



# Amplificateur linéaire intégré

## Analyse de corrigé

### Exercice 1 : Montage soustracteur



- ▷ Montage simple à ALI;
- ▷ Régime linéaire.

### Correction des questions d'analyse du corrigé

**Question d'analyse 1** - Les courants d'entrée d'un ALI, appelés courants de polarisation, sont supposés nuls dans le modèle d'ALI idéal. En réalité, ils sont de l'ordre du nA.

**Question d'analyse 2** - Les deux tensions d'intérêt de cette branche,  $e_1$  et  $s$ , sont données aux extrémités alors que le nœud central est de potentiel inconnu. Pourtant, les deux résistances sont bien parcourues par le même courant et forment bel et bien un pont diviseur de tension, mais les tensions divisées seraient  $v_- - e_1$  et  $s - e_1$ , ce qui ne facilite pas le calcul.

**Question d'analyse 3** - Vue la position de la masse, la tension intéressante  $e_2$  est cette fois-ci imposée à l'ensemble de la branche. La LNP s'écrit

$$\frac{e_2 - v_+}{R} + \frac{0 - v_+}{R'} = 0$$

Je vous laisse finir le calcul, qui donne bien le même résultat.

**Question d'analyse 4** - Le montage ne compte qu'une unique rétroaction, et celle-ci est négative. L'ALI fonctionne donc selon toute vraisemblance en régime linéaire, du moins tant que les signaux d'entrée restent d'amplitude raisonnable.

**Question d'analyse 5** - Absolument pas ☺ Attention à cette confusion, fréquente au début : le régime linéaire implique  $\varepsilon = v_+ - v_- = 0$  mais sûrement pas  $v_+ = v_- = 0$  ! Les deux potentiels valent ... ce qu'ils valent !

## Montages simples

### Exercice 2 : Montage dérivateur



- ▷ Montage simple à ALI;
- ▷ Régime linéaire.

Il n'y a qu'une rétroaction négative, donc l'ALI fonctionne probablement en régime linéaire. La présence du condensateur incite à travailler en complexes. Les deux tensions intéressantes  $s$  et  $e$  sont aux extrémités des branches, on utilise donc la loi des nœuds en termes de potentiel à l'entrée  $\ominus$  de l'ALI :

$$\frac{E - V_-}{1/jC\omega} + \frac{S - V_-}{R} = 0.$$

Comme le fonctionnement est linéaire, alors  $V_- = V_+ = 0$  donc

$$jC\omega \underline{E} + \frac{S}{R} = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{S = -jRC\omega \underline{E}},$$

ce qui donne dans le domaine temporel

$$\boxed{s = -RC \frac{de}{dt}}.$$

**Exercice 3 : Montage sommateur**

- ▷ Montage simple à ALI;
- ▷ Régime linéaire.

La seule rétroaction est négative, on peut donc supposer que l'ALI fonctionne en régime linéaire.

D'après la loi des nœuds en termes de potentiel, en notant  $i_1$  et  $i_2$  les courants dans les branches d'entrée soumises à  $v_1$  et  $v_2$ ,

$$i_1 + i_2 = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{v_1 - v_+}{R} + \frac{v_2 - v_+}{R} = 0 \quad \text{d'où} \quad v_+ = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

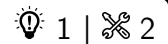
Notons  $v_-$  le potentiel de l'entrée inverseuse, égal à la tension aux bornes de la résistance représentée verticalement. Les deux résistances de la branche du bas sont parcourues par le même courant, donc

$$\frac{v_-}{v_s} = \frac{R}{R + R} \quad \text{soit} \quad v_s = 2v_-.$$

Enfin, comme l'ALI fonctionne de régime linéaire alors  $v_+ = v_-$  d'où

$$v_s = v_1 + v_2.$$

*Le point important de l'exercice est le choix de la méthode pour exprimer les potentiels. Sur la branche du haut, l'entrée intéressante  $\oplus$  est à une extrémité de la branche d'où le choix de la loi des nœuds, alors que sur la branche du bas l'entrée intéressante  $\ominus$  est au centre de la branche, d'où l'intérêt du pont diviseur.*

**Exercice 4 : Intégrateur différentiel**

- ▷ Montage simple à ALI;
- ▷ Régime linéaire.

