



Oscillateurs auto-entretenus

Plan du cours

I Oscillateurs à relaxation : multivibrateurs astables	2
I.A Exemple : multivibrateur astable à intégrateur pur	2
I.B Exemple : multivibrateur astable compact	6
II Oscillateur quasi-sinusoïdal : exemple de l'oscillateur de Wien	7
II.A Principe de fonctionnement	7
II.B Démarrage des oscillations	8
II.C Condition d'auto-oscillation sinusoïdale, critère de Barkhausen	9
II.D Amplitude des oscillations, rôle des non-linéarités	11
II.E Calcul numérique des signaux générés	11
II.F Récapitulatif	13

Au programme

Extrait du programme officiel : partie 2 « Électronique », bloc 3 « Oscillateurs ».

Cette partie s'intéresse à une étude non exhaustive des oscillateurs en électronique. Les exemples sont choisis à l'initiative du professeur et les calculs des fonctions de transfert des filtres ne constituent pas un objectif de formation. En travaux pratiques, on complète l'étude par une analyse spectrale des signaux.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Oscillateur quasi-sinusoïdal réalisé en bouclant un filtre du deuxième ordre avec un amplificateur.	Exprimer les conditions théoriques (gain et fréquence) d'auto-oscillation sinusoïdale d'un système linéaire bouclé. Analyser, à partir de l'équation différentielle, l'inégalité que doit vérifier le gain de l'amplificateur afin d'assurer le démarrage des oscillations. Interpréter le rôle des non linéarités dans la stabilisation de l'amplitude des oscillations. Mettre en œuvre un oscillateur quasi-sinusoïdal et analyser les spectres des signaux générés. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, simuler l'évolution temporel du signal généré par un oscillateur.
Oscillateur de relaxation associant un intégrateur et un comparateur à hystérésis.	Décrire les différentes séquences de fonctionnement. Exprimer les conditions de basculement. Déterminer l'expression de la période.
Générateur de signaux non sinusoïdaux.	Mettre en œuvre un oscillateur de relaxation et analyser les spectres des signaux générés.

En gras, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Ces cinq dernières années au concours

- ▷ Écrit : épreuve A 2021.
- ▷ Oral : régulièrement.



On appelle **oscillateur électronique auto-entretenu** un montage capable de générer un signal périodique stable à partir uniquement d'une alimentation constante.

↪ présents dans tous les appareils électroniques : téléphone, ordinateur, téléviseur, etc.

On distingue deux grandes familles d'oscillateurs : les **oscillateurs quasi-sinusoïdaux** (paragraphe II) des **oscillateurs à relaxation** (paragraphe I), qui génèrent des signaux non-sinusoïdaux.

Remarque : la notion d'oscillateur est nettement plus vaste qu'en électronique : par exemple, un laser est un oscillateur optique.

⚠️ ⚠️ ⚠️ **Attention !** Ce chapitre est construit autour de l'étude d'exemples : plus que les résultats, ce sont les méthodes qu'il faut retenir.

I - Oscillateurs à relaxation : multivibrateurs astables



On appelle **oscillateur à relaxation** un oscillateur dans lequel deux processus distincts mènent à deux phases d'évolution des signaux :

- ▷ une phase de croissance du signal, due à un phénomène d'accumulation,
- ▷ suivie d'une phase de décroissance, due à une relaxation.

La phase de décroissance démarre lorsque qu'une valeur seuil haute est atteinte et cesse à une valeur seuil basse, suite à quoi une phase de croissance redémarre.

Un **multivibrateur astable** est un oscillateur de relaxation électronique qui contient deux blocs bouclés l'un sur l'autre : un comparateur à hystérésis et un intégrateur. L'un est inverseur, l'autre non inverseur. Plusieurs montages différents se comportent en multivibrateurs astables : il faut donc bien s'adapter au cas proposé !

⚠️ ⚠️ ⚠️ **Attention !** L'ALI du comparateur à hystérésis fonctionne en régime non-linéaire : il n'est donc pas possible de raisonner avec les représentations complexes, tous les raisonnements doivent se faire dans le domaine temporel (hormis pour une éventuelle analyse de stabilité linéaire).

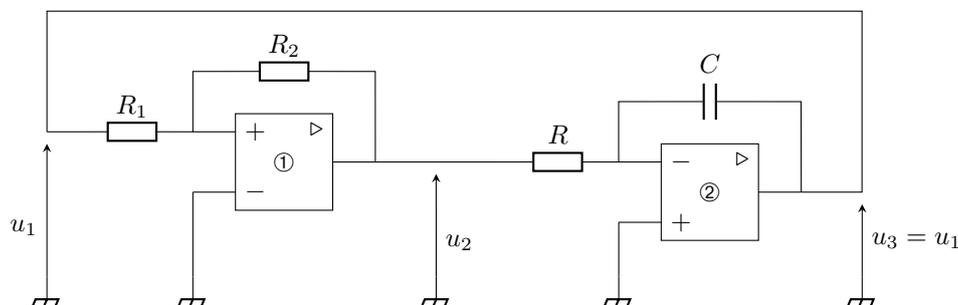
I.A - Exemple : multivibrateur astable à intégrateur pur

L'exemple le plus simple de multivibrateur astable est composé d'un comparateur à hystérésis *non inverseur* et d'un intégrateur pur *inverseur*. Ces deux blocs sont **bouclés** : l'entrée de l'un correspond à la sortie de l'autre et réciproquement, il n'y a aucune tension d'entrée à imposer par un générateur extérieur.



