



BLAISE PASCAL
PT 2023-2024

TD 1 – Électronique

Correction

Systèmes linéaires

Analyse de corrigé

Exercice 1 : Passe bas du second ordre

💡 2 | ✂ 2 | Ⓜ



- ▷ Fonction de transfert ;
- ▷ Diagramme de Bode.

Correction des questions d'analyse du corrigé

Question d'analyse 1 - La tension aux bornes d'un interrupteur ouvert est indéterminée, c'est-à-dire qu'elle peut effectivement être nulle ... ou pas !

Question d'analyse 2 - Pour appliquer un pont diviseur, les dipôles doivent être montés en série, c'est-à-dire parcourus par le même courant. Or ici L et C ne sont pas montés en série (ni en parallèle, d'ailleurs) à cause de la résistance. En revanche, l'association de R et C (leur impédance équivalente) est bien montée en série avec la bobine.

Question d'analyse 3 - Par définition, $Y_{RC} = 1/Z_{RC}$ donc $Y_{RC} \times Z_{RC} = 1$. La deuxième expression est obtenue en multipliant le numérateur et le dénominateur de la première par Y_{RC} .

Question d'analyse 4 - L'identification se base sur la puissance de ω : 1 dans $jL\omega/R$ et jx/Q , 2 dans $-x^2$. La présence du j n'est pas toujours un critère suffisant (même s'il fonctionne dans ce cas particulier). L'ordre dans lequel les termes sont écrits encore moins !!

Question d'analyse 5 - Les équivalents ne conservent **qu'un seul** terme, le terme dominant : en l'occurrence, jx/Q est divergent mais $-x^2$ l'est aussi, et diverge plus rapidement. C'est donc $-x^2$ le terme dominant.

Question d'analyse 6 - Le module intervient dans la définition du gain, ce qui enlève les signes : $G_{dB} = 20 \log |H|$. Un autre signe apparaît ensuite à cause du log de l'inverse.

Question d'analyse 7 - Un phénomène de résonance peut exister dans les systèmes d'ordre 2, auquel cas le diagramme de Bode réel diffère significativement du diagramme asymptotique.

Question d'analyse 8 - On utilise l'égalité $1/j = -j$, qui vient du fait que $j^2 = -1$.

Question d'analyse 9 - Deux façons de faire : on place le point le plus facile, celui en $x = 10^0 = 1$, en faisant bien attention à utiliser l'équation de l'asymptote et pas la valeur réelle (c'est l'asymptote que l'on trace !!), puis on utilise la pente de -40 dB/décade pour prolonger la droite. Sinon, on peut aussi utiliser l'équation de l'asymptote pour trouver un deuxième point.

Pour redémarrer en douceur

Exercice 2 : Filtrage d'un signal

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 1 | Ⓜ



- ▷ Décomposition de Fourier ;
- ▷ Signal de sortie d'un filtre.

1 Voir figure 1.

2 En posant $f = 1$ kHz et $A = 1$ V, le signal d'entrée s'écrit

$$e(t) = A + 3A \cos(2\pi ft) + \frac{A}{10} \cos\left(40\pi ft + \frac{\pi}{2}\right).$$

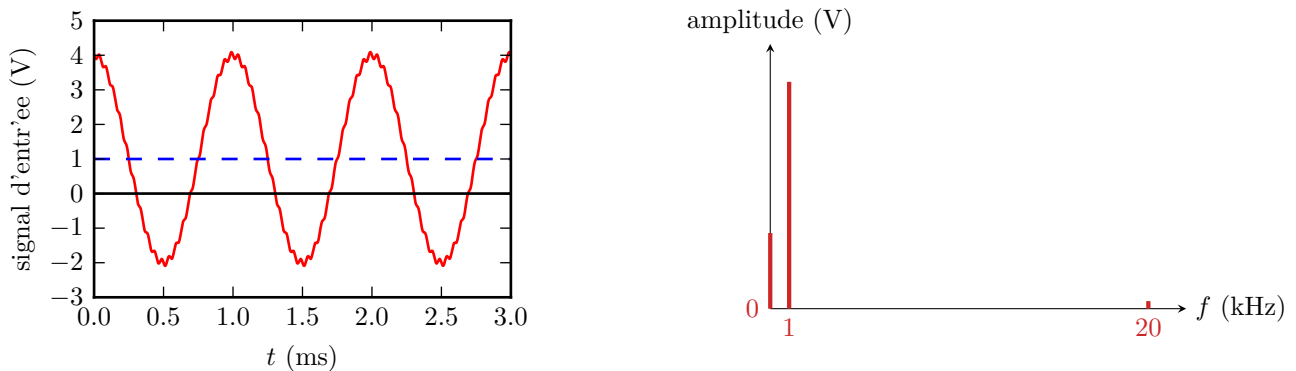


Figure 1 – Signal d'entrée.

- 3 Voir figure 2. Sans plus de précision, les filtres sont supposés idéaux, c'est-à-dire qu'ils transmettent (resp. coupent) parfaitement les composantes qui appartiennent (resp. qui n'appartiennent pas) à leur bande passante, et de gain unité dans leur bande passante.

Exercice 3 : Filtre RL



- ▷ Fonction de transfert ;
 ▷ Diagramme de Bode ;
 ▷ Signal de sortie d'un filtre.

- 1 Analyse asymptotique par équivalence :
 ▷ à très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil, donc $\underline{S} = 0$;
 ▷ à très haute fréquence, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert, donc le courant dans le filtre est nul et on déduit de la loi des mailles $s = e$.
 Conclusion : le filtre est a priori **un filtre passe-haut**.

- 2 Utilisons un pont diviseur de tension en représentation complexe,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega} \quad \text{soit} \quad \underline{H} = H_0 \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H_0 = 1 \\ \omega_c = R/L \end{cases}$$

- 3 Simplifions la fonction de transfert dans la limite très basse fréquence $\omega \ll \omega_c$,

$$\underline{H} \sim \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1} \sim j\frac{\omega}{\omega_c} \quad \text{donc} \quad |\underline{H}| = \frac{\omega}{\omega_c}$$

Ainsi,

$$G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log |\underline{H}| = 20 \log x$$

Comme l'axe des abscisses d'un diagramme de Bode est une échelle logarithmique (en d'autres termes l'abscisse est $\log x$), on en déduit directement que **la pente de l'asymptote à basse fréquence est de pente +20 dB/décade et qu'elle passe par le point $G_{\text{dB}} = 0$ en $x = 1$** .