La seule rétroaction est négative, on peut donc supposer le régime linéaire. En notation complexe, la loi des nœuds à l'entrée  $\ominus$  donne

$$\frac{E_1 - V_-}{R} + \frac{S - V_-}{1/jC\omega} = 0$$

Un pont diviseur de tension dans la branche du bas donne

$$\frac{V_+}{E_2} = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Or en fonctionnement linéaire on a

$$V_- = V_+ = \frac{1}{1 + jRC\omega} E_2.$$

En fusionnant les deux équations,

$$\frac{E_1}{R} - \frac{1}{R(1 + jRC\omega)} E_2 + jC\omega S - \frac{jC\omega}{1 + jRC\omega} E_2 = 0$$

soit

$$\frac{E_1}{jRC\omega} - \frac{1}{jRC\omega(1 + jRC\omega)} E_2 + S - \frac{1}{1 + jRC\omega} E_2 = 0$$

et ainsi

$$S = -\frac{E_1}{jRC\omega} + \frac{E_2}{jRC\omega} \left( \frac{1}{1 + jRC\omega} + \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \right)$$

ce qui donne au final

$$S = \frac{1}{jRC\omega} (E_2 - E_1).$$

On utilise la correspondance habituelle pour passer dans le domaine temporel,

$$s(t) = s(0) + \frac{1}{RC} \int_0^t (e_2 - e_1) dt.$$

**Exercice 5 : ALI avec défauts**

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 1



- ▷ *Modèle du premier ordre ;*
- ▷ *Modèle de l'ALI idéal.*

1 La seule rétroaction étant négative, l'ALI fonctionne probablement en régime linéaire. On a donc

$$v_s = A_d \varepsilon = A_d (v_e - v_s)$$

ce qui donne

$$(1 + A_d)v_s = A_d v_e$$

et ainsi

$$v_s = \frac{A_d}{1 + A_d} v_e \quad \text{soit} \quad v_s = \frac{A_0}{1 + A_0 + j\omega\tau} v_e.$$

En supposant  $A_0 \gg 1$ , on peut réécrire le résultat

$$v_s = \frac{1}{1 + j\omega\tau/A_0} v_e$$

Le montage est un suiveur : dans la limite basse fréquence, la tension de sortie est identique à la tension d'entrée, indépendamment des deux résistances  $R_u$  et  $R_g$ .

2 Le spectre du signal  $v_e$  ne contient qu'un seul pic, d'amplitude  $E$ , à la pulsation  $\omega$ .

▷ Expérience 1 : l'amplitude d'entrée est telle que l'ALI sature, ce qui est source d'enrichissement spectral.

→ spectre B.

▷ Expérience 2 : la fréquence d'entrée est très élevée, le montage ayant un comportement passe-bas on s'attend à une atténuation.

→ spectre C.

▷ Expérience 3 : la fréquence est raisonnable et l'amplitude du signal d'entrée pas trop élevée, l'ALI fonctionne constamment en régime linéaire dans son domaine basses fréquences.

→ spectre A.

**Exercice 6 : Filtre actif amplificateur**

💡 2 | ✂️ 2 | Ⓜ️



- ▷ *Montage simple à ALI ;*
- ▷ *Régime linéaire et de saturation ;*
- ▷ *Filtrage.*

Le montage ne compte qu'une seule rétroaction négative, on fait donc l'hypothèse que l'ALI fonctionne en régime linéaire.

1 • **Dans la limite des basses fréquences** : Le condensateur équivaut à un interrupteur ouvert, et aucun courant ne peut traverser les résistances. Comme  $s$  est la tension aux bornes de  $R'$  on en déduit  $s = 0$  c'est-à-dire que les basses fréquences sont **coupées**.

• **Dans la limite des hautes fréquences** : Le condensateur équivaut à un fil, le montage s'apparente alors à un amplificateur inverseur. On en déduit que les hautes fréquences sont **transmises**, et potentiellement amplifiées.

• **Conclusion** : le filtre est un passe-haut.

2 L'association  $R, C$  a pour impédance équivalente

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega}.$$

D'après la loi des nœuds en potentiel appliquée à l'entrée  $\ominus$  de l'ALI avec  $v_- = v_+ = 0$ ,

$$\frac{e - 0}{\underline{Z}} + \frac{s - 0}{R'} = 0$$

On en déduit

$$\underline{H} = \frac{s}{e} = -\frac{R'}{\underline{Z}} = -\frac{R'}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{-R'/R}{1 + \frac{1}{jRC\omega}}$$

On peut ainsi identifier à la forme canonique donnée,

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H_0 = -R'/R \\ \omega_c = 1/RC \end{cases}$$

3 La capacité doit valoir

$$C = \frac{1}{R\omega_c} = 1 \cdot 10^{-7} \text{ F.}$$

En haute fréquence,  $\underline{H} \sim H_0$ . Ainsi, si le gain est de 20 dB alors

$$|H_0| = \frac{R'}{R} = 10^{20/20} = 10 \quad \text{d'où} \quad R' = 10 \text{ k}\Omega.$$

4 Dans la limite des hautes fréquences, d'après la question précédente,

$$G_{\text{dB}} = 20 \log |H_0| = 20 \text{ dB.}$$

Dans la limite des basses fréquences,

$$\underline{H} \sim \frac{H_0}{-j\frac{\omega_c}{\omega}} = \frac{j\omega H_0}{\omega_c} \quad \text{soit} \quad G_{\text{dB}} = 20 \log |H| = 20 \log \omega + 20 \log \frac{|H_0|}{\omega_c}.$$

Comme toujours avec les filtres du premier ordre, les deux asymptotes se coupent en  $\omega = \omega_c$ . On en déduit le diagramme est représenté figure 1.