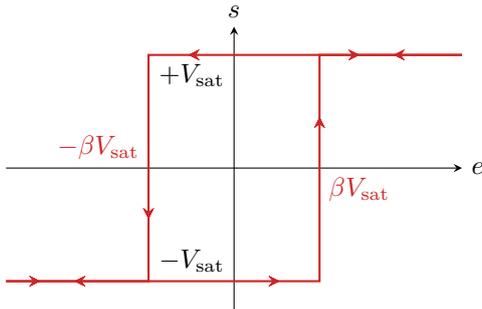
Un oscillateur n'a ni entrée ni sortie : les tensions peuvent être mesurées à n'importe quel endroit du montage.

Espace 1



• Relations entrée-sortie des deux blocs

▷ Cycle du comparateur à hystérésis : on pose $\beta = R_1/R_2$



Indiquer que $s = u_2$ et $e = u_1$ et réexpliquer la lecture du cycle : lorsque l'ALI est en saturation haute, il y reste tant que $e > -\beta V_{sat}$.

▷ Fonction de transfert de l'intégrateur : $\underline{H} = \frac{U_3}{U_2} = -\frac{1}{j\omega\tau}$

soit en temporel $j\omega\tau U_3 = -U_2$ d'où $\tau \frac{du_3}{dt} = -u_2$

Espace 2

• Fonctionnement qualitatif

- ▷ Au démarrage (= lorsque l'on branche les alimentations continues des ALI), l'ALI ① est nécessairement dans un état de saturation : par exemple, imaginons $u_2 = +V_{sat} = cte$;
- ▷ La tension d'entrée de l'intégrateur inverseur étant constante, sa tension de sortie est affine décroissante;
- ▷ Cette tension étant ramenée en entrée du comparateur à hystérésis, vient un moment où il bascule et $u_2 = -V_{sat}$;
- ▷ La sortie de l'intégrateur est alors affine croissante, jusqu'à ce que le comparateur à hystérésis bascule de nouveau.



↪ Allure des signaux :

- ▷ en sortie du comparateur à hystérésis : créneau
- ▷ en sortie de l'intégrateur : triangle

• Étude quantitative

Il y a un comparateur à hystérésis dans le montage, donc un ALI en régime de saturation : il faut raisonner par disjonction des cas, en fonction de l'état de saturation (haut ou bas) de l'ALI ①.

🔴🔴🔴 **Attention !** Tous les raisonnements doivent se faire dans le domaine temporel (bis).

Remarque : Déterminer la période des oscillations est souvent la seule question posée dans un exercice. Il faut alors savoir mener toute l'étude comme nous allons le faire.

Application 1 : Multivibrateur astable à intégrateur pur à ALI

On s'intéresse multivibrateur à intégrateur pur représenté ci-dessus.

- 1 - On suppose qu'à l'instant $t = 0$ l'ALI vient de basculer en saturation haute. Exprimer les conditions initiales. Établir l'expression de $u_3(t) = u_1(t)$. En déduire la durée de cette première phase.
- 2 - Pour simplifier le calcul, on définit une nouvelle variable de temps $t' = t - t_1$ de telle sorte que l'instant $t' = 0$ soit celui auquel l'ALI vient de basculer en saturation basse. Reprendre les questions précédentes.
- 3 - Déterminer la période des oscillations, et représenter l'allure des signaux sur quelques périodes.



• Première phase : ALI ① en saturation haute

Conditions initiales : L'ALI vient de basculer en saturation haute, les conditions initiales s'écrivent donc

$$u_1(0^+) = u_3(0^+) = \beta V_{sat} \quad \text{et} \quad u_2(0^+) = +V_{sat}.$$

Espace 3

Expression de $u_3 = u_1$: le plus simple est de procéder par séparation des variables.

