BLAISE PASCAL
PT 2023-2024

TD 24 – Électromagnétisme

Ondes électromagnétiques et milieux conducteurs

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

Ceinture		Proposition de parcours d'entraînement
	Ceinture blanche	Questions de cours + exercices 1, 2, 5 et 6
	Ceinture jaune	Questions de cours + exercices 1, 2, 5, 6 et 8
	Ceinture rouge	Questions de cours (★) + exercices 1, 3, 4 et 6 à 9
	Ceinture noire	Questions de cours (★) + exercices 1, 3, 4 et 7 à 10

Flasher ce code pour accéder au corrigé

Questions et applications de cours

Seuls les étudiants du groupe PT⋆ seront interrogés en colle sur les questions marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !

(★) 24.1 - Montrer qu'un conducteur ohmique excité en régime sinusoïdal à suffisamment basse fréquence pour que la loi d'Ohm s'applique peut être considéré localement neutre et que le courant de déplacement peut y être négligé devant le courant de conduction. On rappelle que pour un métal $\gamma \sim 10^7\,\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ tant que $f \lesssim 10^{13}\,\mathrm{Hz}$, et on donne $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

24.2 - Écrire les équations de Maxwell simplifiées dans un conducteur ohmique excité en basse fréquence et en déduire l'équation de propagation pour le champ électrique ou magnétique, au choix de l'interrogateur.

24.3 - En partant de l'équation de propagation (rappelée par l'interrogateur), établir la relation de dispersion complexe dans un conducteur ohmique. Définir l'épaisseur de peau. En déduire l'expression du champ électrique d'une pseudo-OPPH et l'interpréter physiquement.

24.4 - Considérons un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$, sur lequel est envoyé une onde incidente

$$\underline{\vec{E}_\mathrm{i}} = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}\,\vec{e}_y\,.$$

On cherche l'onde réfléchie sous la forme

$$\underline{\vec{E}_\mathrm{r}} = \underline{r}\,E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + kx)}\,\vec{e}_y\,.$$

Déterminer le coefficient de réflexion en amplitude $\underline{r}$.

> *Le calcul est légèrement différent de celui du cours, car un peu moins général : pour alléger le calcul, on admet ici directement que l'onde réfléchie a la même polarisation que l'onde incidente, ce qui permet de n'utiliser qu'une seule projection de la relation de passage.*

24.5 - Considérons une cavité électromagnétique formée par deux plans parfaitement conducteurs situés en $x = 0$ et $x = L$. On cherche ses modes propres sous la forme

$$\vec{E}(x,t) = f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\vec{e}_y\,.$$

Déterminer les fonctions f qui conviennent.

Effet de peau

Exercice 1 : Absorption d'une OEM par une plaque conductrice

1 | 2 |

- *Effet de peau ;*
- *Vecteur de Poynting.*

Cet exercice s'intéresse à l'absorption d'une onde électromagnétique par une plaque métallique semi-infinie dans la direction (Oz) et infinie dans les directions (Ox) et (Oy). La conductivité du métal est notée σ. En $z = 0$ arrive une onde électromagnétique incidente, partiellement transmise à l'intérieur de la plaque. On cherche cette onde transmise en écriture complexe sous la forme

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = \underline{E_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k} z)}\,\vec{e}_x\,.$$

À partir des équations de Maxwell, on montre que le champ électrique au sein du métal vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \mu_0\sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}\,.$$

1 - Établir une condition nécessaire impliquant $\underline{k}$ et ω pour que l'onde cherchée puisse exister au sein du métal.

2 - Le vecteur d'onde étant complexe, on l'écrit sous la forme $\underline{k} = k' - \mathrm{i}k''$. Réécrire l'expression de $\underline{\vec{E}}(z,t)$ en fonction de k' et k'', et interpréter leur sens physique.

3 - On cherche une onde se propageant selon $+\vec{e}_z$. En déduire l'expression de k' et k'', en faisant apparaître une longueur caractéristique δ. Préciser l'hypothèse de plaque « semi-infinie » dans la direction (Oz).