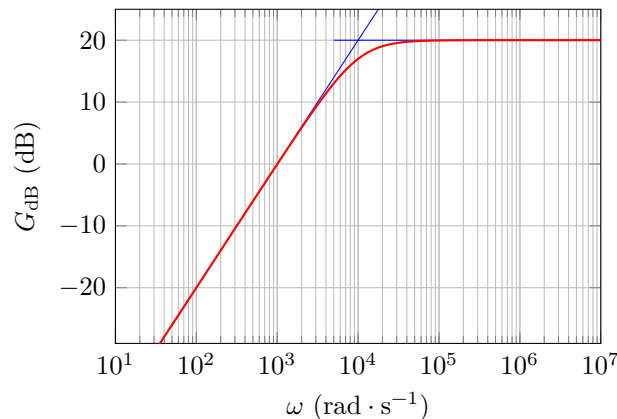


Figure 1 – Diagramme de Bode.

5 Le plus simple est de raisonner sur le diagramme de Bode, seul le dernier cas n'est pas évident.

- ▷  $E_0 = 1 \text{ V}$  et  $\omega = 1 \cdot 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  : on calcule (ou on constate sur le diagramme) que  $G_{\text{dB}} = -20 \text{ dB}$  donc  $|H| = 10^{-20/20} = 1/10$ , le signal de sortie est donc sinusoïdal d'amplitude  $E_0/10 = 0,1 \text{ V}$  et le spectre identique à celui de l'entrée, à l'amplitude près.
- ▷  $E_0 = 3 \text{ V}$  et  $\omega = 1 \cdot 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  : de même, le signal de sortie est sinusoïdal d'amplitude  $0,3 \text{ V}$ .
- ▷  $E_0 = 1 \text{ V}$  et  $\omega = 1 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  : à cette pulsation,  $G_{\text{dB}} = 20 \text{ dB}$  donc  $|H| = 10^{20/20} = 10$ , le signal de sortie est donc sinusoïdal d'amplitude  $10E_0 = 10 \text{ V}$ .
- ▷  $E_0 = 3 \text{ V}$  et  $\omega = 1 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  : en reprenant le raisonnement précédent, le signal de sortie devrait avoir une amplitude de  $30 \text{ V}$  ... ce qui est impossible, car la tension de sortie doit rester inférieure à la tension de saturation de l'ALI. Le signal de sortie est donc un sinus écrété, qui conserve la valeur de  $\pm 15 \text{ V}$  dès que l'ALI est en saturation. Cela se traduit par un enrichissement spectral : outre le fondamental à  $1 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , des harmoniques apparaissent dans le spectre à  $2 \cdot 10^5, 3 \cdot 10^5, 4 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  etc. mais prévoir leur amplitude n'est pas simple.

**Exercice 7 : Régulation de température**

inspiré écrit Centrale TSI 2018 | 💡 2 | ✂ 2



▷ Comparateur à hystérésis.

1 Il s'agit d'un pont diviseur de tension,

$$v_1 = \frac{R_0}{R_0 + R(T)} V_0.$$

2 L'ALI ne possède qu'une unique rétroaction positive, il fonctionne donc nécessairement en régime de saturation. La loi des nœuds en potentiel appliqué à la borne  $\oplus$  de l'ALI s'écrit

$$\frac{v_s - v_+}{R_2} + \frac{E - v_+}{R_1} = 0 \quad \text{soit} \quad R_1 v_s + R_2 E - (R_1 + R_2)v_+ = 0$$

et ainsi

$$v_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s + \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s + \left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) E$$

ce qui s'écrit bien

$$v_+ = k v_s + (1 - k)E.$$

3 Supposons l'ALI en saturation haute : on a alors  $v_s = V_{\text{sat}}$ . Il y reste tant que

$$v_- < v_+ \quad \text{soit} \quad v_e < kV_{\text{sat}} + (1 - k)E.$$

Supposons maintenant l'ALI en saturation basse, soit  $v_s = -V_{\text{sat}}$ . Il y reste tant que

$$v_- > v_+ \quad \text{soit} \quad v_e > -kV_{\text{sat}} + (1 - k)E.$$

4 En plaçant les tensions de basculement de manière symétrique par rapport à  $(1 - k)E$ , on en déduit la caractéristique du montage de la figure 2. Il s'agit d'un comparateur à hystérésis inverseur décalé.