Les dérivées sont traitées comme des fractions de différentielles

$$\frac{du_3}{dt} = -\frac{1}{\tau}u_2 = -\frac{V_{\text{sat}}}{\tau} \quad \rightsquigarrow \quad du_3 = -\frac{V_{\text{sat}}}{\tau} dt$$

et on procède ensuite à l'intégration

$$\int_{u_3(0^+)}^{u_3(t)} du_3 = -\frac{V_{\text{sat}}}{\tau} \int_0^t dt \quad \text{soit} \quad u_3(t) - u_3(0^+) = -\frac{1}{\tau}V_{\text{sat}}t$$

et avec la condition initiale on conclut

$$u_3(t) = -V_{\text{sat}}\frac{t}{\tau} + \beta V_{\text{sat}}.$$

Espace 4

Durée de la première phase :

D'après le cycle du comparateur à hystérésis, l'ALI ① reste en saturation haute tant que $u_3(t) = u_1(t) > -\beta V_{\text{sat}}$. Il y a basculement à l'instant t_1 où cette valeur est atteinte,

$$u_1(t_1) = -\beta V_{\text{sat}} \quad \text{soit} \quad -\cancel{V_{\text{sat}}}\frac{t_1}{\tau} + \beta\cancel{V_{\text{sat}}} = -\beta\cancel{V_{\text{sat}}}$$

et ainsi

$$t_1 = 2\beta\tau.$$

Espace 5

Remarque : Si la question ne demande que de trouver l'instant t_1 du basculement, il n'est pas nécessaire de passer par l'expression à tout instant. On peut directement poser l'intégration de la séparation de variables de l'instant initial jusqu'à l'instant du basculement :

M

$$\int_{u_3(0^+)}^{u_3(t_1)} du_3 = -\frac{V_{\text{sat}}}{\tau} \int_0^{t_1} dt \quad \text{soit} \quad \underbrace{u_3(t_1)}_{=-\beta V_{\text{sat}}} - \underbrace{u_3(0^+)}_{=\beta V_{\text{sat}}} = -\frac{V_{\text{sat}}}{\tau} t_1$$

• **Deuxième phase : ALI ① en saturation basse**

Conditions initiales :

$$u_1(0^+) = u_3(0^+) = -\beta V_{\text{sat}} \quad \text{et} \quad u_2(0^+) = -V_{\text{sat}} .$$

Espace 6

Expression de u_3 : procédons de nouveau par séparation des variables.

Au cours de cette deuxième phase,

$$\frac{du_3}{dt} = -\frac{1}{\tau} u_2 = +\frac{V_{\text{sat}}}{\tau} \quad \rightsquigarrow \quad du_3 = +\frac{V_{\text{sat}}}{\tau} dt$$

et on procède ensuite à l'intégration

$$\int_{u_3(t'=0^+)}^{u_3(t')} du_3 = +\frac{V_{\text{sat}}}{\tau} \int_{t'=0}^{t'} dt \quad \text{soit} \quad u_3(t') - u_3(0^+) = +\frac{V_{\text{sat}}}{\tau} t'$$

et avec la condition initiale on conclut

$$u_3(t') = +\frac{V_{\text{sat}}}{\tau} t' - \beta V_{\text{sat}} .$$

Espace 7

Durée de la deuxième phase :

L'ALI ① reste en saturation basse tant que $u_3(t') < \beta V_{\text{sat}}$, il y a donc basculement à l'instant t'_2 tel que

$$+\frac{V_{\text{sat}}}{\tau} \frac{t'_2}{\tau} - \beta V_{\text{sat}} = +\beta V_{\text{sat}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{t'_2 = 2\beta\tau}$$

Espace 8

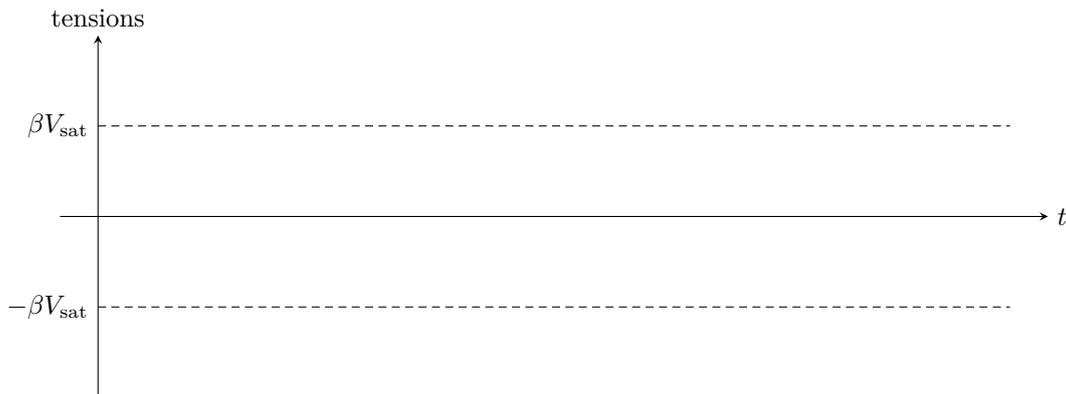
Remarque : il y a une petite imprécision dans le raisonnement. Comme la tension u_3 est la tension de sortie d'un ALI, elle ne peut pas dépasser V_{sat} . Pour que les basculements aient bien lieu, il faut que les tensions de basculement soient accessibles à $u_1 = u_3$, ce qui donne