De même dans la limite très haute fréquence $\omega \gg \omega_c$,

$$\underline{H} \sim \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{j\frac{\omega}{\omega_c}} = 1. \quad \text{d'où} \quad G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log 1 = 0.$$

L'asymptote haute fréquence est donc **une asymptote horizontale**.

L'allure du diagramme de Bode est représentée figure 3.

- 4 Comme les trois harmoniques sont de même amplitude et en phase

$$e(t) = E_0 [\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) + \cos(2\pi f_3 t)]$$

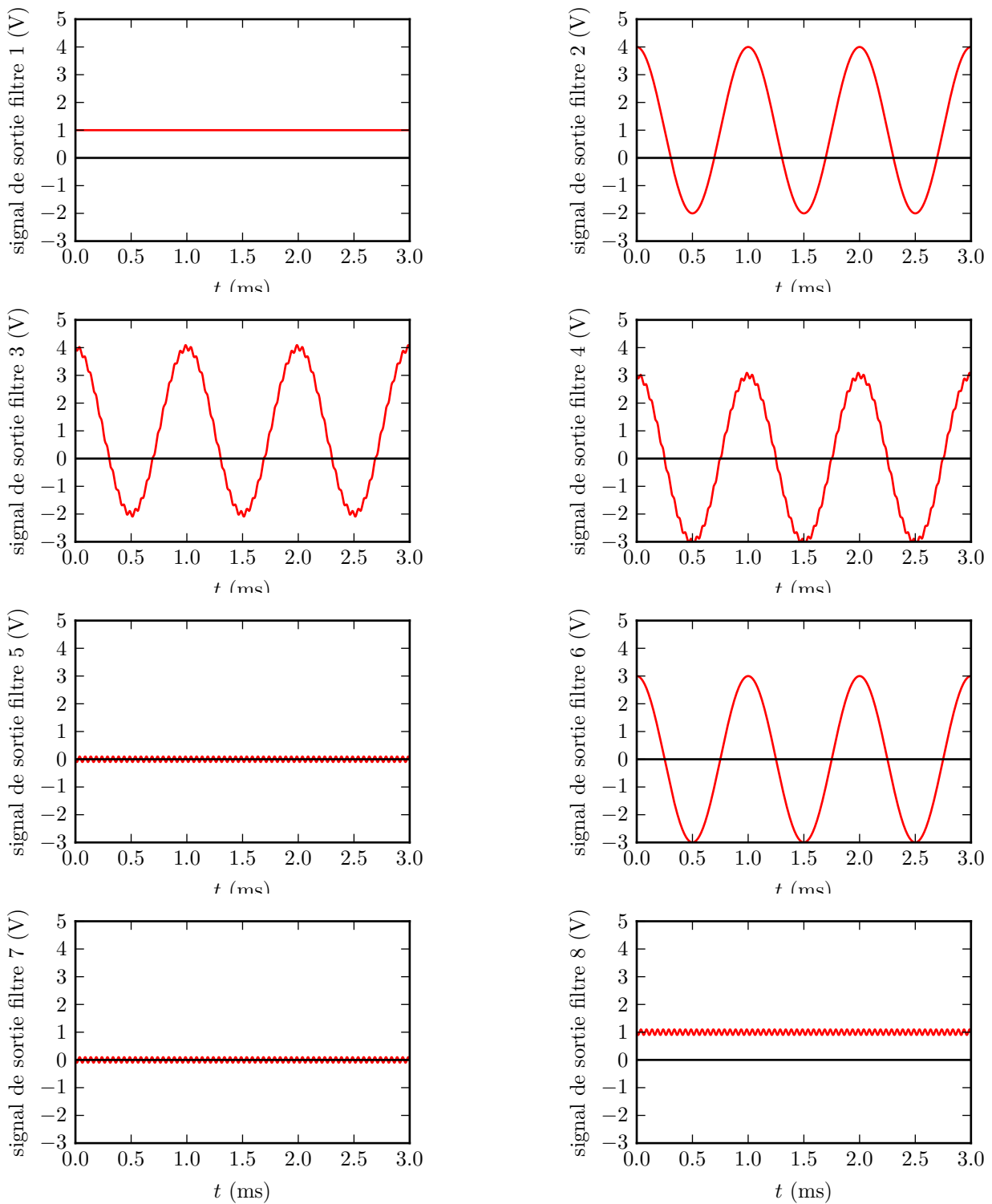


Figure 2 – Signaux de sortie des différents filtres.

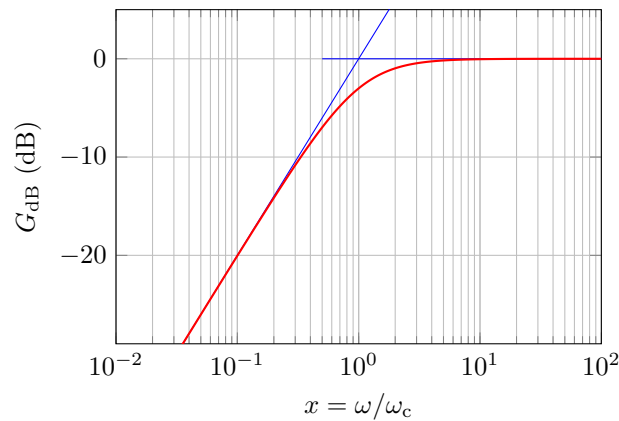


Figure 3 – Diagramme de Bode du filtre RL.

D'après les valeurs numériques données, la pulsation de coupure du filtre vaut

$$\omega_c = \frac{R}{L} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{soit} \quad f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 16 \text{ kHz}.$$

Rappel de cours : Pour un signal d'entrée

$$e(t) = \sum_n E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

le signal de sortie du filtre s'écrit

$$s(t) = \sum_n |\underline{H}(\omega_n)| E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n + \arg \underline{H}(\omega_n))$$

où $|\underline{H}(\omega_n)| = 10^{G_{dB}(\omega_n)/20}$ et $\arg \underline{H}(\omega_n) = \varphi(\omega_n)$.