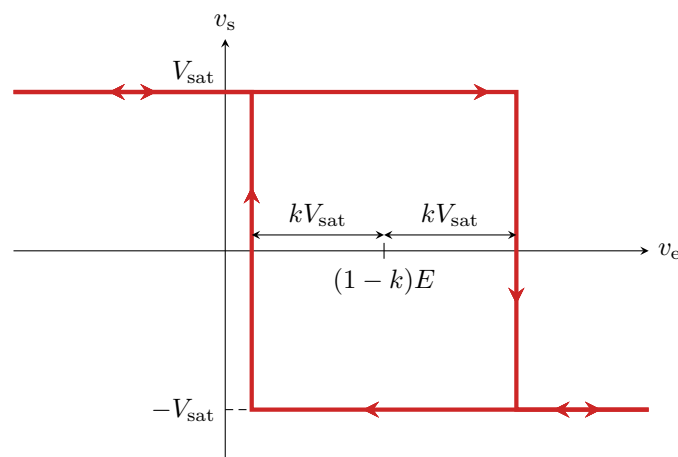


Figure 2 – Caractéristique entrée-sortie du montage comparateur à hystérésis décalé.

5 On souhaite que le comparateur bascule en saturation haute lorsque  $T = T_c - \Delta T$ . Traduit en termes de tension, cela donne

$$v_1(T = T_c - \Delta T) = -kV_{\text{sat}} + (1 - k)E(T_c)$$

soit

$$\begin{aligned} \alpha + \beta(T_c - \Delta T) &= -kV_{\text{sat}} + (1 - k)(a + bT_c) \\ \beta T_c + \alpha - \beta \Delta T &= (1 - k)bT_c + (1 - k)a - kV_{\text{sat}} \end{aligned} \quad (1)$$

À l'inverse, la condition d'arrêt du dispositif s'écrit

$$\begin{aligned}\alpha + \beta(T_c + \Delta T) &= +kV_{\text{sat}} + (1 - k)(a + bT_c) \\ \beta T_c + \alpha + \beta \Delta T &= (1 - k)b T_c + (1 - k)a + kV_{\text{sat}}\end{aligned}\quad (2)$$

En prenant la différence (2)–(1), on obtient

$$2\beta \Delta T = 2kV_{\text{sat}} \quad \text{soit} \quad \boxed{k = \frac{\beta \Delta T}{V_{\text{sat}}}}$$

6 On peut alors simplifier les conditions de basculement sous la même forme,

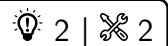
$$\beta T_c + \alpha = (1 - k)b T_c + (1 - k)a \quad \text{soit} \quad \boxed{[(1 - k)b - \beta] T_c + [(1 - k)a - \alpha] = 0},$$

et comme cette relation doit être vérifiée quelle que soit la température de consigne  $T_c$ , on en déduit que les deux coefficients sont nuls, soit

$$\boxed{a = \frac{\alpha}{1 - k} \quad \text{et} \quad b = \frac{\beta}{1 - k}}$$

## Impédance d'entrée, simulation de dipôles

### Exercice 8 : Résistance négative



- ▷ Montage simple à ALI;  
▷ Impédance d'entrée;  
▷ Régime linéaire et de saturation.

1 L'ALI compte une rétroaction sur chaque borne, il est donc **impossible** d'anticiper son régime de fonctionnement. D'après la loi des nœuds appliquée à l'entrée  $\ominus$ , on a

$$i + \frac{v_s - v^-}{R} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{v^- = v_s + Ri}$$

Par un pont diviseur sur la branche contenant les deux résistances  $R_1$  et  $R_2$ , on trouve

$$\boxed{v^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s}$$

2 En régime linéaire,  $v^+ = v^- = u$ , donc

$$u = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s \quad \text{soit} \quad v_s = \frac{R_1 + R_2}{R_1} u$$

En réinjectant dans l'expression de  $v^-$ , il vient

$$u \left( 1 - \frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) = Ri \quad \text{soit} \quad -\frac{R_2}{R_1} u = Ri \quad \text{d'où} \quad \boxed{u = -R \frac{R_1}{R_2} i}$$

L'intensité  $i$  et la tension  $u$  sont orientées en convention récepteur. La « loi de comportement » du montage est donc formellement identique à la loi d'Ohm, mais pour une résistance négative :

$$u = R_N i \quad \text{avec} \quad \boxed{R_N = -R \frac{R_1}{R_2}}$$

3 Si l'ALI est en régime linéaire, il y reste sans atteindre la saturation haute tant que

$$v_s < V_{\text{sat}} \quad \text{soit} \quad \frac{R_1 + R_2}{R_1} u < V_{\text{sat}} \quad \text{et} \quad u < \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}$$