4 - Calculer le champ magnétique complexe $\underline{\vec{B}}(z,t)$.

5 - Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\langle\vec{\Pi}\rangle$. Interpréter physiquement le résultat : direction, sens, dépendance en z.

✎ ***Correction*** — ***1 -*** *En injectant la forme d'onde cherchée dans l'équation de propagation, on trouve*

$$-\underline{k}^2\underline{\vec{E}} - \mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\underline{\vec{E}} = \vec{0}\,,$$

ce qui impose d'avoir

$$\boxed{\underline{k}^2 = -\mathrm{i}\mu_0\sigma\omega\,.}$$

> ***Question d'analyse 1*** *- Retrouver l'expression de $\vec{\Delta}\underline{\vec{E}}$ en fonction de $\underline{k}$ et $\underline{\vec{E}}$.*

2 - *En distinguant les parties réelle et imaginaire de $\underline{k}$,*

$$i\,[\omega t - (k' - ik'')z] = i\omega t - ik'z + i^2k''z = -k''z + i(\omega t - k'z)$$

d'où on déduit

$$\boxed{\underline{\vec{E}}(z,t) = \underline{E_0}\,\mathrm{e}^{-k''z}\,\mathrm{e}^{i(\omega t - k'z)}\,.}$$

On en déduit que la partie réelle k' décrit la ***propagation de l'onde dans le métal****, avec une célérité apparente $v = \omega/k'$. L'expression de k' n'étant pas connue à ce stade, notons que cette célérité apparente peut dépendre de ω. La partie imaginaire k'' est quant à elle reliée à l'****atténuation de l'onde*** *lors de sa propagation au sein du métal.*

> ***Question d'analyse 2*** *- Identifier précisément les arguments mathématiques portant sur la forme d'onde permettant d'aboutir à ces interprétations physiques.*

3 - *D'après ce qui précède,*

$$\underline{k}^2 = -i\mu_0\sigma\omega = \mathrm{e}^{-i\pi/2}\mu_0\sigma\omega \qquad \text{donc} \qquad \underline{k} = \pm\,\mathrm{e}^{-i\pi/4}\sqrt{\mu_0\sigma\omega} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\underline{k} = \pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu_0\sigma\omega}\,.}$$

> ***Question d'analyse 3*** *- Faire le schéma du plan complexe/cercle trigonométrique permettant de retrouver que $-i = \mathrm{e}^{-i\pi/2}$.*
>
> ***Question d'analyse 4*** *- Comment retrouve-t-on que les racines de $\mathrm{e}^{-i\pi/2}$ sont $\pm\,\mathrm{e}^{-i\pi/4}$?*

***Question d'analyse 5** - Montrer que* $\mathrm{e}^{-i\pi/4} = (1-i)/\sqrt{2}$.

L'onde se propageant selon $\vec{e}_z$, on a forcément $k' > 0$. C'est donc la racine avec le signe $\oplus$ qu'il faut garder. On en déduit

$$\boxed{k' = k'' = \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}} = \frac{1}{\delta}\,.}$$

*Compte tenu de l'interprétation physique de k'', on en déduit que le champ électrique s'amortit sur une distance caractéristique δ à l'intérieur de la plaque. Celle-ci peut donc être considérée semi-infinie lorsque son **épaisseur est très supérieure à δ**.*

***Question d'analyse 6** - Comment identifie-t-on que δ est relié à l'inverse de k ?*

***4 -** Utilisons la relation de structure complexe,*

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{k}\,\vec{e}_z \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} = \frac{\underline{k}}{\omega}\underline{E_0}\,\mathrm{e}^{i(\omega t - \underline{k} z)}\,\vec{e}_y$$

soit finalement

$$\boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{1-i}{\omega\delta}\underline{E_0}\,\mathrm{e}^{i(\omega t - \underline{k} z)}\,\vec{e}_y = \frac{1-i}{\omega\delta}\underline{E_0}\,\mathrm{e}^{-k'' z}\,\mathrm{e}^{i(\omega t - k' z)}\,\vec{e}_y\,.}$$

