Schéma de principe d'un laser.** Dans un laser, une onde électromagnétique est confinée dans une cavité formée de deux miroirs contenant un milieu amplificateur. À chaque passage dans le milieu amplificateur, l'onde est amplifiée. L'un des miroirs est imparfait, ce qui permet à l'onde électromagnétique de sortir du laser.

### III.A - Modes propres d'une cavité électromagnétique

Pour simplifier l'étude, considérons une cavité sans milieu amplificateur formée de deux plans parfaitement conducteurs parallèles, distants de  $L$  le long du même axe ( $Ox$ ), voir figure 3. Le but est de déterminer les ondes pouvant exister dans cette cavité. Ces ondes doivent vérifier trois contraintes indépendantes : l'équation de d'Alembert et les deux conditions aux limites en  $x = 0$  et  $x = L$ .



**Figure 3 – Cavité électromagnétique formée par deux plans conducteurs.**

L'exemple précédent a permis de comprendre qu'un plan parfaitement conducteur impose que l'onde totale soit une onde stationnaire, avec un nœud de vibration à la surface du conducteur. Ce sera donc « encore plus » le cas avec deux plans conducteurs.

↪ on va chercher directement une onde s'écrivant sous la forme d'une onde stationnaire, c'est-à-dire dont les variables d'espace et de temps sont découplées :

$$\vec{E}(x, t) = f(x) g(t) \vec{e}_y$$

**Remarque :** l'onde est forcément transverse, en revanche la choisir polarisée rectilignement est un choix arbitraire.

En outre, l'équation de propagation étant linéaire et les conditions aux limites également, on va se limiter à la recherche des ondes sinusoïdales, l'analyse de Fourier permettant de reconstruire toute onde pouvant exister dans la cavité par addition.

↪ on cherche finalement les ondes pouvant s'écrire sous la forme

$$\vec{E}(x, t) = f(x) e^{i\omega t} \vec{e}_y$$



Les ondes harmoniques pouvant exister dans un milieu de taille finie sont appelées **modes propres** de ce milieu.

### III.B - Conséquences de l'équation de d'Alembert

Insérons la forme de solution cherchée dans l'équation de d'Alembert pour en déduire des conditions sur  $f$  (raisonnement de type analyse-synthèse).

(M!)

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = f''(x) e^{i\omega t} \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = (i\omega)^2 f(x) e^{i\omega t} \vec{e}_y = -\omega^2 f(x) e^{i\omega t} \vec{e}_y$$

et ainsi, puisque l'onde vérifie l'équation de d'Alembert par hypothèse,

$$f''(x) e^{i\omega t} - \frac{-\omega^2}{c^2} f(x) e^{i\omega t} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0.$$

En posant  $k = \omega/c > 0$ , on reconnaît une équation différentielle d'oscillateur harmonique dont les solutions s'écrivent sous la forme

$$f(x) = A \sin(kx) + A' \cos(kx).$$

### III.C - Conséquences des conditions aux limites

**Conditions aux limites** : les deux conducteurs parfaits sont de normale  $\pm \vec{e}_x$ , la continuité des composantes tangentielles  $E_y$  (et  $E_z$ , de toute façon nulle par hypothèse) se traduit ici par

(M!)

$$\vec{E}(x=0, t) = \vec{E}(x=L, t) = \vec{0} \quad \text{soit} \quad f(0) = f(L) = 0.$$

▷ En  $x = 0$  :

$$f(x=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} A' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} 0$$

▷ En  $x = L$  :

$$f(x=L) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} A \sin(kL) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} 0 \quad \text{donc} \quad kL = n\pi \quad (n \text{ entier}) \quad \text{soit} \quad k = \frac{n\pi}{L}$$

Espace 23

On dit que le vecteur d'onde est **quantifié** : il ne peut prendre que certaines valeurs appartenant à un ensemble discret, c'est-à-dire repérées par un entier  $n$ .

Pulsations correspondantes :

$$\omega_n = k_n c = \frac{n\pi c}{L}$$

↪ toutes les fréquences ne sont pas des fréquences propres de la cavité, c'est-à-dire qu'une onde harmonique de fréquence quelconque ne peut a priori pas exister dans la cavité.