$$\beta V_{sat} < V_{sat} \quad \text{soit} \quad \beta < 1.$$

• Période des oscillations et allure des signaux

Il suffit simplement de sommer la durée des deux phases

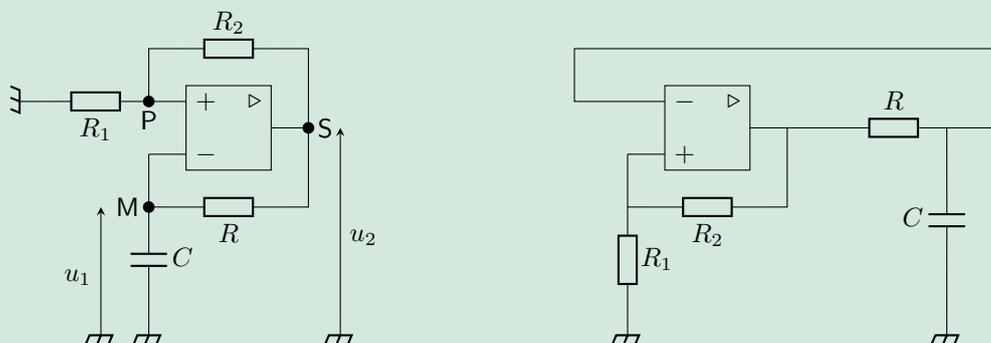
Espace 9



Remarque : Pour aller plus directement au résultat, il est possible de calculer uniquement t_1 puis de constater que, le temps caractéristique τ de l'intégrateur étant le même dans les deux phases, alors elles ont forcément la même durée (la pente sera la même), si bien que $T = 2t_1$.

I.B - Exemple : multivibrateur astable compact

Application 2 : Multivibrateur astable compact à un unique ALI



1 - Montrer que les deux montages représentés sont équivalents : indiquer la position des nœuds M, P et S et les tensions u_1 et u_2 sur le montage de droite. Identifier les blocs fondamentaux d'un multivibrateur astable : comparateur à hystérésis et intégrateur. Lequel des deux blocs est inverseur ?

Par la suite, on ne raisonne que sur le schéma de gauche.

2 - Montrer que l'ALI fonctionne en régime de saturation. Pour cela, exprimer les potentiels v_+ et v_- en fonction de la tension de sortie u_2 dans une hypothèse de fonctionnement linéaire et conclure.

3 - Établir la relation d'hystérésis entre u_1 et u_2 . La représenter graphiquement. On notera $\pm \alpha V_{sat}$ les tensions de basculement.

4 - On suppose qu'à l'instant $t = 0$ l'ALI vient de basculer en saturation basse. Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $u_1(t)$. En déduire l'instant t_1 auquel l'ALI bascule en saturation haute, ce qui amorce une seconde phase.

5 - Déterminer la durée de la deuxième phase. On pourra poser $t' = t - t_1$.

6 - En déduire la période des oscillations, et représenter l'allure des signaux sur quelques périodes.

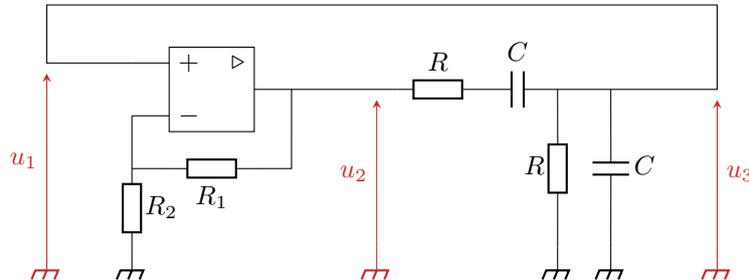
II - Oscillateur quasi-sinusoïdal : exemple de l'oscillateur de Wien



On appelle **oscillateur quasi-sinusoïdal** un oscillateur capable de générer un signal aussi proche que possible d'une sinusoïde.

• Notre exemple : l'oscillateur de Wien

L'oscillateur de Wien est un exemple historique qui a le mérite de la simplicité (et qui est donc archi-classique!), mais il s'avère peu performant et n'est donc plus utilisé aujourd'hui.



Données : fonctions de transfert des deux blocs en régime linéaire.

$$\underline{H}_{\text{ampli}} = \frac{U_2}{U_1} = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \stackrel{\text{déf.}}{=} A$$

$$\underline{H}_{\text{filtre}} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{1}{3 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega}} \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H_0 = 1/3 \\ \omega_0 = 1/RC \\ Q = 1/3 \end{cases}$$

II.A - Principe de fonctionnement

• Structure

La structure en blocs est moins systématique que pour un oscillateur de relaxation, néanmoins, un oscillateur quasi-sinusoïdal contient souvent deux blocs : les entourer sur le schéma

- ▷ un filtre passe-bande qui sélectionne une unique fréquence ;
- ▷ un amplificateur qui amplifie l'harmonique sélectionnée.