***Question d'analyse 7** - Rappeler les hypothèses d'application de la relation de structure sur les champs réels.*

***Question d'analyse 8** - Justifier qu'elle peut se généraliser à une pseudo-OPPH.*

***5 -** En utilisant les champs complexes,*

$$\begin{aligned}
\langle \vec{\Pi} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0}\,\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^\star\right) \\
&= \frac{1}{2\mu_0}\,\mathrm{Re}\left(\underline{E_0}\,\mathrm{e}^{-k''z}\,\mathrm{e}^{i(\omega t - k'z)} \times \frac{1+i}{\omega\delta}\underline{E_0}^\star\,\mathrm{e}^{-k''z}\,\mathrm{e}^{i(-\omega t + k'z)}\right)(\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y) \\
&= \frac{1}{2\mu_0}\,\mathrm{Re}\left(\left|\underline{E_0}\right|^2 \mathrm{e}^{-2k''z}\frac{1+i}{\omega\delta}\right)\vec{e}_z \\
&= \frac{1}{2\mu_0\omega\delta}\left|\underline{E_0}\right|^2 \mathrm{e}^{-2k''z}\vec{e}_z
\end{aligned}$$

$$\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \sqrt{\frac{\sigma}{8\mu_0\omega}}\left|\underline{E_0}\right|^2 \mathrm{e}^{-2k''z}\vec{e}_z\,.}$$

***Question d'analyse 9** - Pourquoi faut-il prendre des précautions dans le calcul du vecteur de Poynting avec les champs complexes ? Pourquoi n'est-ce pas nécessaire à la question précédente pour appliquer la relation de structure ?*

***Question d'analyse 10** - Justifier TOUS les signes apparaissant à la deuxième ligne du calcul de $\langle \vec{\Pi} \rangle$.*

On constate que l'onde transporte de l'énergie au sein du métal dans sa direction de propagation, mais que plus elle avance moins elle porte d'énergie.

***Question d'analyse 11** - Identifier précisément les arguments mathématiques portant sur la forme d'onde permettant d'aboutir à ces interprétations physiques.*

***Question d'analyse 12** - Pourquoi est-il physiquement logique que l'onde transporte de moins en moins d'énergie au fur et à mesure de son avancée dans le métal ? Que devient cette énergie qui « disparaît » ?*

Exercice 2 : Blocage d'appel

oral banque PT | 1 | 2 |

▷ *Effet de peau.*

Un téléphone émet un appel, reçu par un second téléphone. On place une plaque de métal devant le second téléphone : il ne reçoit plus l'appel. On modélise la plaque comme occupant tout le demi-espace $z > 0$, l'onde se propageant dans le vide $z < 0$.

1 - Donner l'ordre de grandeur de la longueur d'onde et de la fréquence d'une onde téléphonique. On admet que cette fréquence permet de traiter le métal dans l'ARQS.

2 - Établir l'équation différentielle vérifiée par $\vec{E}$ dans le métal. Comparer cette équation à celle dans le vide. Commenter physiquement.

3 - Trouver les solutions de l'équation précédente de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$, avec $\underline{k}$ complexe. Ces solutions sont-elles des ondes planes progressives monochromatiques ?

4 - Identifier une distance caractéristique. La calculer numériquement, justifier le modèle de plaque semi-infinie, et interpréter l'expérience.

Exercice 3 : Transparence ultra-violette des métaux

adapté oral banque PT | 2 | 2

▷ *Écriture complexe des équations de Maxwell ;*
▷ *Relation de dispersion complexe.*

Cet exercice a pour but d'étudier la propagation d'une onde électromagnétique *de haute fréquence* à l'intérieur d'un métal, pour laquelle ni la loi d'Ohm statique ni l'ARQS ne sont valables. On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω.