Comme $x_1 = f_1/f_c = 6 \cdot 10^{-3}$, la composante associée est très atténuée : le gain n'est même pas représenté sur le diagramme donné. On peut donc négliger sa contribution au signal de sortie. De même, la contribution de fréquence f_2 (soit $x_2 = 6 \cdot 10^{-2}$) est atténuée d'environ 22 dB, ce qui correspond à un facteur multiplicatif 1/12. Elle est de plus déphasée d'environ 1,5 rad. Enfin la contribution de fréquence f_3 (soit $x_3 = 6,25$) est associée à un gain à peu près nul, signe qu'elle n'est pas atténuée, mais on peut estimer son déphasage à 0,2 rad. Ainsi,

$$s(t) = \frac{E_0}{12} \cos(2\pi f_2 t + 1,5) + E_0 \cos(2\pi f_3 t + 0,2).$$

5 La fréquence du signal est bien plus faible que la fréquence de coupure du filtre, qui est dans son domaine asymptotique, décrit par une pente de 20 dB/décade dans le diagramme de Bode. En repassant en représentation temporelle, cela indique que le circuit se comporte en dérivateur,

$$s(t) \propto \frac{de}{dt}.$$

La pente d'un signal triangle étant constante, alternativement positive et négative, le signal dérivé présente des plateaux alternativement positifs et négatifs, ce qui est bien un signal créneau de même fréquence que le signal triangle.

Exercice 4 : Filtre passe-haut d'ordre 2



- ▷ Fonction de transfert ;
- ▷ Diagramme de Bode.

1 Analysons qualitativement les régimes asymptotiques.

- ▷ à très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil donc $\underline{S} = 0$;
- ▷ à très haute fréquence la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert, ce qui empêche tout courant de parcourir le circuit. Comme par le condensateur est équivalent à un fil, on déduit de la loi des mailles $\underline{S} = \underline{E}$.

Conclusion : il s'agit bien d'un **filtre passe-haut**.

2 D'après la relation du pont diviseur de tension,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{jL\omega}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + \frac{1}{jRC\omega} + j\frac{L}{R}\omega}$$

Pour faire apparaître la forme souhaitée, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $1 = \omega_0/\omega_0$, ce qui permet d'écrire

$$\underline{H} = \frac{j\frac{L\omega_0}{R}x}{1 + \frac{1}{jRC\omega_0x} + j\frac{L\omega_0}{R}x}$$

Comme pour ce circuit RLC série $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ et $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, on en identifie

$$\frac{L\omega_0}{R} = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = Q \quad \text{et} \quad RC\omega_0 = \frac{RC}{\sqrt{LC}} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q}.$$

ce qui permet enfin de faire apparaître la forme souhaitée,

$$\underline{H} = \frac{jQx}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

3 Simplifions la fonction de transfert dans les deux limites asymptotiques. À très basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$ ou $x \ll 1$),

$$\underline{H} \sim \frac{jQx}{-jQ/x} \sim -x^2 \quad \text{donc} \quad G_{\text{dB}} \sim 20 \log x^2 = 40 \log x$$

La pente de l'asymptote très basse fréquence est donc de +40 dB/décade. De même, dans la limite très haute fréquence $x \gg 1$,

$$\underline{H} \sim \frac{jQx}{jQx} \sim 1 \quad \text{donc} \quad G_{\text{dB}} \sim 0$$

L'asymptote très haute fréquence est donc horizontale. Le diagramme de Bode asymptotique et le diagramme de Bode réel (tracé pour $Q = 1/2 < 1/\sqrt{2}$) sont représentés figure 4.

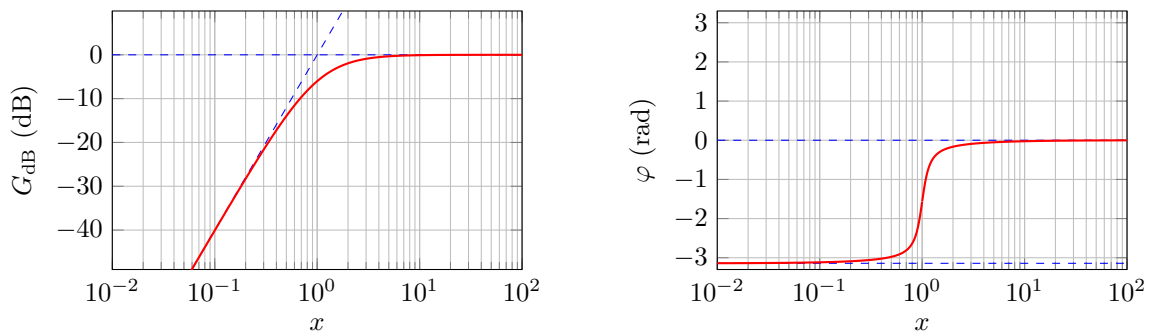


Figure 4 – Diagramme de Bode du filtre RLC passe-haut d'ordre 2. Tracé pour $Q = 1/2$, diagramme de Bode en phase ajouté pour information.

4 Le comportement intégrateur ou dérivateur d'un filtre se traduit en termes de diagramme de Bode par une asymptote de pente ± 20 dB/décade, ce qui n'est pas le cas ici : **il n'existe aucun domaine de fréquence dans lequel ce filtre a un comportement d'intégrateur ou de dérivateur.**

Filtrage et analyse spectrale

Exercice 5 : Étude d'un filtre

oral CCINP MP | 💡 2 | ✂️ 2



- ▷ Comportement asymptotique d'un filtre ;
- ▷ Signal de sortie d'un filtre.