Ces deux blocs sont **bouclés** : l'entrée de l'un correspond à la sortie de l'autre et réciproquement. On retrouve qu'un oscillateur n'a ni entrée ni sortie, aucune tension n'est imposée par un générateur extérieur.

• Fonctionnement qualitatif

- ▷ Au démarrage (= lorsque l'on branche l'alimentation continue de l'ALI), les différentes tensions sont inconnues, mais il y a au moins un bruit de fond électronique dont le spectre contient toutes les fréquences ;
- ▷ L'amplificateur non inverseur amplifie le bruit de u_1 ce qui donne u_2 ;
- ▷ Cette tension est filtrée en privilégiant la fréquence centrale du passe-bande, ce qui donne u_3 ;
- ▷ Cette tension est ramenée en entrée du montage et subit à nouveau le même cycle : une seule fréquence est donc privilégiée à chaque cycle d'amplification ;
- ▷ L'amplification cesse lorsque l'ALI sort du régime linéaire.

Remarque : Pour que les oscillations sinusoïdales se poursuivent, il faut que le bloc filtre permette à l'ALI de retrouver aussi rapidement que possible un fonctionnement linéaire. Les oscillations ne sont que « quasi » sinusoïdales à cause du passage par le régime de saturation de l'ALI.

Conséquences : cette description qualitative permet d'anticiper certains résultats importants, que nous allons démontrer.

- ▷ Condition de démarrage des oscillations :

le gain de l'amplificateur doit être supérieur à l'atténuation induite par le filtre à sa fréquence centrale

Espace 10

- ▷ Fréquence des oscillations :
égale à la fréquence centrale du passe-bande

Espace 11

- ▷ Amplitude des oscillations :
limitée par la saturation de l'ALI, u_2 sera d'amplitude V_{sat} .

Espace 12

- ▷ Condition pour que les oscillations restent sinusoïdales :

le gain de l'amplificateur ne doit pas être trop élevé, sinon l'ALI sature trop longtemps et le signal est déformé.

Espace 13

II.B - Démarrage des oscillations

Le plus simple en termes de compréhension est d'utiliser une approche temporelle, c'est-à-dire basée sur des équations différentielles.

↪ passage des fonctions de transfert dans le domaine temporel selon la méthode usuelle $j\omega \leftrightarrow d/dt$

• Équation différentielle vérifiée par u_3

Fonction de transfert du filtre : $H_{\text{filtre}} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$

Par un produit en croix,

$$\begin{aligned} \underline{U_3} + \frac{jQ\omega}{\omega_0} \underline{U_3} + \frac{Q\omega_0}{j\omega} \underline{U_3} &= H_0 \underline{U_2} \\ j\omega \underline{U_3} + (j\omega)^2 \frac{Q}{\omega_0} \underline{U_3} + Q\omega_0 \underline{U_3} &= j\omega H_0 \underline{U_2} \\ (j\omega)^2 \frac{Q}{\omega_0} \underline{U_3} + j\omega \underline{U_3} + Q\omega_0 \underline{U_3} &= j\omega H_0 \underline{U_2} \end{aligned}$$

En repassant dans le domaine temporel, on a donc

$$\frac{Q}{\omega_0} \frac{d^2 u_3}{dt^2} + \frac{du_3}{dt} + Q\omega_0 u_3 = H_0 \frac{du_2}{dt}.$$

Espace 14

« Fonction de transfert » de l'amplificateur : $H_{\text{ampli}} = \frac{U_2}{U_1} = A$

tant que l'ALI fonctionne en régime linéaire, $u_2 = A u_1$... et lorsqu'il est en saturation alors $u_2 = \pm V_{\text{sat}}$ « indépendamment » de u_1 .

Espace 15

Conclusion :

Le bouclage impose $u_2 = A u_1 = A u_3$ d'où on déduit

$$\frac{Q}{\omega_0} \frac{d^2 u_3}{dt^2} + \frac{du_3}{dt} + Q\omega_0 u_3 = H_0 A \frac{du_3}{dt}$$

et finalement l'équation devient

$$\frac{d^2 u_3}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}(1 - H_0 A) \frac{du_3}{dt} + \omega_0^2 u_3 = 0.$$

Espace 16

- **À quelle condition des oscillations peuvent elles apparaître spontanément ?**

Ces oscillations démarrent à cause de perturbations liées au bruit électronique ou aux défauts de l'ALI : à l'instant $t = 0$, u_3 est non nul mais très faible. La solution particulière de l'équation différentielle étant nulle, il ne faut pas que le transitoire s'amortisse vers cette solution, ce qui n'est possible que si le système est instable.



Un oscillateur quasi-sinusoidal n'oscille que si le montage bouclé est instable.