En reprenant la relation entre  $u$  et  $i$  établie en régime linéaire, on en déduit que l'ALI reste en régime linéaire tant que

$$-R \frac{R_1}{R_2} i < \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} \quad \text{soit} \quad i > -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{V_{\text{sat}}}{R} = -I_{\text{basc}}.$$

Pour savoir si le montage a un comportement d'hystérésis, il faut calculer l'intensité de basculement du régime de saturation haute vers le régime linéaire. Si l'ALI est en saturation haute, il y reste tant que

$$v^+ > v^- \quad \text{soit} \quad \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} > V_{\text{sat}} + Ri \quad \text{soit} \quad i < -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{V_{\text{sat}}}{R} = -I_{\text{basc}}.$$

Le basculement entre régime linéaire et saturation haute a lieu pour le même courant  $-I_{\text{basc}}$  quel que soit le sens de bascule, il n'y a donc **pas d'hystérésis**.

*La relation  $u = R_N i$  a été établie en supposant le fonctionnement de l'ALI linéaire, elle ne peut donc PAS être utilisée en régime de saturation. En revanche, les expressions de  $v^+$  et  $v^-$  établies question 1 l'ont été sans aucune hypothèse sur le régime de fonctionnement de l'ALI, elles peuvent donc être utilisées aussi bien en régime linéaire qu'en régime de saturation ... à condition bien sûr de remplacer  $v_s$  par  $\pm V_{\text{sat}}$  dans le cas d'un fonctionnement saturé.*

4 De même, l'ALI reste en régime linéaire sans atteindre la saturation basse tant que

$$v_s > -V_{\text{sat}} \quad \text{soit} \quad \frac{R_1 + R_2}{R_1} u > -V_{\text{sat}} \quad \text{et} \quad u > -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}.$$

En reprenant la relation de résistance négative, on en déduit que l'ALI reste en régime linéaire tant que

$$-R \frac{R_1}{R_2} i > -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} \quad \text{soit} \quad i < \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{V_{\text{sat}}}{R} = I_{\text{basc}}.$$

Réciproquement, si l'ALI est en saturation basse, il reste dans ce régime de saturation tant que

$$v^+ < v^- \quad \text{donc} \quad -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} < -V_{\text{sat}} + Ri \quad \text{soit} \quad i > \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{V_{\text{sat}}}{R} = I_{\text{basc}}.$$

De nouveau, on trouve que le montage ne présente pas d'hystérésis.

5 Voir figure 3. La tension d'entrée de l'ALI au moment du basculement vaut

$$U_{\text{basc}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}.$$

D'après la question 1 avec  $v^- = u$  et  $v_s = V_{\text{sat}}$ , en saturation haute, la caractéristique est une droite d'équation

$$u = Ri + V_{\text{sat}}.$$

De même, dans le domaine correspondant à la saturation basse,

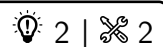
$$u = Ri - V_{\text{sat}}.$$

On trouve dans les deux cas des droites de même pente  $R$  et d'ordonnée à l'origine  $\pm V_{\text{sat}}$ . Enfin, dans le domaine de fonctionnement linéaire, la caractéristique est une droite d'équation

$$u = -R \frac{R_1}{R_2} i$$

dont la pente est indépendante des deux autres.

## Exercice 9 : Simulateur d'inductance



- ▷ Impédance d'entrée;
- ▷ Régime linéaire.

On utilise les notations de la figure 4. D'après la loi des nœuds,

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

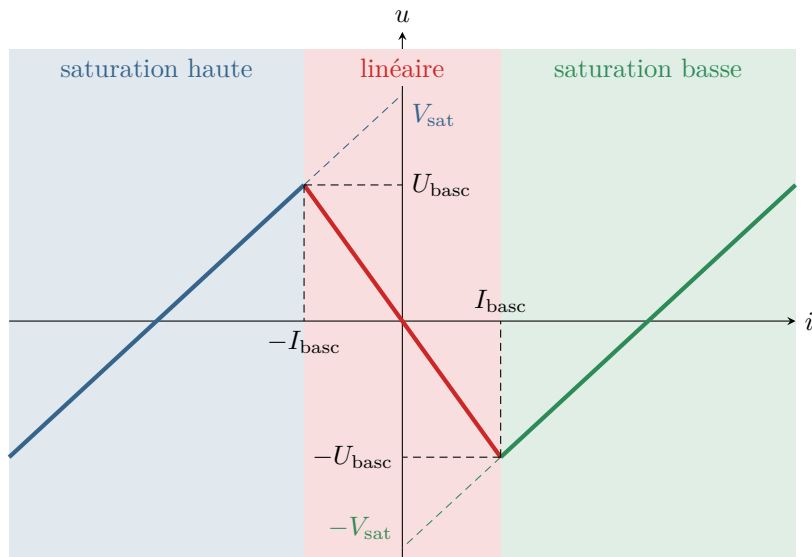


Figure 3 – Caractéristique du montage à résistance négative.