1 • Première méthode : raisonnement par équivalence de dipôles

Limite très basse fréquence : les deux condensateurs équivalent à des interrupteurs ouverts, seules demeurent les résistances, d'où par un pont diviseur de tension

$$\underline{H}_{\text{TBF}} \sim \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}},$$

et ainsi

$$G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}| = -20 \log 1 + \frac{R_1}{R_2}.$$

Comme le gain basse fréquence vaut -20 dB, on en déduit

$$1 + \frac{R_1}{R_2} = 10 \quad \text{d'où} \quad \boxed{R_2 = \frac{R_1}{9} = 10 \text{ k}\Omega.}$$

Limite très haute fréquence : l'admittance de chaque bloc RC parallèle s'écrit

$$\underline{Y}_{\text{RC}} = jC\omega + \frac{1}{R} \simeq jC\omega.$$

Les deux blocs se comportent donc chacun comme le condensateur, la résistance joue un rôle négligeable.

Utiliser « comme toujours » l'équivalence entre un condensateur et un fil pose ici problème, car cela donnerait $u_s = 0$, en contradiction avec le diagramme de Bode, et pire encore $u_e = 0$ alors que c'est la tension imposée depuis l'extérieur par l'utilisateur du filtre. En réalité, l'approximation usuelle $\underline{Z}_C \simeq 0$ signifie que l'impédance du condensateur est très faible devant l'autre impédance du pont diviseur ... mais comme ici cette deuxième impédance est aussi un condensateur, aucune des deux n'est négligeable.

Par un pont diviseur de tension,

$$\underline{H}_{\text{THF}} \sim \frac{1/jC_2\omega}{1/jC_1\omega + 1/jC_2\omega} = \frac{1}{1 + \frac{C_2}{C_1}},$$

et de même

$$G_{\text{dB}} = -20 \log \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right).$$

Comme le gain haute fréquence vaut -80 dB, on en déduit

$$1 + \frac{C_2}{C_1} = 10^4 \quad \text{d'où} \quad \boxed{C_2 \simeq 10^4 \times C_1 = 100 \text{ }\mu\text{F}.}$$

• Deuxième méthode : calcul explicite de la fonction de transfert

Posons

$$\underline{Z}_{1,2} = \frac{1}{jC_{1,2}\omega + \frac{1}{R_{1,2}}} = \frac{R_{1,2}}{1 + jR_{1,2}C_{1,2}\omega}.$$

Avec un pont diviseur,

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}} \quad \text{d'où} \quad \underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} \times \frac{1 + jR_2C_2\omega}{1 + jR_1C_1\omega}}.$$

On en déduit les équivalents en haute et basse fréquence,

$$\underline{H}_{\text{BF}} \sim \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \quad \text{et} \quad \underline{H}_{\text{HF}} \sim \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} \times \frac{jR_2C_2\omega}{jR_1C_1\omega}} = \frac{1}{1 + \frac{C_2}{C_1}}$$

qui sont (heureusement !) identiques à ceux trouvés précédemment et s'exploitent de la même façon.

Dans le contexte d'un oral de concours, il est (je trouve) naturel que le candidat pense en premier lieu à un raisonnement par équivalence de dipôles ... et c'est ensuite par discussion avec l'examinateur que ce raisonnement est « amélioré » ou que le candidat est orienté vers le calcul explicite de \underline{H} .

2 Entre 100 Hz et 100 kHz, le gain du filtre diminue de 60 dB en trois décades, ce qui donne une pente de -20 dB/décade caractéristique d'un **comportement intégrateur**.

3 Le signal d'entrée est ainsi la somme de deux signaux harmoniques de fréquences $2f$ et $4f$ ($f = 1$ kHz),

$$u_e(t) = E_0 \cos(4\pi ft) + \frac{2}{3} E_0 \cos(8\pi ft) \quad \text{avec} \quad E_0 = 6 \text{ V}.$$

Il s'agit donc d'un signal sans fondamental.

À partir du diagramme de Bode donné dans l'énoncé, on estime l'équation de la droite oblique dans le domaine intermédiaire par

$$G_{\text{dB}}(f) = -20 \log \frac{f}{f_0},$$

avec une ordonnée à l'origine nulle comme le montre le cas $\log(f/f_0) = 1$. On en déduit

$$|\underline{H}(f)| = 10^{G_{\text{dB}}/20} = 10^{-\log(f/f_0)} = \frac{1}{f/f_0}.$$

On peut aussi partir du résultat (à connaître!) qu'une pente de -20 dB/décade est caractéristique d'un comportement intégrateur, dont la fonction de transfert asymptotique prend la forme

$$\underline{H} = \frac{H_0}{jf/f_0}$$

On constate graphiquement que si $f = f_0$ ($\log(f/f_0) = 0$) alors $G_{\text{dB}} = 0$ donc $H_0 = 1$. Bien sûr, le résultat donné par cette méthode est cohérent avec la précédente.

Ainsi,

$$\underline{s} = f_0 \frac{\underline{e}}{jf} = 2\pi f_0 \frac{\underline{e}}{j\omega} \quad \text{d'où} \quad s(t) = 2\pi f_0 \int e(t') dt'.$$

On obtient donc

$$u_s(t) = E_0 \frac{2\pi f_0}{4\pi f} \sin(4\pi ft) + \frac{2}{3} E_0 \frac{2\pi f_0}{8\pi f} \sin(8\pi ft)$$

$$\text{soit} \quad \boxed{u_s(t) = \underbrace{E_0 \frac{f_0}{2f}}_{=S_2} \sin(4\pi ft) + \underbrace{E_0 \frac{f_0}{6f}}_{=S_4} \sin(8\pi ft),}$$

et comme $f_0/f = 1 \cdot 10^{-2}$ on a numériquement

$$S_2 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ V} \quad \text{et} \quad S_4 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ V}.$$

4 Posons $E'_0 = 10$ V, ce qui permet d'écrire

$$u_e(t) = E'_0 \cos(2\pi f_1 t) + E'_0 \cos(2\pi f_2 t)$$

En se référant au seul diagramme asymptotique (ce qui est discutable car les déphasages sont non négligeables), on a pour la première harmonique

$$G_{\text{dB}}(f_1) = -20 \text{ dB} \quad \text{soit} \quad |\underline{H}(f_1)| = 10^{-20/20} = \frac{1}{10}$$

et pour la deuxième

$$|\underline{H}(f_2)| = 10^{-80/20} = \frac{1}{10000}.$$

La seconde harmonique contribue de manière négligeable au signal de sortie, d'où

$$\boxed{u_s(t) \simeq \frac{E'_0}{10} \cos(2\pi f_1 t).}$$

Exercice 6 : Filtre RLC

oral banque PT | 💡 3 | ✂️ 1



- ▷ Fonction de transfert ;
- ▷ Diagramme de Bode ;
- ▷ Signal de sortie d'un filtre.