R

Critère de stabilité :

Il faut donc avoir des coefficients de signe différents dans l'équation différentielle, soit ici $1 - H_0 A < 0$ ou $H_0 A > 1$

Espace 17

Remarque : Les oscillations prennent naissance « à partir de rien » : d'où vient l'énergie ?

alim continue de l'ALI

Espace 18

II.C - Condition d'auto-oscillation sinusoidale, critère de Barkhausen

- **Approche temporelle**

Repartons de l'équation différentielle vérifiée par u_3 :

$$\frac{d^2 u_3}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}(1 - H_0 A) \frac{du_3}{dt} + \omega_0^2 u_3 = 0.$$

M!

Conditions d'oscillations parfaitement sinusoidales :

Les oscillations sont parfaitement sinusoidales lorsque l'équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique.

Espace 19

Critère sur le gain :

Annuler le terme dérivée d'ordre 1 donne la condition $H_0 A = 1$ soit $1 + \frac{R_1}{R_2} = 3$.

Espace 20

Pulsation des oscillations :

pulsation propre du système, donc ici $\omega_0 = 1/RC$

Espace 21

↪ **conséquence importante** : le critère d'oscillations purement sinusoidales est incompatible avec celui de démarrage des oscillations ... et comme il implique les composants, il est de toute façon impossible à vérifier en pratique : les oscillations ne peuvent être que *quasi*-sinusoidales.

Q

• Approche fréquentielle

M!

Retrouvons ce résultat par une approche fréquentielle, c'est-à-dire utilisant les fonctions de transfert harmoniques : on **suppose** que les oscillations sont établies et parfaitement sinusoïdales (= régime permanent harmonique), et on **cherche** à quelles conditions (au pluriel!) cela est possible.

↪ raisonnement de type analyse/synthèse.

$$\underline{U}_3 = \underline{H}_{\text{filtre}} \underline{U}_2 = \underline{H}_{\text{filtre}} \underline{H}_{\text{ampli}} \underline{U}_1.$$

Or le système est bouclé, c'est-à-dire $\underline{U}_1 = \underline{U}_3$ d'où on déduit la condition d'oscillation

$$\underline{H}_{\text{filtre}} \underline{H}_{\text{ampli}} = 1.$$

Espace 22

R



Critère de Barkhausen :

Les oscillations sont parfaitement sinusoïdales à une pulsation ω si et seulement si le produit des fonctions de transfert des différents blocs à cette pulsation vaut 1,

$$\underline{H}_{\text{filtre}}(\omega) \times \underline{H}_{\text{ampli}}(\omega) = 1.$$

*** **Attention !** Contrairement aux apparences, le critère de Barkhausen n'est pas une banale évidence toujours vérifiée : il ne l'est que si les oscillations sont sinusoïdales ! Dans le cas contraire, les représentations complexes ne sont plus utilisables.

M

Le critère de Barkhausen porte sur des nombres complexes, et il contient donc deux informations (parties réelle et imaginaire, ou module et argument) : schématiquement, l'une donne accès à la pulsation des oscillations, l'autre donne une condition sur les gains des deux blocs c'est-à-dire sur les composants utilisés.

Application à l'oscillateur de Wien : Barkhausen :

$$A \times \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = 1 \quad \text{soit} \quad A H_0 = 1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right).$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire des deux membres, on en déduit

$$\begin{cases} A H_0 = 1 \\ jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 1 + \frac{R_1}{R_2} = 3 \\ \omega = \omega_0 = \frac{1}{RC}. \end{cases}$$

• Généralisation

Q



Un oscillateur quasi-sinusoïdal oscille à la fréquence centrale du passe-bande, et ce seulement si l'amplificateur compense exactement l'atténuation du filtre.

En pratique, ces résultats ne sont qu'approchés et les oscillations ne peuvent pas être parfaitement sinusoïdales.

II.D - Amplitude des oscillations, rôle des non-linéarités

L'amplitude des oscillations ne peut pas augmenter indéfiniment : on a nécessairement $-V_{\text{sat}} \leq u_2 \leq +V_{\text{sat}}$.

↪ après la phase de croissance des oscillations dans laquelle l'ALI fonctionne en régime linéaire, le montage atteint une phase non-linéaire où l'ALI fonctionne en régime de saturation.



L'amplitude des oscillations est limitée par la saturation de l'ALI.



↪ on peut ainsi en déduire l'amplitude de toutes les tensions : la tension u_2 de sortie de l'ALI a pour amplitude V_{sat} , et la tension u_3 de sortie du filtre a pour amplitude $H_0 V_{\text{sat}}$ avec H_0 le gain du filtre à la pulsation d'oscillation.

↪ on en déduit une autre condition nécessaire à l'existence des oscillations : lorsque l'ALI atteint la saturation, il ne doit pas y rester bloquer, mais repasser en régime linéaire.