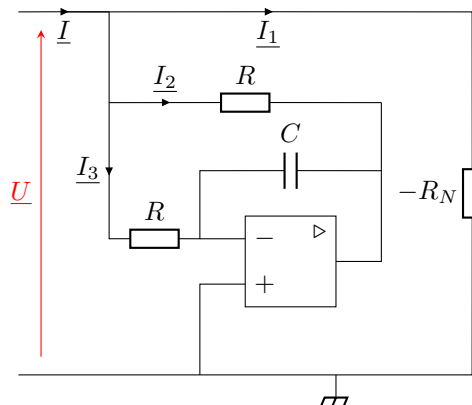


Figure 4 – Notations pour l'étude du simulateur d'inductance.

La résistance  $-R_N$  est directement soumise à la tension  $\underline{U}$ , donc

$$\underline{I}_1 = -\frac{\underline{U}}{R_N}.$$

De plus, comme l'ALI est en régime linéaire alors  $V_- = V_+ = 0$  et on en déduit

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}}{R}$$

car la résistance se trouve directement soumise à la tension  $\underline{U}$  elle aussi. Enfin, pour exprimer  $\underline{I}_2$ , on applique la loi des mailles aux deux branches « R » et « RC »,

$$R\underline{I}_2 = R\underline{I}_3 + \frac{\underline{I}_3}{jC\omega} \quad \text{d'où} \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{R} \left( 1 + \frac{1}{jRC\omega} \right).$$

On en déduit donc

$$\underline{I} = -\frac{\underline{U}}{R_N} + \frac{\underline{U}}{R} \left( 1 + \frac{1}{jRC\omega} \right) + \frac{\underline{U}}{R}$$

d'où

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{2}{R} + \frac{1}{jR^2C\omega} - \frac{1}{R_N}.$$

Contrairement à la majorité des exercices avec ALI, exprimer la tension de sortie n'a aucun intérêt ici, voire est contre-productif car cela introduit une inconnue supplémentaire dans les calculs.

**1** Une inductance pure a une admittance complexe  $\underline{Y}_L = 1/jL\omega$  : l'admittance d'entrée du montage prend une telle forme pour  $R_N = R/2$ , et auquel cas

$$L_{\text{éq}} = R^2 C.$$



## D'autres montages plus élaborés

### Exercice 10 : Filtre en peigne de fréquence

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2



- ▷ Montage à plusieurs blocs ;
- ▷ Régime linéaire ;
- ▷ Filtrage.

1 Considérons en entrée de la ligne le signal

$$\underline{U}_S = U_0 e^{j\omega t}.$$

En sortie,

$$\underline{U}_B = \underline{H}_L \underline{U}_S = U_0 e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t} \quad \text{soit} \quad \boxed{\underline{U}_B = U_0 e^{j\omega(t-\tau)}}.$$

Ainsi, le signal de sortie est égal au signal d'entrée décalé d'une durée  $\tau$  : le phénomène physique mis en jeu est donc la propagation du signal dans la ligne à retard, qui nécessite une durée  $\tau$ .

2 Raisonnons sur l'ALI dessiné à droite du schéma. Par un pont diviseur de tension,

$$\frac{V_+}{\underline{U}_B} = \frac{R_0}{R_0 + R_0} \quad \text{soit} \quad \underline{V}_+ = \frac{1}{2} \underline{U}_B.$$

De même,

$$\frac{V_-}{\underline{U}_D} = \frac{R}{R + \beta R} \quad \text{soit} \quad \underline{V}_- = \frac{1}{1 + \beta} \underline{U}_D.$$

L'ALI fonctionne en régime linéaire, donc  $\underline{V}_+ = \underline{V}_-$  soit

$$\frac{1}{2} \underline{U}_B = \frac{1}{1 + \beta} \underline{U}_D \quad \text{d'où} \quad \boxed{\underline{H}_B = \frac{1 + \beta}{2} = \alpha}.$$

3 Raisonnons maintenant sur l'ALI représenté à gauche du schéma. D'après la loi des nœuds en termes de potentiel,

$$\frac{U_E - V_+}{R} + \frac{U_D - V_+}{R} = 0 \quad \text{d'où} \quad \underline{V}_+ = \frac{U_E + U_D}{2}$$

Par un pont diviseur de tension,

$$\underline{V}_- = \frac{U_S}{2}.$$

L'ALI fonctionnant en régime linéaire,

$$\frac{U_E + U_D}{2} = \frac{U_S}{2} \quad \text{soit} \quad \underline{U}_S = \underline{U}_E + \underline{U}_D.$$