**Interprétation physique :**

$$k_n = \frac{n\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_n} \quad \text{soit} \quad L = n \frac{\lambda}{2}.$$

↪ les ondes pouvant exister dans la cavité sont celles pour lesquelles la longueur de la cavité correspond à un nombre entier de demi-longueurs d'onde.

(R)

Les seules ondes stationnaires harmoniques pouvant exister dans une cavité de longueur  $L$  sont celles pour lesquelles le vecteur d'onde vérifie

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad \text{soit} \quad L = n \frac{\lambda}{2}.$$

L'onde correspondant à une valeur de  $n$  est appelée **mode propre d'ordre  $n$**  de la cavité et s'écrit

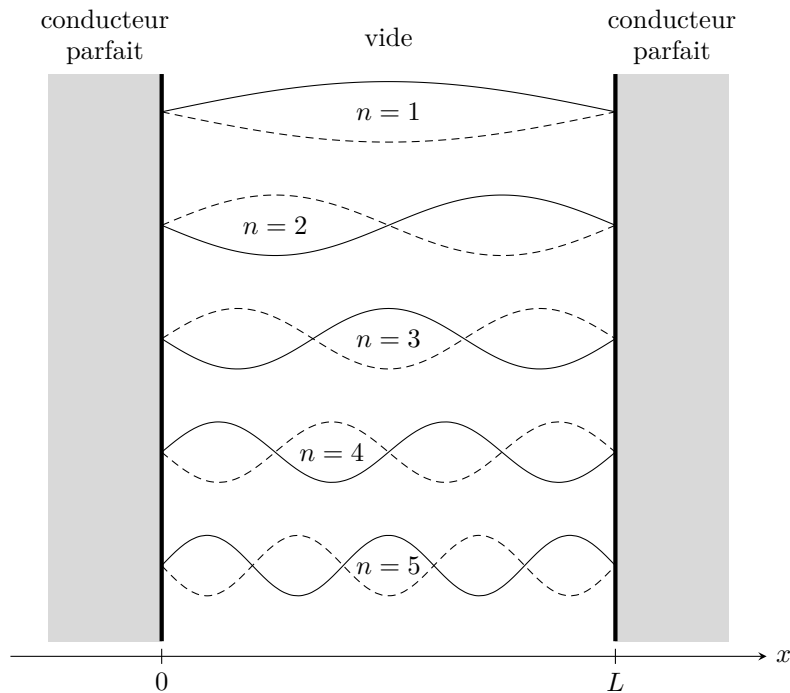
$$\vec{E}_n = \underline{E}_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{i\frac{n\pi c}{L}t} \vec{e}_y \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{E}_n = E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi\right) \vec{e}_y.$$

**Remarque** : le mode propre a dans cette écriture une polarisation rectiligne, mais celle-ci peut être quelconque.



**Représentation graphique :** voir figure 4.

Deux nœuds sont séparés de  $\lambda/2$ , c'est-à-dire qu'un fuseau d'onde stationnaire a une longueur égale à  $\lambda/2$ .



**Figure 4 – Premiers modes propres d'une cavité de longueur  $L$ .**

### III.D - Superposition de modes propres

Pour qu'une onde puisse exister dans la cavité, elle doit vérifier l'équation de d'Alembert et les conditions aux limites : c'est bien sûr le cas des modes propres. Comme l'équation de d'Alembert est linéaire, alors une somme de modes propres vérifie aussi l'équation de d'Alembert et les conditions aux limites : c'est donc aussi une onde pouvant exister dans la cavité. On admet que ce sont les seules.

Toute onde pouvant exister dans la cavité s'écrit comme une combinaison linéaire des modes propres.

Mathématiquement, pour une onde polarisée rectilignement selon  $\vec{e}_y$

$$\vec{E}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{E}_{0n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{i\frac{n\pi c}{L}t} \vec{e}_y$$

$$\vec{E}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{0n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi_n\right) \vec{e}_y$$

L'amplitude  $E_{0n}$  et la phase  $\varphi_n$  du mode d'ordre  $n$  sont fixées par les conditions initiales.

**Remarque :** cette écriture est analogue à un développement de Fourier « version ondulatoire ».