Les porteurs de charge dans ce métal sont des électrons de charge $-e$, de masse m_e, présents en densité volumique N. Considérons le mouvement d'un électron de conduction du métal, sous l'effet de la force de Lorentz électrique (force magnétique négligeable) et d'une force de friction modélisant les interactions avec le réseau cristallin,

$$\vec{f} = -\frac{m_e}{\tau}\vec{v}\,.$$

1 - Établir l'expression de la vitesse complexe de l'électron $\underline{\vec{v}}$. En déduire que le métal possède une conductivité complexe

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau}$$

où γ_0 est une constante dont on donnera l'expression.

2 - Écrire l'équation de conservation de la charge complexe. En déduire que le métal reste localement neutre, même à haute fréquence.

3 - Écrire les équations de Maxwell complexes dans le métal pour une OPPH quelconque $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}}\, e^{i(\omega t - \underline{\vec{k}}\cdot\vec{r})}$.

4 - Établir la relation de dispersion sous la forme

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\underline{\gamma}\,\omega\,.$$

5 - En déduire que, pour un domaine de pulsation à préciser, l'onde peut être transmise au travers du métal sans être absorbée.

6 - Expliquer le titre de l'exercice.

Données :
- ▷ dans un métal usuel, $\gamma_0 = 5\cdot 10^7\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}$ et $\tau = 10^{-14}\,\mathrm{s}$;
- ▷ perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}}$;
- ▷ double produit vectoriel : $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$.

Exercice 4 : Approche énergétique de l'effet de peau — oral banque PT | 3 | 2

▷ *Effet de peau ;*
▷ *Vecteur de Poynting ;*
▷ *Bilan de puissance.*

Considérons un conducteur électrique semi-infini de conductivité γ et dans lequel règne un champ

$$\vec{E} = E_0\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \alpha z)}\,\vec{u}_x\,.$$

1 - S'agit-il d'une onde plane ? D'une onde progressive ? Que représente α ? Quelles sont la direction et le sens de propagation ? La polarisation ?

2 - Calculer le champ $\vec{B}$ associé.

3 - Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

4 - Effectuer un bilan de puissance pour une tranche de conducteur de surface S et de longueur $\mathrm{d}z$. Déterminer la puissance cédée par unité de volume dans le conducteur.

5 - Établir une autre expression de la puissance cédée à partir de la loi d'Ohm locale.

6 - À partir des deux expressions obtenues, déduire la distance sur laquelle pénètre l'onde avant d'être atténuée.

Réflexion des ondes

Exercice 5 : Onde électromagnétique confinée — oral Mines-Ponts PSI | 1 | 2 |

▷ *Réflexion sur un conducteur parfait ;*
▷ *Cavité électromagnétique.*

On rappelle que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls dans un conducteur parfait. On donne les relations de passage à l'interface entre deux milieux 1 et 2 :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2} \qquad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0\,\vec{j}_\mathrm{s} \wedge \vec{n}_{1\to 2} \qquad \mu_0\,\vec{j}_\mathrm{s} = \vec{n}_{1\to 2} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\,,$$

où σ et $\vec{j}_\mathrm{s}$ sont respectivement les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface.

1 - On considère un champ électrique dans le vide de la forme $\vec{E}_\mathrm{i} = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)}\,\vec{e}_x$. Montrer que $\omega = kc$.

2 - On place un conducteur parfait semi-infini en $z > 0$. Montrer que les relations de passage pour $\vec{E}$ impliquent l'existence d'une onde réfléchie et donner son expression. Donner la nature de l'onde totale.

3 - En déduire le champ magnétique à partir d'une équation de Maxwell.

4 - Qu'impliquent les relations de passage pour $\vec{B}$? Interpréter.

On ajoute un deuxième conducteur parfait en $z = -L$.