1 Dans la limite très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil et C à un interrupteur ouvert, donc l'intensité dans la branche est nulle, et ainsi $v_s = 0 + 0$. Dans la limite très haute fréquence, C est équivalent à un fil donc on a directement $v_s = v_e$.

↪ le filtre est un passe-haut.

2 Diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{Z_{RL}}{Z_{RL} + Z_C} = \frac{R + jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

Pour passer à la forme canonique, on multiplie en haut et en bas par $jC\omega$,

$$\underline{H} = \frac{jRC\omega - LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

On identifie l'opération à faire en comparant la forme canonique à l'expression que l'on a : le dénominateur n'est pas fractionnaire.

Pour avancer, on peut proposer à l'examinateur d'identifier directement ω_0 et Q car il s'agit d'un RLC série, donc d'un circuit de référence. S'il refuse, il faut alors faire le calcul ...

Par identification du dénominateur avec la forme canonique, on en déduit

$$-LC\omega^2 = -x^2 = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

et

$$jRC\omega = \frac{jx}{Q} = \frac{j\omega}{Q\omega_0} \quad \text{soit} \quad Q = \frac{1}{RC\omega_0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

3 En très basse fréquence,

$$\underline{H} \sim \frac{jx}{Q} = \frac{jx}{1} \quad \text{d'où} \quad G_{dB} \sim 20 \log x - 20 \log Q,$$

la pente est donc de **+20 dB/décade**.

En très haute fréquence,

$$\underline{H} \sim \frac{-x^2}{-x^2} = 1 \quad \text{d'où} \quad G_{dB} = 0$$

ce qui est conforme avec **une asymptote horizontale**.

Avec l'ordonnée à l'origine de l'asymptote TBF ($x = 10^0 = 1$), $G_{dB} = -20 \log Q = -20$ dB, on déduit $\log Q = 1$ soit $Q = 10$. On peut aussi utiliser le fait que $G_{TBF} = 0$ lorsque $x = Q$, ou encore exprimer la valeur exacte de $|\underline{H}(x=1)|$ en fonction de Q .

Bien que le filtre soit d'ordre 2, il n'a pas d'asymptote de pente ± 40 dB/décade : cela n'a rien de contradictoire, et vient ici du fait qu'on mesure la sortie aux bornes d'une association de dipôles.

4 La question n'est pas simple : changer R modifie la valeur de Q , mais cela a un impact énorme sur le diagramme de Bode, d'une part via l'intermédiaire de l'ordonnée à l'origine de l'asymptote basse fréquence et d'autre part car elle contraint l'existence ou non d'une résonance. Une illustration est donnée sur la figure 5.

Le signal carré est la dérivée du signal triangulaire. Le facteur de qualité du filtre est donc tel que tout le spectre du signal soit dans le domaine très basse fréquence du filtre : comme la pente de l'asymptote est de +20 dB/décade, il se comporte en dérivateur.

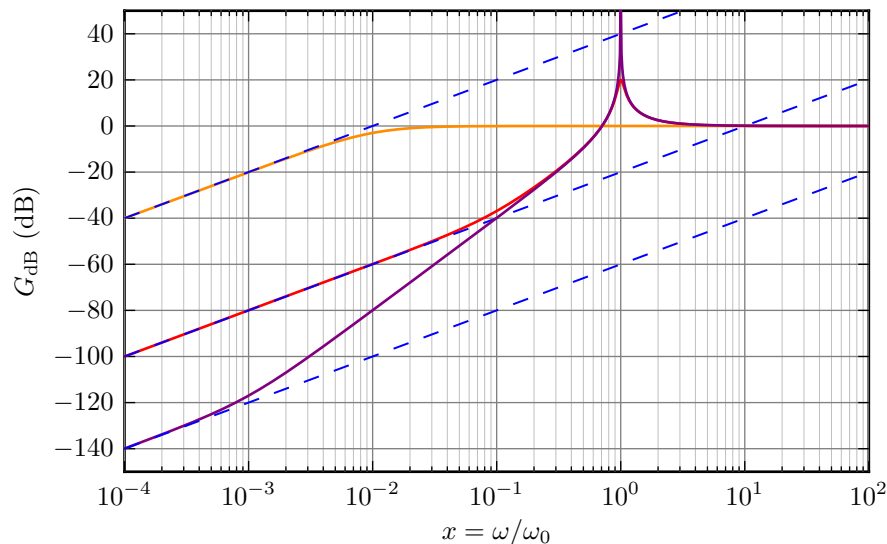


Figure 5 – Diagrammes de Bode asymptotique d'un filtre RLC. Les trois diagrammes sont tracés pour la même fonction de transfert, la même pulsation propre, seule la valeur du facteur de qualité est modifiée : elle vaut 0,01 pour la courbe orange, 10 pour la courbe rouge (cas de l'énoncé) et 1000 pour la courbe violette. Version couleur sur le site de la classe.

Si l'on observe des impulsions, cela signifie que les variations brusques du signal, associées aux hautes fréquences, sont sensiblement mieux transmises que les variations lentes, associées aux basses fréquences et qui décrivent son allure globale. Le facteur de qualité est donc tel que les basses fréquences du spectre soient coupées et les hautes fréquences transmises.

Par exemple, si la fréquence fondamentale du signal est telle que $x = 1 \cdot 10^{-3}$, alors la première situation pourrait correspondre à la courbe rouge de la figure 5, et la deuxième à la courbe orange.

Exercice 7 : Signal de sortie d'un filtre

adapté oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2



- ▷ Analyse de Fourier ;
- ▷ Diagramme de Bode ;
- ▷ Signal de sortie d'un filtre.

⚠ ⚠ ⚠ **Attention !** Les deux voies de l'oscilloscope ne sont pas représentées à la même échelle !