Or d'après les questions précédentes,

$$\underline{U}_D = \alpha \underline{U}_B = \alpha e^{-j\omega\tau} \underline{U}_S$$

si bien que l'équation devient

$$(1 - \alpha e^{-j\omega\tau}) \underline{U}_S = \underline{U}_E$$

et finalement

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega\tau}}}.$$

4 D'après ce qui précède,

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - \alpha \cos(\omega\tau) - j\alpha \sin(\omega\tau)}$$

ce qui donne

$$|\underline{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{(1 - \alpha \cos(\omega\tau))^2 + (\alpha \sin(\omega\tau))^2} = \frac{1}{1 - 2\alpha \cos(\omega\tau) + \alpha^2 \cos^2(\omega\tau) + \alpha^2 \sin^2(\omega\tau)}$$

ce qui se simplifie en

$$|\underline{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega\tau)}.$$

Le maximum est atteint lorsque  $\cos(\omega\tau) = +1$ , soit

$$H_{\max}^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2 - 2\alpha} = \frac{1}{(1 - \alpha)^2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{H_{\max} = \frac{1}{1 - \alpha}}.$$

Le minimum est atteint lorsque  $\cos(\omega\tau) = -1$ , soit

$$H_{\min}^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2 + 2\alpha} = \frac{1}{(1 + \alpha)^2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{H_{\min} = \frac{1}{1 + \alpha}}.$$

Le cosinus étant  $2\pi$ -périodique, la période  $\Omega$  du peigne de fréquence est telle que

$$(\omega + \Omega)\tau = \omega\tau + 2\pi \quad \text{soit} \quad \Omega\tau = 2\pi \quad \text{donc} \quad \boxed{\Omega = \frac{2\pi}{\tau}}.$$

Pour le calcul de la bande passante, commençons par calculer la plus petite pulsation  $\omega_c$  pour laquelle  $|\underline{H}| = H_{\max}/\sqrt{2}$ , telle que

$$\frac{1}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega_c\tau)} = \frac{1}{2(1 - \alpha)^2}$$

On en déduit

$$1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega_c\tau) = 2 - 4\alpha + 2\alpha^2 \quad \text{soit} \quad -2\alpha \cos(\omega_c\tau) = 1 - 4\alpha + \alpha^2 \quad \text{d'où} \quad \cos(\omega_c\tau) = \frac{4\alpha - 1 - \alpha^2}{2\alpha}$$

et ainsi

$$\omega_c = \frac{1}{\tau} \arccos \frac{4\alpha - 1 - \alpha^2}{2\alpha}.$$

On en déduit la bande passante,  $\Delta\omega = 2\omega_c$ , donnée par

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{2}{\tau} \arccos \frac{4\alpha - 1 - \alpha^2}{2\alpha}}.$$

**5** En première approximation, ce filtre laisse passer toutes les harmoniques de fréquence multiples  $\Omega/2\pi$  et coupe les autres. Hors le signal d'intérêt est périodique de période  $T$ , donc de fréquence  $1/T$ , si bien que toutes ses composantes de Fourier ont des fréquences multiples de  $1/T$ . Pour que le filtre transmette ces composantes en éliminant le bruit donc les fréquences sont différentes, il faut avoir

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad \text{soit} \quad \frac{2\pi/\tau}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\tau = T}.$$

### Exercice 11 : Démodulateur à déphasage

oral banque PT | 💡 3 | ✂️ 2



- ▷ Montage à plusieurs blocs ;
- ▷ Régime linéaire ;
- ▷ Filtrage.

Les premières questions sont d'un niveau tout à fait raisonnable, en revanche la dernière est vraiment très difficile.

**1** Un ALI idéal se caractérise par

- ▷ des courants de polarisation nuls ;
- ▷ un courant de sortie indépendant de la tension de sortie ;
- ▷ une saturation éventuelle de la tension de sortie ( $V_{\text{sat}} \simeq 15 \text{ V}$ ) et du courant de sortie ( $i_{\text{sat}} \simeq 40 \text{ mA}$ ).

On peut également supposer son gain infini, et un slew rate infini.

L'ALI présent dans le système possède une rétroaction sur sa borne  $\ominus$ , il fonctionne donc probablement en régime linéaire.

**2** Par la loi des nœuds en potentiel,

$$\frac{U_e - V_-}{R} + \frac{U_1 - V_-}{R} = 0 \quad \text{soit} \quad \underline{V_-} = \frac{U_1 + U_e}{2}.$$

Par un pont diviseur de tension,

$$\frac{V_+}{U_e} = \frac{1/jC_1\omega}{R_1 + 1/jC_1\omega} = \frac{1}{1 + jR_1C_1\omega} \quad \text{donc} \quad \underline{V_+} = \frac{1}{1 + jR_1C_1\omega} U_e.$$