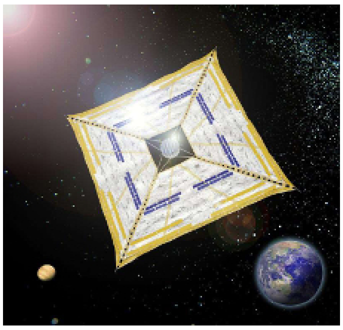
5 - Déterminer les ondes pouvant exister entre les deux conducteurs et leurs caractéristiques. On introduira un entier n.

6 - Quelle est la puissance moyenne traversant une surface $z = \mathrm{cte}$?

Exercice 6 : Voile solaire

oral banque PT | 2 | 2

- ▷ *Réflexion sur un conducteur parfait ;*
- ▷ *Force de Lorentz.*



Une voile solaire est un dispositif de propulsion permettant de se déplacer dans l'espace à la manière d'un voilier. Les photons émis par le Soleil entrent en collision avec la voile et lui cèdent leur quantité de mouvement, ce qui lui permet d'avancer. Compte tenu de la faible propulsion générée, le procédé ne permet pas de quitter la surface d'une planète (même dénuée d'atmosphère, et donc de friction). Il est en revanche utilisable sur un appareil ayant déjà atteint la vitesse de satellisation minimale, voire la vitesse de libération. Plusieurs prototypes de petite taille ont déjà été placés en orbite ou sont en cours de développement, comme par exemple le démonstrateur Ikaros, dont une vue d'artiste est représentée ci-contre, lancé en 2010 par l'agence spatiale japonaise.

On considère une voile solaire de surface S modélisée par un conducteur parfait. Le rayonnement solaire est assimilé à une onde plane progressive monochromatique (OPPM) de polarisation rectiligne. On suppose que la normale à la surface S est colinéaire à la direction de propagation de l'OPPM.

1 - Proposer une expression du champ électrique complexe de l'OPPM incidente sur la voile. En déduire l'onde réfléchie.

2 - Calculer la densité surfacique de courant sur la voile.

3 - Proposer une expression pour la force surfacique moyenne à laquelle est soumise la voile et la calculer. Commenter sa direction et son sens.

Données :
- ▷ les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls dans un conducteur parfait ;
- ▷ relations de passage à l'interface entre deux milieux (1) et (2), de normale $\vec{n}$ orientée de (1) vers (2) :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n} \qquad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_\mathrm{s} \wedge \vec{n} \iff \vec{j}_\mathrm{s} = \vec{n} \wedge \left(\frac{\vec{B}_2 - \vec{B}_1}{\mu_0}\right),$$

où σ et $\vec{j}_\mathrm{s}$ sont respectivement les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface.

Exercice 7 : Réflexion à l'interface entre deux milieux transparents

2 | 2

- ▷ *Réflexion d'une onde électromagnétique ;*
- ▷ *Vecteur de Poynting.*

L'objectif de cet exercice est détudier la réflexion d'une onde électromagnétique entre deux milieux isolants parfaitement transparents (verre, eau, plexiglas, etc.). De tels milieux sont appelés *milieux diélectriques*. La propagation des ondes électromagnétiques y obéit exactement aux mêmes relations que dans le vide, à condition de remplacer la célérité c par c/n, où n est l'*indice optique* du milieu.

Dans un milieu d'indice n_1, on envoie une onde incidente de la forme

$$\underline{\vec{E}_\mathrm{i}} = E_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_1 z)}\, \vec{e}_x\,.$$

En $z = 0$ se trouve une interface avec un milieu d'indice n_2, voir figure 1. Lorsque l'onde incidente l'atteint, elle est partiellement réfléchie et partiellement transmise. On cherche les ondes transmise et réfléchie sous la forme

$$\underline{\vec{E}_\mathrm{r}} = \underline{r}\, E_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + k_1 z)}\, \vec{e}_x \qquad \text{et} \qquad \underline{\vec{E}_\mathrm{t}} = \underline{t}\, E_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_2 z)}\, \vec{e}_x\,.$$

Les constantes $\underline{r}$ et $\underline{t}$ sont appelées coefficient de réflexion et transmission en amplitude pour le champ électrique.