1 Le signal créneau a une **amplitude de 2,5 V**, une **période de 1 ms** soit une **fréquence de 1 kHz** et une **valeur moyenne nulle**.

2 On constate sur le chronogramme que le signal créneau est impair, $v_e(-t) = -v_e(t)$, soit en termes de développement de Fourier

$$-\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2\pi k f t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(2\pi k f t) = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2\pi k f t) - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(2\pi k f t)$$

soit à tout instant

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(2\pi k f t) = 0$$

ce qui ne peut être vérifié que si

$$\boxed{\forall k, \quad B_k = 0.}$$

En termes mathématiques, on utilise le fait que les fonctions sinusoidales constituent une famille libre. Physiquement, un signal est constamment nul si et seulement si toutes les harmoniques de ce signal sont d'amplitude nulles.

3 Le diagramme de Bode du filtre est celui d'un filtre passe-bande dont la fréquence centrale est $f_0 = 3 \text{ kHz}$.

4 Si on modélise le signal de sortie par une unique sinusoïde, on lit graphiquement que celle-ci aurait une période égale à un tiers de la période du créneau, soit une **fréquence $3f = 3 \text{ kHz}$** , et une amplitude que l'on peut estimer **égale à 1 V** , en tenant compte de l'échelle différente. Cette sinusoïde correspond à l'harmonique de rang $k = 3$ du signal d'entrée.

5 Les deux harmoniques « candidates » sont celles dont la fréquence est la plus proche de la fréquence centrale du filtre, car ce seront les moins atténuées par le filtre : les deux harmoniques envisageables sont donc le fondamental $k = 1$ et l'harmonique de rang $k = 5$.

6 On constate graphiquement que la « sinusoïde » envisagée précédemment a une amplitude qui varie à la même fréquence que le créneau. La deuxième harmonique à considérer serait donc le fondamental $k = 1$ du créneau. Retrouvons ce résultat à partir du diagramme de Bode.

▷ pour le fondamental $k = 1$: $f = 1 \text{ kHz}$ donc $G_{\text{dB}} = -22 \text{ dB}$, si bien que dans le signal de sortie l'harmonique a une amplitude

$$A_{1,s} = |H(1 \text{ kHz})| A_{1,e} = 10^{-22/20} \frac{4A}{\pi}.$$

▷ pour l'harmonique $k = 5$: $f = 5 \text{ kHz}$, donc $G_{\text{dB}} = -15 \text{ dB}$, si bien que dans le signal de sortie l'harmonique a une amplitude

$$A_{5,s} = |H(5 \text{ kHz})| A_{5,e} = 10^{-15/20} \frac{4A}{5\pi}.$$

Finalement, le rapport des amplitudes de ces deux harmoniques vaut

$$\frac{A_{1,s}}{A_{5,s}} = \frac{10^{-22/20}}{10^{-15/20}} \times 5 = 2,2,$$

ce qui confirme que le fondamental joue un rôle plus important dans le signal de sortie que l'harmonique $k = 5$.

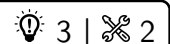
7 L'amplitude de toutes les harmoniques de rang $k \geq 7$ est inférieure à celle de rang 5 dans le signal d'entrée, et on constate sur le diagramme de Bode qu'elles sont encore plus atténuées par le filtre que l'harmonique de rang 5. Comme l'harmonique de rang 5 est déjà négligée, celles de rang $k \geq 7$ le sont forcément aussi.

8 On calcule d'abord les valeurs des amplitudes ... puis on trace !

Harmonique k	Fréquence f_k (kHz)	Amplitude en entrée $4A/k\pi$ (V)	Amplitude en sortie $10^{G_{\text{dB}}(f_k)/20} \times 4A/k\pi$ (V)
1	1	3,2	0,24
3	3	1,1	2,2
5	5	0,64	0,12
7	7	0,45	0,05

On remarque que le caractère négligeable des harmoniques 5 et 7 s'avère finalement assez discutable !

Exercice 8 : Conception d'un filtre de signaux acoustiques



▷ Diagramme de Bode.

1 Le gabarit du filtre est représenté figure 6. La condition sur le gain nominal permet d'éliminer la zone colorée en bleu. La contrainte sur les basses fréquences permet d'éliminer la zone en jaune. La contrainte sur les hautes fréquences permet enfin d'éliminer la zone colorée en rouge.

2.a Pour un filtre passe bas du premier ordre, le diagramme de Bode en gain a une **asymptote horizontale dans la limite très basse fréquence et une asymptote de pente -20 dB/décade dans la limite très haute fréquence**. Pour $f = f_c$, $H = 1/(1 + j)$ donc $|H| = 1/\sqrt{2}$ et $G_{\text{dB}} = -3 \text{ dB}$.

2.b Pour savoir si ce filtre peut satisfaire au cahier des charges, il faut superposer sa courbe de gain au gabarit du filtre et vérifier qu'elle n'empiète pas sur les zones interdites du gabarit. On voit que **ce n'est pas le cas** : la courbe de gain passe dans la zone représentée en rouge sur le gabarit, signe que le passe-bas d'ordre 1 n'atténue pas suffisamment les fréquences proches de 40 kHz . Pour éviter cela, il faut que l'asymptote très haute fréquence soit plus inclinée. Or la pente est d'autant plus élevée que l'ordre du filtre est élevé : utiliser un filtre d'ordre supérieur devrait permettre de résoudre le problème.

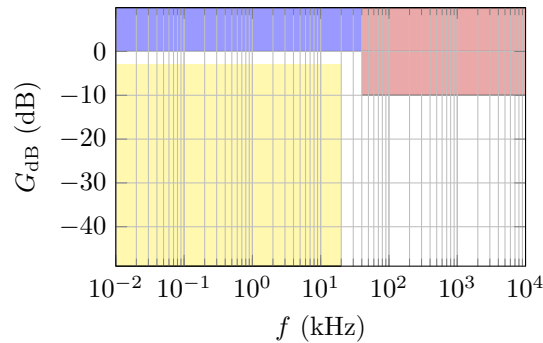


Figure 6 – Gabarit du filtre pour signaux acoustiques. Version couleur sur le site de la classe.