L'ALI fonctionnant en régime linéaire,  $\underline{V_-} = \underline{V_+}$ , donc

$$\frac{U_1 + U_e}{2} = \frac{1}{1 + jR_1C_1\omega} U_e \quad \text{soit} \quad \underline{U_1} = \frac{2}{1 + jR_1C_1\omega} U_e - U_e$$

d'où

$$\underline{H_1} = \frac{1 - jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}.$$

La fonction de transfert  $\underline{H_1}$  est le quotient de deux nombres complexes conjugués, donc de même module : on en déduit directement

$$\forall \omega, \quad |\underline{H_1}| = 1.$$

L'argument est donné par

$$\arg \underline{H_1} = \arg(1 - jR_1C_1\omega) - \arg(1 + jR_1C_1\omega) = \arctan \frac{-R_1C_1\omega}{1} - \arctan \frac{R_1C_1\omega}{1}$$

On en conclut

$$\arg \underline{H_1} = -2 \arctan(R_1C_1\omega).$$

**3** Comme  $|\underline{H_1}| = 1$ , alors  $u_e$  et  $u_1$  sont toujours de même amplitude. La condition porte donc sur le déphasage : on cherche  $\omega_0$  tel que

$$\arg \underline{H_1}(\omega_0) = -2 \arctan(R_1C_1\omega_0) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{soit} \quad \arctan(R_1C_1\omega_0) = \frac{\pi}{4}$$

et comme  $\tan(\pi/4) = 1$ , il vient

$$\omega_0 = \frac{1}{R_1C_1}.$$

**4** La loi de comportement du multiplieur s'écrit ici

$$u_2(t) = K u_e(t) u_1(t).$$

Posons  $\varphi_1(\omega) = -2 \arctan(R_1C_1\omega)$  : d'après ce qui précède,

$$u_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi_1).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} u_2(t) &= K A^2 \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi_1) \\ &= \frac{K A^2}{2} [\cos(2\omega t + \varphi_1) + \cos(\varphi_1)] \end{aligned}$$

$$u_2(t) = \frac{K A^2}{2} \cos(\varphi_1) + \frac{K A^2}{2} \cos(2\omega t + \varphi_1).$$

**5** Si  $\omega = \omega_0$ , alors par définition  $\varphi_1 = -\pi/2$  et donc

$$u_2(t) = \frac{K A^2}{2} \cos\left(2\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

La fonction de transfert de l'association  $R_2, C_2$  vaut

$$\underline{H_2} = \frac{1/jC_2\omega}{R_2 + 1/jC_2\omega} = \frac{1}{1 + jR_2C_2\omega},$$

ce qui donne

$$|H_2| = \frac{1}{\sqrt{1 + (R_2 C_2 \omega)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi_2 = \arg H_2 = -\arctan(R_2 C_2 \omega).$$

On a donc

$$u_s(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2R_2 C_2 \omega_0)^2}} \cos\left(2\omega_0 t - \frac{\pi}{2} - \arctan(2R_2 C_2 \omega_0)\right)$$

La tension  $u_s$  est harmonique, donc pour qu'elle soit constante il faut que son amplitude soit nulle. Le filtre étant passe-bas, il faut que la pulsation  $2\omega_0$  soit bien supérieure à la pulsation de coupure du filtre, soit

$$2\omega_0 \gg \frac{1}{R_2 C_2} \quad \text{soit} \quad \frac{2}{R_1 C_1} \gg \frac{1}{R_2 C_2} \quad \text{d'où} \quad C_2 \gg \frac{R_1 C_1}{2R_2}.$$

6 Pour la tension d'entrée proposée, le déphasage  $\varphi_1$  en sortie de l'ALI vaut

$$\varphi_1 = -2 \arctan [R_1 C_1 (\omega_0 + \Delta\omega)] = -2 \arctan \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)$$

car  $R_1 C_1 \omega_0 = 1$ . Par un développement limité autour de  $x = 1$ , sachant que  $\arctan'(x) = 1/(1+x^2)$ ,

$$\varphi_1 \simeq -\frac{\pi}{2} - \frac{2}{1+1^2} \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\omega}{\omega_0}.$$

Le terme de fréquence double de la tension  $u_2$  sera coupé par le filtre passe-bas, en revanche comme cette fois  $\varphi_1 \neq \pi/2$ , la tension de sortie sera non nulle, égale à

$$U_s = \frac{KA^2}{2} \cos(\varphi_1) = \frac{KA^2}{2} \sin\left(-\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)$$

et comme  $\Delta\omega \ll \omega_0$ , un développement limité donne

$$U_s = -\frac{KA^2}{2} \frac{\Delta\omega}{\omega_0}.$$

La mesure de  $\Delta\omega$  est donc possible à partir de celle de la tension de sortie.

Le calcul que je propose ci-dessus me semble bien trop difficile pour être celui attendu lors d'un oral de banque PT ... mais je ne vois pas comment faire autrement pour répondre à la question !