Donnée : relations de passage au niveau de l'interface

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z \qquad \text{et} \qquad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0\, \vec{j}_\mathrm{s} \wedge \vec{e}_z\,,$$

avec σ et $\vec{j}_\mathrm{s}$ les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface.

1 - Exprimer k_1 et k_2 en fonction notamment de la pulsation et des indices optiques.

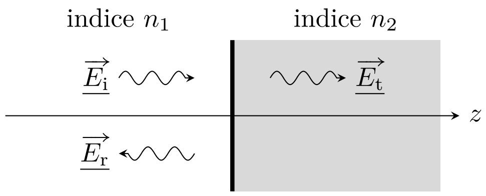


Figure 1 – Transmission et réflexion à une interface entre deux milieux diélectriques.

2 - Justifier les expressions des ondes transmise et réfléchie. Quelles sont les hypothèses permettant de les écrire sous cette forme ?

3 - Écrire les relations de passage en fonction de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en admettant qu'il n'y a ni charge ni courant de surface.

4 - En déduire les expressions de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction des indices des deux milieux.

5 - Exprimer la moyenne temporelle des vecteurs de Poynting incident, réfléchi et transmis.

6 - Par analogie, définir un coefficient de réflexion $\mathcal{R}$ et de transmission $\mathcal{T}$ en énergie à l'interface. Les calculer. Que vaut la somme des deux coefficients ? Interpréter physiquement.

Exercice 8 : Guide d'ondes

inspiré oral banque PT | 2 | 2 |

▷ *Exploitation des conditions aux limites ;*
▷ *Résolution par séparation des variables ;*
▷ *Vecteur de Poynting.*

Une cavité vide, supposée invariante par translation selon $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$, est taillée dans un conducteur occupant les demi-espaces $x < 0$ et $x > a$. On souhaite utiliser cette cavité comme guide d'onde : on s'intéresse à la propagation dans cette cavité d'une onde électromagnétique sous la forme

$$\vec{\underline{E}}(M,t) = f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}\,\vec{u}_y\,.$$

1 - Déterminer $f(x)$ et la relation entre ω et k.

2 - Montrer que l'onde ne peut se propager que si ω est supérieure à une pulsation de coupure ω_{c} à exprimer.

3 - On appelle modes propagatifs du guide les différentes ondes pouvant se propager dans le guide pour une pulsation donnée. Pour quel intervalle de pulsation le guide d'onde est-il monomode, c'est-à-dire qu'il n'y existe qu'un seul mode propagatif ? Même question pour un guide multimode, possédant plusieurs modes propagatifs ?

4 - Le champ magnétique dans le guide s'écrit

$$\vec{\underline{B}}(M,t) = -\frac{k}{\omega}E_0 \sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}\,\vec{u}_x + \mathrm{i}\frac{n\pi}{a\omega}E_0\cos\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}\,\vec{u}_z\,.$$

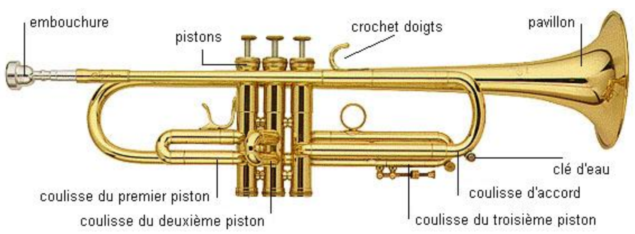
Déterminer l'expression du vecteur de Poynting instantané et interpréter physiquement chacune de ses composantes.

Analogies entre phénomènes ondulatoires

Exercice 9 : Trompette

2 | 2

▷ *Analogies entre phénomènes ondulatoires ;*
▷ *Ondes stationnaires.*



Une trompette est un instrument à vent de la famille des cuivres. Le son y est produit par la vibration des lèvres du trompettiste au niveau de l'embouchure, qui génère une onde acoustique au sein de l'instrument. La trompette peut être modélisée comme un tuyau sonore rectiligne de longueur totale $L = 1{,}40\,\mathrm{m}$, fermé au niveau de l'embouchure et ouvert au niveau du pavillon.