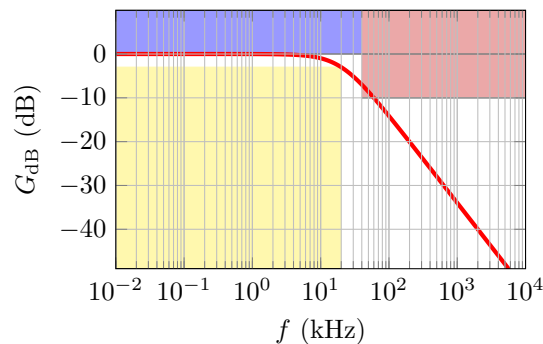


Figure 7 – Gabarit du filtre pour signaux acoustiques superposé à la courbe en gain d'un passe-bas d'ordre 1. Version couleur sur le site de la classe.

3.a La courbe de gain d'un filtre passe-bas du second ordre **asymptote horizontale dans la limite très basse fréquence et une asymptote de pente -40 dB/décade dans la limite très haute fréquence**. Par contre, il peut présenter une résonance au voisinage de sa fréquence centrale. Pour voir s'il peut satisfaire au cahier des charges, on superpose sur la figure 8 le diagramme asymptotique au gabarit, ce qui permet de voir que le diagramme asymptotique est complètement compris dans la zone permise du gabarit. Ainsi, **ce filtre peut potentiellement satisfaire au cahier des charges**.

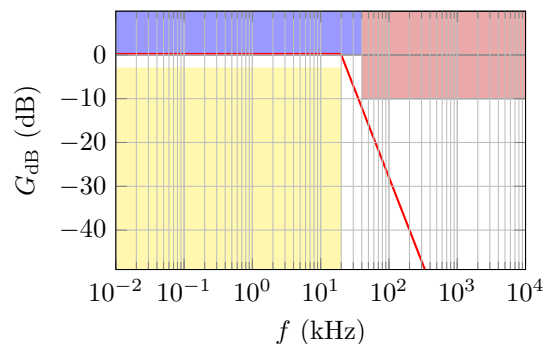


Figure 8 – Gabarit du filtre pour signaux acoustiques superposé à la courbe asymptotique en gain d'un passe-bas d'ordre 2. Version couleur sur le site de la classe.

3.b Lorsque $f = f_c$, c'est-à-dire $x = 1$,

$$\underline{H} = \frac{1}{j/Q} \quad \text{donc} \quad G_{dB} = 20 \log Q.$$

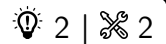
À la fréquence de coupure, il faut

$$-3 \text{ dB} \leq G_{dB} \leq 0 \text{ dB} \quad \text{soit} \quad 10^{-3/20} \leq Q \leq 10^0 \quad \text{et} \quad \boxed{0,71 \leq Q \leq 1}$$

Notons que si $Q > 1/\sqrt{2}$ il y a résonance, c'est-à-dire que la fonction de transfert passe par un maximum pour $f_r < f_0$, de gain supérieur au gain nominal. La courbe de gain empiète alors sur la zone interdite bleue du gabarit. Cependant, le gain nominal n'est pas forcément le gain maximal autorisé, mais plutôt la valeur asymptotique : on peut penser qu'une résonance large et peu marquée est acceptable.

Liens entre représentations temporelle et fréquentielle

Exercice 9 : Obtention d'une équation différentielle



▷ Lien entre représentations temporelle et fréquentielle.

Raisonnons à partir de la figure 9.

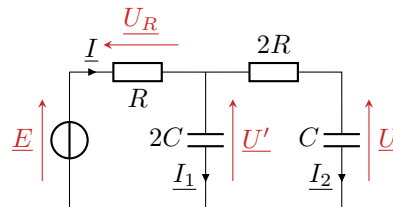


Figure 9 – Schéma des notations.

D'après la loi des nœuds,

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

et en utilisant les admittances,

$$\frac{1}{R}\underline{U}_R = 2jC\omega\underline{U}' + jC\omega\underline{U}.$$

Pour limiter les fractions on multiplie directement par R ,

$$\underline{U}_R = 2j\omega\tau\underline{U}' + j\omega\tau\underline{U}$$

D'après la loi des mailles dans la maille de droite,

$$\underline{U}' = \underline{U} + 2R\underline{I}_2 = \underline{U} + 2jRC\omega\underline{U}$$

et dans la maille de gauche

$$\underline{U}_R = \underline{E} - \underline{U}' = \underline{E} - \underline{U} - 2jRC\omega\underline{U}.$$

En regroupant et en identifiant $RC = \tau$,

$$\underline{E} - \underline{U} - 2j\omega\tau\underline{U} = 2j\omega\tau(\underline{U} + 2j\omega\tau\underline{U}) + j\omega\tau\underline{U}$$

soit

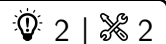
$$\underline{E} = \underline{U} + 5j\omega\tau\underline{U} + 4\tau^2(j\omega)^2\underline{U}$$

En identifiant les puissances de $j\omega$ à l'ordre des dérivées pour retourner dans le domaine des représentations réelles, on aboutit à

$$e = u + 5\tau \frac{du}{dt} + 4\tau^2 \frac{d^2u}{dt^2}$$

ce qui est bien le résultat escompté.

Exercice 10 : Mesure d'impédance par détection synchrone



- ▷ Fonction de transfert ;
- ▷ Signal de sortie d'un filtre ;
- ▷ Lien entre représentations temporelle et fréquentielle.

1 • **Nature du filtre** : Une cellule RC série forme un filtre passe-bas du premier ordre lorsque la tension de sortie est mesurée aux bornes du condensateur. Du point de vue temporel, ce filtre peut servir à lisser un signal (p.ex. élimination du bruit), mais aussi comme filtre moyenneur et intégrateur si la fréquence du signal est très supérieure à la fréquence de coupure du filtre.

Attention avec le comportement intégrateur : certes, le signal de sortie est proportionnel à l'intégrale du signal d'entrée ... mais au prix d'une forte atténuation. Pour réaliser un intégrateur, on préférera donc

systématiquement utiliser un montage actif, du type du montage intégrateur à ALI qui sera discuté dans le cours dédié.