► **Pour approfondir** : Vérifions que la saturation temporaire de l'ALI n'empêche pas les oscillations de l'oscillateur de Wien. Supposons qu'à l'instant initial $t = 0$ l'ALI est en saturation haute : on sait que $\varepsilon > 0$ et $u_2 = +V_{\text{sat}}$. Dans cette hypothèse,

$$\varepsilon = u_1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_2 = u_3 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} = u_3 - k V_{\text{sat}}$$

Attention, comme le régime de fonctionnement de l'ALI change, on ne peut plus utiliser les équations précédentes : en particulier, $u_2 = \pm V_{\text{sat}} \neq A u_3$.

On a montré au paragraphe II.B que $u_1 = u_3$ et u_2 étaient reliées en toute généralité par la relation différentielle

$$\frac{d^2 u_3}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_3}{dt} + \omega_0^2 u_3 = \frac{H_0 \omega_0}{Q} \frac{du_2}{dt} \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 u_3}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_3}{dt} + \omega_0^2 u_3 = 0$$

puisque ici $u_2 = V_{\text{sat}} = \text{cte}$. Comme $u_3 = \varepsilon + k V_{\text{sat}}$, on en déduit l'équation différentielle vérifiée par ε :

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\varepsilon}{dt} + \omega_0^2 \varepsilon = -k \omega_0^2 V_{\text{sat}}$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur amorti (= stable) dont la solution particulière $-k V_{\text{sat}}$ est négative. Il existe donc forcément un instant auquel ε s'annule, et l'ALI peut alors repasser en régime linéaire.

Au cours de la phase linéaire, les oscillations sont à nouveau d'amplitude croissante, jusqu'à atteindre une nouvelle phase de saturation.

▷ s'il s'agit d'une saturation positive, le même raisonnement s'applique ;

▷ s'il s'agit d'une saturation négative, on montre de même que l'ALI finit par retrouver un régime linéaire.

Ainsi, les oscillations perdurent dans le montage. ■

II.E - Calcul numérique des signaux générés

Le changement de régime de l'ALI, et par conséquent le changement dans les équations différentielles régissant le comportement du système, rend le calcul analytique des signaux générés par l'oscillateur trop laborieuse pour nous.

• Rappel de PTSI : méthode d'Euler appliquée à une équation différentielle du second ordre

Le schéma d'Euler ne permet pas de résoudre directement des équations différentielles d'ordre 2. Pour contourner la difficulté, il est nécessaire de ruser en introduisant une deuxième fonction inconnue égale à la dérivée première. On est alors ramené à un système différentiel formé de deux équations du premier ordre, auxquelles on peut appliquer le schéma d'Euler explicite.



▷ Lorsque l'ALI fonctionne en régime linéaire, c'est-à-dire tant que $|u_3| < V_{\text{sat}}$, u_3 vérifie (démonstration dans le complément page 11)

$$\frac{d^2 u_3}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} (1 - H_0 A) \frac{du_3}{dt} + \omega_0^2 u_3 = 0$$

Système différentiel : On introduit la dérivée $v_3 = \frac{du_3}{dt}$ vue comme une deuxième fonction inconnue, ce qui donne

$$\begin{cases} \frac{du_3}{dt} = v_3 \\ \frac{dv_3}{dt} + \frac{\omega_0}{Q} (1 - H_0 A) v_3 + \omega_0^2 u_3 = 0 \end{cases}$$



Relations de récurrence :

M

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} = v_n \\ \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} + \frac{\omega_0}{Q}(1 - H_0 A)v_n + \omega_0^2 u_n = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + \Delta t v_n \\ v_{n+1} = \left(1 - \frac{\omega_0 \Delta t}{Q}(1 - H_0 A)\right) v_n - \omega_0^2 \Delta t u_n \end{cases}$$

Espace 23

▷ Lorsque l'ALI fonctionne en régime de saturation, c'est-à-dire tant que $|u_3| \geq V_{\text{sat}}$, on peut montrer que u_3 vérifie (voir démonstration complémentaire page 11)

$$\frac{d^2 u_3}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_3}{dt} + \omega_0^2 u_3 = 0$$

Par analogie avec ce qui précède, on en déduit directement les relations de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \Delta t v_n \\ v_{n+1} = \left(1 - \frac{\omega_0 \Delta t}{Q}\right) v_n - \omega_0^2 \Delta t u_n \end{cases}$$

• Implémentation

Il suffit d'inclure à chaque itération un test **if** pour savoir quelle relation de récurrence utiliser. En supposant toutes les constantes physiques (ω_0 , Q , etc.) et les paramètres de simulation (pas de temps Δt , etc.) convenablement définis et initialisés, un exemple de code possible pourrait être le suivant. Il y a bien sûr de nombreuses autres possibilités!