On introduit un axe x tel que l'embouchure se trouve en $x = 0$ et le pavillon en $x = L$.

1 - On modélise l'onde de pression $P_\mathrm{i}(x,t)$ générée par le trompettiste par une onde progressive harmonique d'amplitude P_0, de pulsation ω, et de phase initiale nulle. Écrire son expression mathématique.

2 - Lorsqu'elle atteint le pavillon, cette onde se réfléchit en conservant la même amplitude, mais avec un déphasage éventuel. Écrire son expression mathématique, en notant ϕ le déphasage à la réflexion, qui coïncide avec la phase initiale de l'onde réfléchie.

3 - Écrire l'expression de l'onde totale dans la trompette sous la forme

$$P_\mathrm{tot}(x,t) = A\cos(kx+\psi)\cos(\omega t+\varphi)$$

en exprimant A, ψ et φ en fonction des paramètres déjà introduits. Comment s'appelle une telle onde ?

Les notes jouables à la trompette correspondent aux modes propres du tuyau sonore. Les conditions aux limites (tuyau fermé-ouvert) imposent un ventre de pression au niveau de l'embouchure ($x=0$) et un nœud au niveau du pavillon ($x=L$).

4 - En s'appuyant sur une représentation graphique de l'onde, montrer que les longueurs d'onde λ_n des modes propres sont telles que

$$L = \frac{\lambda_n}{4} + n\frac{\lambda_n}{2}\,.$$

En déduire la fréquence fondamentale ($n=0$) de la trompette.

5 - Retrouvons ces résultats par le calcul.
5.a **-** En utilisant la condition aux limites à l'embouchure, montrer que $\psi = 0$ convient.
5.b **-** Déduire de la seconde condition aux limites que $k_n L = \pi/2 + n\pi$ avec n un entier.
5.c **-** Retrouver enfin la condition sur la longueur d'onde.

6 - Lorsque le trompettiste appuie sur un piston, l'air est dévié dans la coulisse correspondante, ce qui a pour effet de modifier la longueur du tuyau. Le son est « abaissé de trois demi-tons », ce qui signifie que la fréquence fondamentale est divisée par $2^{3/12}$. En déduire la longueur de la coulisse de ce piston.

Exercice 10 : Guitare électrique 3 | 2

- *Analogies entre phénomènes ondulatoires ;*
- *Analyse dimensionnelle ;*
- *Modes propres.*

Une guitare électrique compte six cordes de longueur 63 cm, attachées à leur deux extrémités. Ces cordes sont faites en acier, de masse volumique $7{,}8\cdot 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. On s'intéresse ici à la deuxième corde, de diamètre 0,89 mm, produisant un La_1 de fréquence 110 Hz. La corde au repos est confondue avec l'axe (Ox), et on note $y(x,t)$ l'écart de la corde à sa position d'équilibre, qui vérifie l'équation de d'Alembert unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0\,.$$

1 - La célérité c des ondes mécaniques sur la corde dépend de sa masse linéique μ, ou masse par unité de longueur, ainsi que de la force F permettant de la tendre. Proposer une expression de c.

2 - On s'intéresse aux ondes harmoniques pouvant exister sur la corde, en cherchant des solutions sous la forme

$$y(x,t) = g(x)\cos(\omega t)\,.$$

Déterminer toutes les fonctions g qui conviennent.

3 - Déterminer la force sous laquelle la corde doit être tendue pour qu'elle vibre à la fréquence voulue.

4 - La corde produit un son plus grave (fréquence plus faible) que celui souhaité. Le guitariste doit-il relâcher ou tendre davantage la corde pour l'accorder ?

5 - Pour jouer différentes notes avec la même corde, le guitariste l'immobilise en un endroit précis en l'appuyant contre le manche de sa guitare. Comment doit-il placer son doigt pour jouer un $\mathrm{Ré}_2$ de fréquence 147 Hz ?