- **Fonction de transfert** : par un pont diviseur, sa fonction de transfert s'écrit

$$\underline{H} = \frac{v_s}{v_3} = \frac{1/jC_1\omega}{R_1 + 1/jC_1\omega} \quad \text{d'où} \quad \underline{H} = \frac{1}{1 + jR_1C_1\omega}$$

On identifie la pulsation de coupure $\omega_c = 1/R_1C_1$, ce qui permet d'écrire

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_c}.$$

- **Diagramme de Bode** : dans la limite basse fréquence,

$$\underline{H} \sim \frac{1}{1} \quad \text{donc} \quad G_{dB} \sim 20 \log 1 = 0.$$

Dans la limite haute fréquence,

$$\underline{H} \sim \frac{1}{j\omega/\omega_c} = -j\frac{\omega_c}{\omega} \quad \text{donc} \quad G_{dB} \sim 20 \log \frac{\omega_c}{\omega} = -20 \log \frac{\omega}{\omega_c},$$

le diagramme de Bode présente donc une pente de -20 dB/décade.

- **Tracé** : cf cours de PTSI!

- 2 Comme l'impédance d'entrée du multiplieur est infinie, alors \underline{Z} et R_0 sont traversés par le courant i , donc

$$v_1(t) = R_0 i = R_0 I_0 \cos(\omega t).$$

et

$$\underline{V}_2 = \underline{Z} I_0 e^{j\omega t} = (X + jY) (\cos \omega t + j \sin(\omega t)) I_0 \quad \text{d'où} \quad v_2(t) = \text{Re } \underline{V}_2 = X I_0 \cos(\omega t) - Y I_0 \sin(\omega t).$$

- 3 On déduit de ce qui précède

$$v_3(t) = k v_1(t) v_2(t) = k R_0 X I_0^2 \cos^2(\omega t) - k R_0 Y I_0^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t).$$

Or $\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega t))$ et $\cos(\omega t) \sin(\omega t) = \frac{1}{2} \sin(2\omega t)$, d'où

$$v_3(t) = \frac{1}{2} k R_0 X I_0^2 + \frac{1}{2} k R_0 X I_0^2 \cos(2\omega t) - \frac{1}{2} k R_0 I_0^2 Y \sin(2\omega t).$$

Son spectre est donc composé d'un pic à fréquence nulle et d'un pic à la pulsation 2ω (dont il n'est pas immédiat de déterminer l'amplitude). On constate de l'**enrichissement spectral**, dû au fait que la multiplication de signaux est une opération non-linéaire.

- 4 Pour que v_s soit quasi-constant, il faut que la composante à 2ω soit coupée par le filtre, ce qui est le cas si

$$\omega_c \ll \omega \quad \text{soit} \quad \frac{1}{R_1 C_1} \ll \omega \quad \text{et} \quad R_1 C_1 \gg \frac{1}{\omega}.$$

Le filtre agit alors en tant que moyennneur du signal v_3 . Comme tout est connu, mesurer la valeur du signal de sortie permet de déterminer X .

- 5 Si on met un condensateur C_0 à la place de R_0 , alors

$$\underline{V}'_2 = \frac{1}{jC_0\omega} I_0 e^{j\omega t} = \frac{I_0}{C\omega} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

ce qui permet d'écrire

$$v'_2(t) = \frac{I_0}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{I_0}{C\omega} \sin(\omega t).$$

On a alors

$$v'_3(t) = \frac{kX I_0^2}{C\omega} \cos(\omega t) \sin(\omega t) - \frac{Y I_0^2}{C\omega} \sin^2(\omega t).$$

La logique est la même que précédemment, puisque $\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t))$.

Problème ouvert

Exercice 11 : Dipôles masqués

oral CCINP MP | 💡 3 | ✂️ 1


 ▷ *Problème ouvert.*

- ▷ Comme le courant dans le circuit est non nul en régime continu, alors le condensateur est forcément monté en parallèle d'un autre dipôle ;
- ▷ Comme la tension de sortie est nulle en basse fréquence, elle est forcément mesurée aux bornes de la bobine ;
- ▷ Comme la tension de sortie est nulle en haute fréquence, elle est forcément mesurée aux bornes du condensateur.
 - ↪ Le dipôle D_2 est nécessairement une association parallèle entre la bobine et le condensateur ;
 - ↪ Le dipôle D_1 est donc forcément la résistance : s'il s'agissait d'un fil on aurait $s = e$ à toute fréquence ;
 - ↪ Le montage est donc celui de la figure 10.

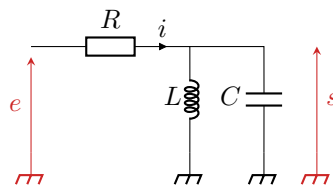


Figure 10 – Les dipôles démasqués !.

- **Analyse en régime continu** : la bobine équivaut à un fil, donc la tension aux bornes de la résistance est directement égale à E , d'où avec la loi d'Ohm

$$E = RI \quad \text{soit} \quad R = \frac{E}{I} = 3 \text{ k}\Omega.$$

- **Analyse en régime sinusoïdal** : l'admittance équivalente de l'association de la bobine et du condensateur est

$$\underline{Y} = \frac{1}{jL\omega} + jC\omega.$$

Avec un pont diviseur de tension,

$$\underline{H} = \frac{1/\underline{Y}}{R + 1/\underline{Y}} = \frac{1}{1 + \underline{Y}R} \quad \text{soit} \quad \underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{R}{jL\omega} + jRC\omega}.$$

On peut donc identifier avec la forme canonique donnée,

$$\begin{cases} \frac{R}{jL\omega} = -\frac{jQ\omega_0}{\omega} \\ jRC\omega = jQ\frac{\omega}{\omega_0} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} Q\omega_0 = \frac{R}{L} \\ \frac{Q}{\omega_0} = RC \end{cases}$$

D'après les valeurs expérimentales,

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 6,3 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 5.$$

On en déduit

$$L = \frac{R}{Q\omega_0} = 95 \text{ mH} \quad \text{et} \quad C = \frac{Q}{\omega_0 R} = 2,7 \cdot 10^{-7} \text{ F}.$$