M

```

1  ### Définition des cstes
2  a = omega0 * dt/Q
3  b = omega0**2 * dt

5  ### Initialisation des listes
6  t = [n*dt for n in range(N)]
7  u = [None for n in range(N)]
8  v = [None for n in range(N)]

10 ### Conditions initiales :
11 u[0] = 0
12 v[0] = 0 # par exemple !

14 ### Relations de récurrence :
15 for n in range(N-1):
16     if np.abs(u[n]) < Vsat:
17         u[n+1] = u[n] + dt * v[n]
18         v[n+1] = (1 - a * (1 - H0*A)) * v[n] - b * u[n]
19     else:
20         u[n+1] = u[n] + dt * v[n]
21         v[n+1] = (1 - a) * v[n] - b * u[n]
```

II.F - Récapitulatif

La condition d'auto-oscillation $H_0A = 1$ (« gain = pertes ») fait figure de seuil :

- ▷ si le gain est plus faible, il n'y a pas d'oscillations ;
- ▷ lorsque le seuil est exactement atteint les oscillations sont parfaitement harmoniques ;
- ▷ plus le gain est élevé et s'éloigne du seuil, plus les non-linéarités sont présentes : les oscillations s'éloignent des oscillations harmoniques et présentent un spectre riche.

Les tracés ci-dessous concernent un oscillateur quasi-sinusoïdal formé d'un passe-bande ($\omega_0 = 10 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $Q = 1/3$, $H_0 = 1/3$) et d'un amplificateur de gain A variable.

$H_0A = 1$	$H_0A \gtrsim 1$	$H_0A \gg 1$
Phénoménologie :		
ALI ne sature jamais. Oscillations purement sinusoïdales. Pulsation $\omega = \omega_0$ Inatteignable en pratique.	ALI sature sur des durées courtes. Oscillations quasi-sinusoïdales. Pulsation $\omega \simeq \omega_0$.	ALI sature sur des durées longues. Oscillations non-sinusoïdales. Pulsation $\omega < \omega_0$.
Régime permanent :		
Bleu : sortie du filtre. Vert : sortie de l'ALI. Horizontales rouges : limites de linéarité.		
Spectre :		
Verticale rouge : pulsation propre du filtre.		
Démarrage des oscillations :		
Bleu : sortie du filtre. Horizontale rouge : limite de linéarité.		
Pas de phase de croissance : le régime permanent est directement atteint, l'amplitude des oscillations égale à la condition initiale.		

Corrigé de l'application sur le multivibrateur astable compact

1 Comparateur à hystérésis inverseur.

2 Hypothèse de fonctionnement linéaire : avec deux ponts diviseurs

$$v_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_2 \quad \text{et} \quad v_- = \frac{1/jC\omega}{1/jC\omega + R} u_2 = \frac{1}{1 + jRC\omega} u_2$$

Or si le fonctionnement était linéaire on aurait $v_- = v_+$, ce qui est impossible avec les expressions ci-dessus. L'hypothèse est donc fautive.

3 En toute généralité :

$$\varepsilon = v_+ - v_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_2 - u_1$$

Si l'ALI est en saturation haute, il y reste tant que $u_1 < \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} = \alpha V_{\text{sat}}$. Si l'ALI est en saturation basse, il y reste tant que $u_1 > -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} = -\alpha V_{\text{sat}}$.

4 LM : $u_2 = u_1 + Ri$ donne $-V_{\text{sat}} = u_1 + RC \frac{du_1}{dt}$ qui se résout en

$$u_1(t) = A e^{-t/\tau} - V_{\text{sat}} \quad \text{avec} \quad u_1(0^+) = A - V_{\text{sat}} = \alpha V_{\text{sat}}$$

et finalement

$$u_1(t) = (1 + \alpha) V_{\text{sat}} e^{-t/\tau} - V_{\text{sat}}.$$

Instant de basculement :

$$u_1(t_1) = -\alpha V_{\text{sat}} \quad \text{soit} \quad e^{-t_1/\tau} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad \text{d'où} \quad t_1 = \tau \ln \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}.$$

5 L'équation différentielle est presque la même, si ce n'est la saturation haute :

$$+V_{\text{sat}} = u_1 + \tau \frac{du_1}{dt}$$

Séparons les variables :

$$\tau \frac{du_1}{dt} = V_{\text{sat}} - u_1 \quad \text{soit} \quad \frac{du_1}{V_{\text{sat}} - u_1} = \frac{dt}{\tau}$$

puis en intégrant entre $t' = 0$ et $t' = t'_2$, il vient

$$-\int_{-\alpha V_{\text{sat}}}^{\alpha V_{\text{sat}}} \frac{du_1}{u_1 - V_{\text{sat}}} = \frac{1}{\tau} \int_0^{t'_2} dt \quad \text{soit} \quad -\ln \frac{\alpha V_{\text{sat}} - V_{\text{sat}}}{-\alpha V_{\text{sat}} - V_{\text{sat}}} = \frac{t'_2}{\tau}$$

qui se simplifie en

$$t'_2 = \tau \ln \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}.$$

6 Période $T = 2\tau \ln \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}$